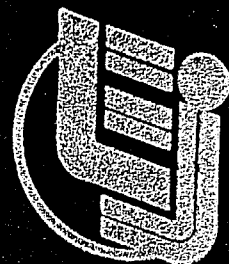
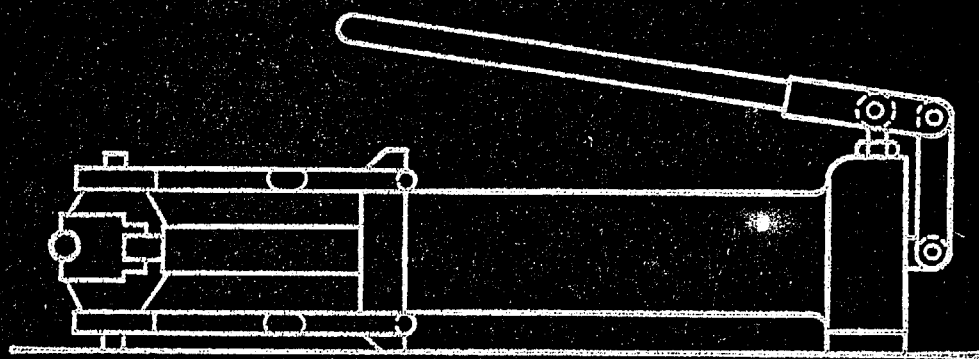


Angel Jorge Ayala

MANUAL TÉCNICO DE CALDEIRARIA

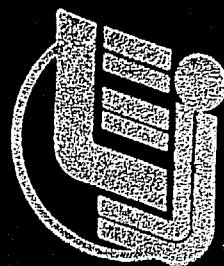
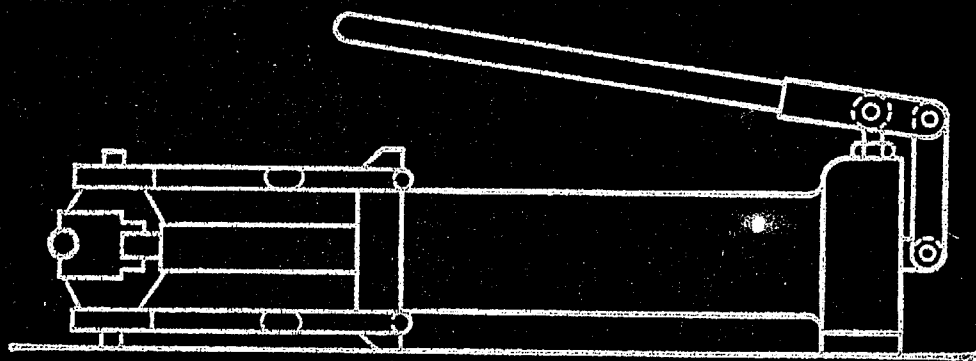
TEORIA E PRÁTICA

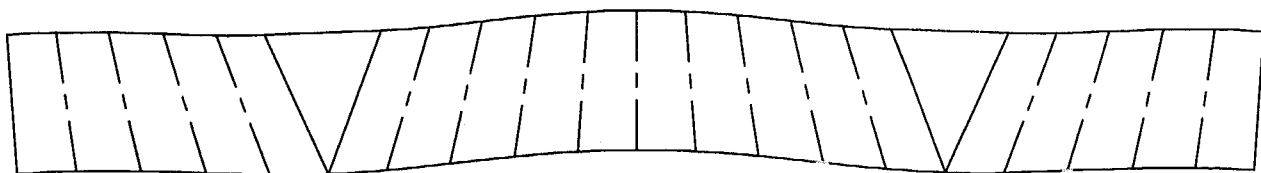
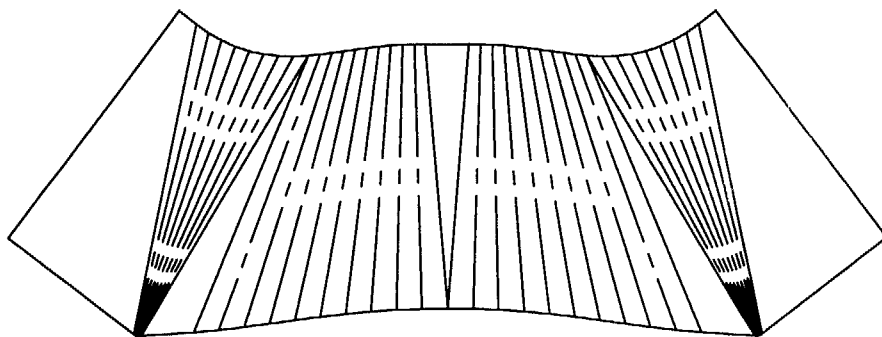
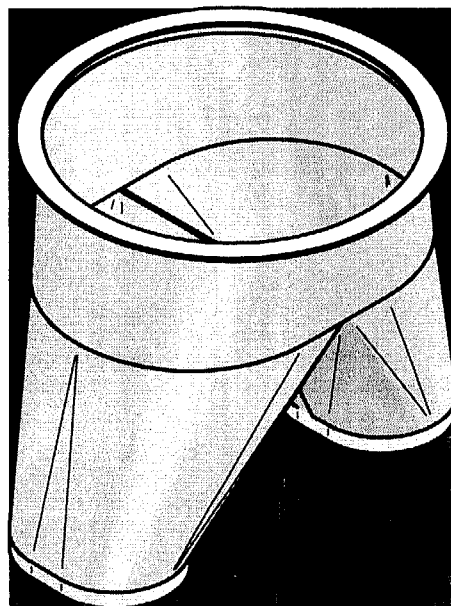
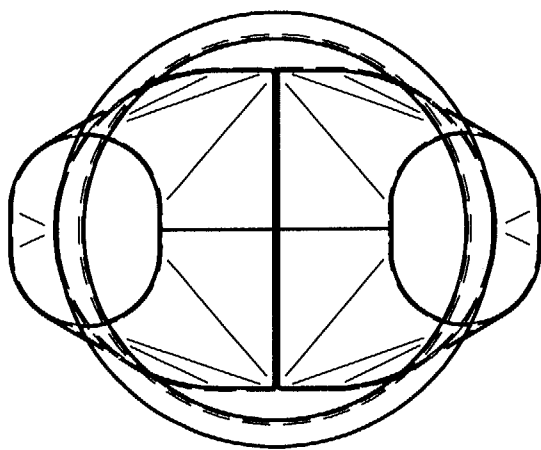
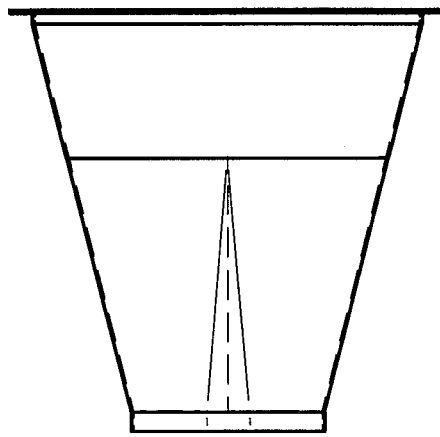
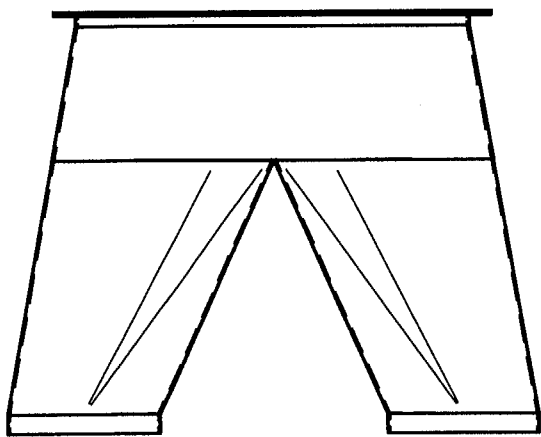


Angel Jorge Ayala

MANUAL TÉCNICO DE CALDEIRARIA

TEORIA E PRÁTICA





MANUAL TÉCNICO
DE
CALDEIRARIA

Teoria e Prática

VOL.
I

*Traduzido
por
Tatiana M. Dimitroff de Bragança Soares*

PRIMEIRA EDIÇÃO BRASILEIRA, 1985

Angel Jorge Ayala

MANUAL TÉCNICO DE CALDEIRARIA

TEORIA E PRÁTICA

A. JORGE AYALA

Chefe de Oficinas de Construções
*ALJU, S.A. Caldeiraria do aço-carbono.
Caldeiraria do aço inoxidável.
San Salvador del Valle (Vizcaya)*



LEJ — LIVRARIA E EDITORA JÁCOMO LTDA.

Av. Ipiranga, 1267 — 11º andar

São Paulo

1985

DEDICADO À MINHA ESPOSA E FILHOS

(Angel Jorge Ayala)

Editores: Jácomo Mastrochirico

Vito Antonio Mastrochirico

Tradutora: Tatiana M. Dimitroff de Bragança Soares

Composição: Aura Brasil Produções Gráficas Ltda.

Título original em língua espanhola:

TECNICA Y PRACTICA DE CALDERERIA

© URMO. S.A. de Ediciones. Bilbao

© 1985 copyright da tradução em português da

LEJ — Livraria e Editora Jácomo Ltda.

Av. Ipiranga, 1267 - 11º andar

Primeira Edição Brasileira, 1985

Proibida toda e qualquer reprodução para a língua portuguesa.

Depósito Legal: BI. 1830-1975

ISBN: 84-314-0258-X

Impresso no Brasil

Prólogo

A primeira missão do educador é levar os alunos a compreenderem a matéria explicada. O mestre deve, portanto, estar à altura dos seus conhecimentos.

Para não esquecer a matéria aprendida o aluno deve saber o motivo por que foram adotados determinados métodos para a solução dos problemas.

Se em Caldeiraria o profissional tivesse que aprender diferentes traçados para cada problema, a sua tarefa se tornaria quase impossível porque teria que memorizar um número incalculável de traçados para os mais variados problemas. Se, porém, procurarmos ensinar-lhe os princípios fundamentais em que se baseia a teoria do traçado, ele irá descobrindo novas fórmulas para a solução dos novos problemas que forem surgindo. Desta maneira tornar-se-á mais fácil adaptar outras técnicas de traçado e colocá-las em prática a partir das noções teóricas fundamentais explicadas na primeira parte da presente obra. Na primeira parte recorri às noções simples de geometria descritiva para tornar o assunto acessível aos profissionais de todos os níveis.

Naturalmente, completo as exposições teóricas com exercícios práticos apresentados a título de modelo e orientação. Na segunda parte do livro dou uma explicação de noções de trigonometria e um certo número de fórmulas geométricas para aqueles que desejarem resolver os traçados pelo método de cálculo.

Espero que a matéria assim distribuída e exposta seja de utilidade para os profissionais de Caldeiraria.

O AUTOR

Prólogo à Edição Brasileira

Faltava no mercado brasileiro uma obra de envergadura sobre Caldeiraria. Procuramos, portanto, no mercado internacional um texto que reunisse características que julgamos essenciais, como facilidade de exposição, teoria aliada à prática, universalidade e, sobretudo, versatilidade de modelos. A missão não foi fácil. Dos melhores tratados que examinamos, alguns eram puramente acadêmicos, outros detalhados mas incompletos e outros ainda especializados para determinadas oficinas de determinados países.

Após diuturna reflexão, a nossa escolha recaiu sobre a obra de Angel Jorge Ayala: *Técnicas y Práctica de Calderería* da Urmo S.A. de Ediciones. Trata-se de um Manual destinado não só aos profissionais das oficinas mas também aos projetistas e desenhistas. O grande número e variedade dos exercícios constituem um instrumento indispensável aos estudantes de nível médio e universitário. Conseguimos, pois, editar uma obra para a escola, para o escritório e para a oficina.

O autor segue o esquema clássico das obras do gênero, expondo inicialmente as noções de geometria descritiva e trigonometria e tratando, depois, dos corpos geométricos fundamentais bem como intersecções desses corpos. Subseqüentemente são explicados os métodos de triangulação e de cálculo. A parte final reúne uma série de tabelas mais empregadas em Caldeiraria.

Fazendo nossos os anseios do autor esperamos que a matéria assim distribuída e exposta seja de utilidade para os profissionais de Caldeiraria.

Vito Antonio Mastrochirico
Editor

Índice

Prólogo	7
Prólogo à edição brasileira	8
PRIMEIRA PARTE	
Noções de Geometria descritiva	11
SEGUNDA PARTE	
Noções de Trigonometria retilínea e fórmulas geométricas	61
TERCEIRA PARTE	
CAPÍTULO	
I. Desenvolvimento lateral do cilindro	103
II. Virolas oblíquas de bocas circulares	116
III. Cones	126
IV. União de cilindros com cones	140
V. Prismas e pirâmides	150
VI. Cones oblíquos	164
VII. Transformadores	182
VIII. Hélices	212
IX. Superfícies não desdobráveis	220
X. Intersecções de cilindros e cones em esferas	230
XI. Intersecções cilíndricas	236
XII. Intersecções de cones em cilindros	260
XIII. Intersecções cónicas	268
XIV. Intersecções de cilindros em cones	282
XV. Intersecções de cilindros retos em cones oblíquos	294
XVI. Tubulação rebitada	300
QUARTA PARTE	
Método de triangulação	311
CAPÍTULO	
I.	314
II. Transformadores	326
III. Peças de duas vias (calças)	340
IV. Peças de três vias	360
V. Intersecções	370
VI. Outro sistema de triangulação	382
QUINTA PARTE	
Método de cálculo	401

SEXTA PARTE

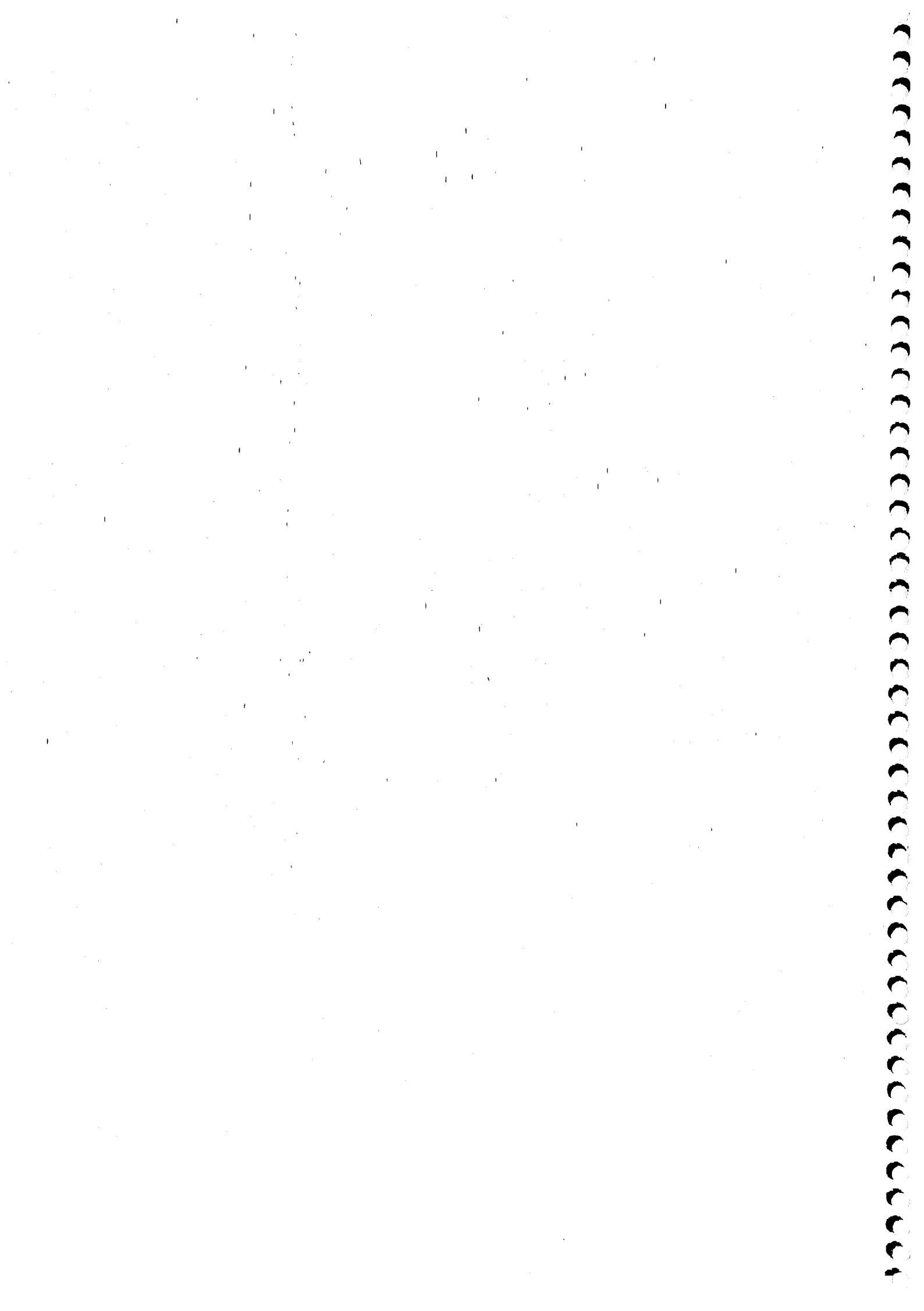
Práticas de caldeiraria	457
-------------------------------	-----

SÉTIMA PARTE

Tabelas dos valores naturais, das expressões trigonométricas, dos ângulos sucessivos de minuto em minuto ..	497
Tabelas de conversões de pés, polegadas, etc., em milímetros e vice-versa	523
Perfis e laminados	537
Pesos dos ferros quadrados e redondos	549
Pesos dos ferros planos	550
Quadrado dos números de 1 a 10 000	555
Comprimentos de circunferências de 1 a 1 000	555

PRIMEIRA PARTE

NOÇÕES DE
GEOMETRIA DESCRITIVA



A geometria descritiva tem por objeto representar as formas e os corpos do espaço por suas projeções: projeção horizontal (vista em *planta*), projeção vertical ou frontal (*alçado* ou vista em *elevação*), projeção de perfil ou de canto, etc. Estas projeções são chamadas *ortogonais* porque são obtidas traçando-se perpendiculares de todos os pontos da figura ou corpo do espaço sobre os planos de projeção. Na figura 1 temos o ponto *A* no espa-

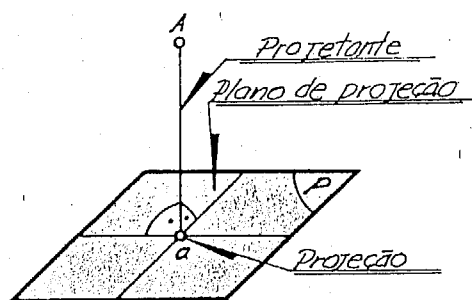


Figura 1

ço projetado sobre o plano *P*; esta projeção foi feita traçando-se uma perpendicular ao plano *P* desde o ponto *A*, determinando o ponto de projeção *a*. A reta *A-a* se chama projetante e, o plano *P*, plano de projeção.

Planos de projeção. Os planos de projeção são formados pela horizontal *H* e a vertical *V*, que for-

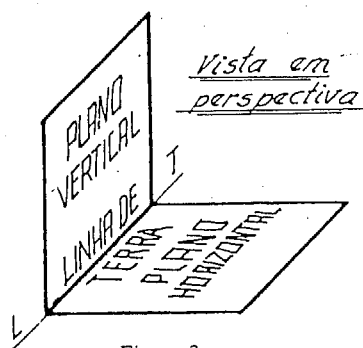


Figura 2

Nota. Este sinal $\perp$, representa duas retas ou dois planos que formam um ângulo reto.

mam um ângulo reto entre ambos. No lugar em que se cortam estes dois planos, forma-se uma reta que se chama *linha de terra* que será representada pelas letras *L-T*. Na figura 2 traçou-se uma perspectiva dos planos de projeção e a *linha de terra* *L-T*; este sistema que estamos estudando chama-se *sistema diédrico*.

Projeção do ponto. Na figura 3 representou-se uma perspectiva do ponto *A* no espaço, assim como suas projeções horizontal *H* e vertical *V*. O ponto *A* se projeta perpendicularmente ao plano *H* de projeção, obtendo-se o ponto *a*; depois pro-

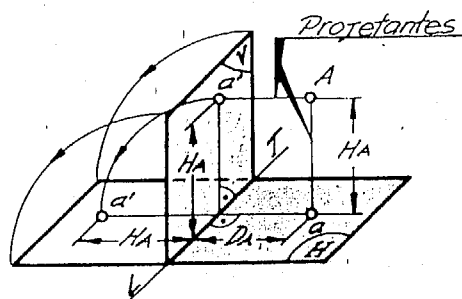


Figura 3

jeta-se sobre o plano *V* de projeção, formando o ponto *a'*. No plano *V*, *H_A* indica a altura do ponto *A* no espaço com respeito ao plano *H* e, no plano *H*, *D_A* indica a distância entre o ponto no espaço *A* e o plano *V*. Como temos que representar sobre um plano de desenho tudo o que temos no espaço, temos que fazer coincidir o plano de desenho com o plano *H* de projeção, fazendo coincidir também o plano *V* de projeção em toda sua totalidade com o plano *H*, fazendo-o girar em volta da linha de terra *L-T*.

Na figura 4 representou-se o plano de desenho com as projeções horizontal e vertical do ponto *A*. De ambas as partes da linha de terra *L-T* aparecem as parcelas de plano correspondentes às projeções horizontal e vertical. O que representarmos sob a linha de terra *L-T* — neste caso o ponto *a*

(projeção horizontal) — chama-se *vista em planta* e a projeção vertical a' (por cima da $L-T$) se denomina vista de *elevação*.

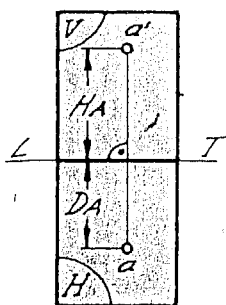


Figura 4

Para vermos como se pode determinar o ponto A no espaço, conhecendo as vistas em *planta* e a *elevação* (fig. 4), procederemos da seguinte maneira: a partir da $L-T$ se coloca o plano V de projeção perpendicularmente ao plano do desenho, ou seja, ao plano H de projeção; depois levanta-se desde o ponto a uma perpendicular ao plano H e desde a' outra perpendicular ao plano V . Então veremos que estas duas perpendiculares se cortam em um único ponto do espaço, sendo este o ponto A .

Na figura 5 temos uma perspectiva do ponto A no espaço que fica situado no plano V de projeção; assim, com a representação sobre o plano de

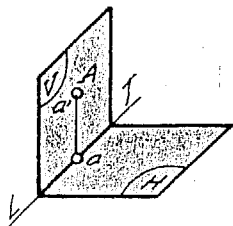


Figura 5

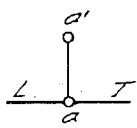


Figura 6

desenho (fig. 6), a projeção horizontal a fica na linha de terra $L-T$. Pela figura 6 sabemos que o ponto A do espaço está sobre o plano vertical porque a distância da $L-T$ à projeção horizontal a é zero. Nas figuras 7 e 9 temos o ponto A do espaço

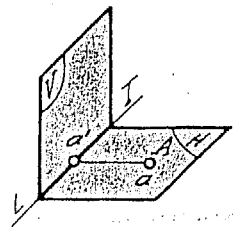


Figura 7

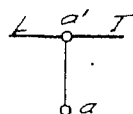


Figura 8

sobre o plano H e sobre a $L-T$, respectivamente e nas figuras 8 e 10 suas correspondentes representações diédricas.

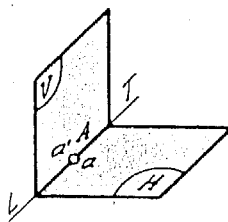


Figura 9

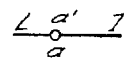


Figura 10

Projeções da reta. A reta é representada por dois de seus pontos; logo, cada uma de suas projeções será uma reta (menos quando a reta for de ponta). Na figura 11 se dá uma perspectiva de uma reta $A-B$ no espaço. Observemos que o ponto A fica em altura maior do plano H de projeção que o ponto B e observemos que o ponto B dista mais do plano V de projeção que o ponto A .

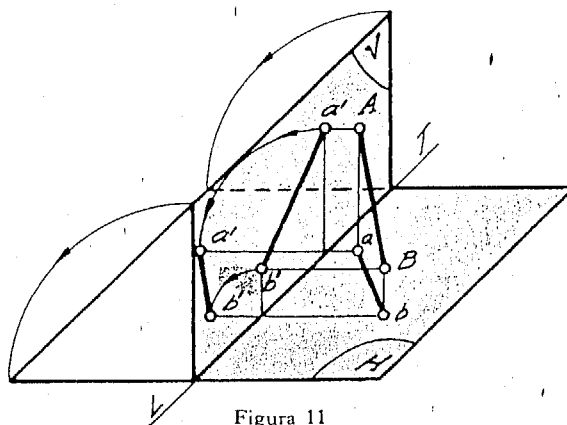


Figura 11

O mesmo se deduz de sua representação em plano (fig. 12), pois o ponto a' está a uma altura maior da $L-T$ que o ponto b' , e o ponto b está mais distanciado da $L-T$ que o ponto a . Recorde-mos que a vista em *elevação* nos indica as alturas dos pontos das figuras no espaço com respeito ao plano H de projeção e a vista em *planta* nos indica as distâncias existentes desde os pontos das figuras até o plano V de projeção.

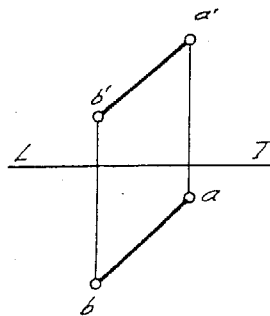


Figura 12

Linhas da reta. As interseções de uma reta com os planos de projeção chamam-se *linhas*. Na figura 13 temos uma perspectiva da reta $A-B$ no espaço, cujas pontas prolongamos até cortar os planos de projeção, formando-se assim, a *linha* horizon-

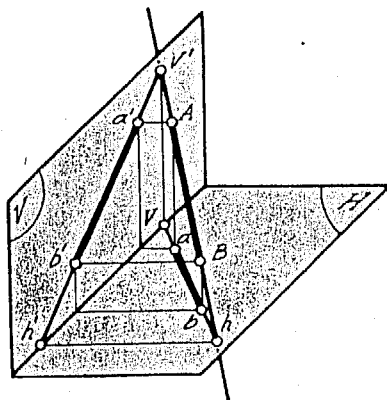


Figura 13

tal h e a *linha* vertical v' . Para compreender perfeitamente este fato, dá-se uma vista em perspectiva de várias retas (fig. 15) e sua correspondente representação em plano (fig. 16). A reta $A-B$ cha-

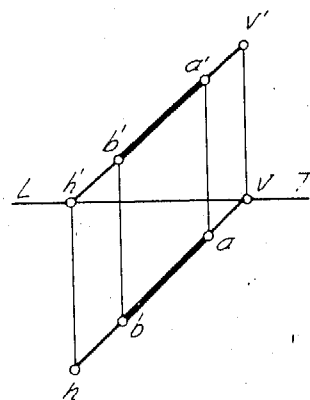


Figura 14

ma-se de *topo* por ser perpendicular a um dos planos de projeção, no caso o plano H , estando sua verdadeira grandeza na projeção vertical $a'-b'$, sendo a sua projeção horizontal um ponto $a \cdot b$.

ambos os lados de sua projeção, até cortar a $L-T$ em h' e v ; desde estes pontos traçam-se perpendiculares à $L-T$, determinando sobre os prolongamentos das retas projetadas os pontos h e v' , sendo estas as linhas horizontal e vertical respectivamente da reta $A-B$ do espaço. (As linhas horizontal e vertical da reta em suas projeções são representadas pelas letras $h-h'$ e $v-v'$, respectivamente).

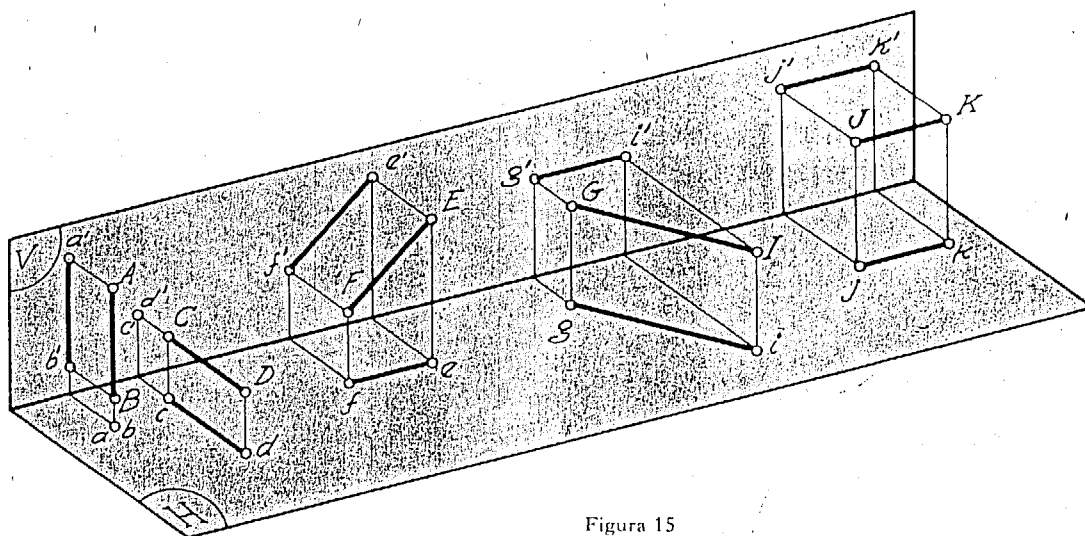


Figura 15

A reta $C-D$ também se chama *de ponta*, por ser perpendicular ao plano V de projeção. Sua verdadeira grandeza é representada na projeção horizontal $c-d$.

Por ser a reta $E-F$ paralela ao plano V , a sua projeção vertical $e'-f'$ representa sua verdadeira grandeza, já que a projeção horizontal $e-f$ é paralela a $L-T$. Esta reta é chamada de *frontal* ou *vertical*.

Como a reta $G-I$ é paralela ao plano H de projeção, está em sua verdadeira grandeza em sua projeção horizontal $g-i$ por ser sua projeção verti-

Particularidade da reta. Para que a reta seja representada em sua verdadeira grandeza em uma

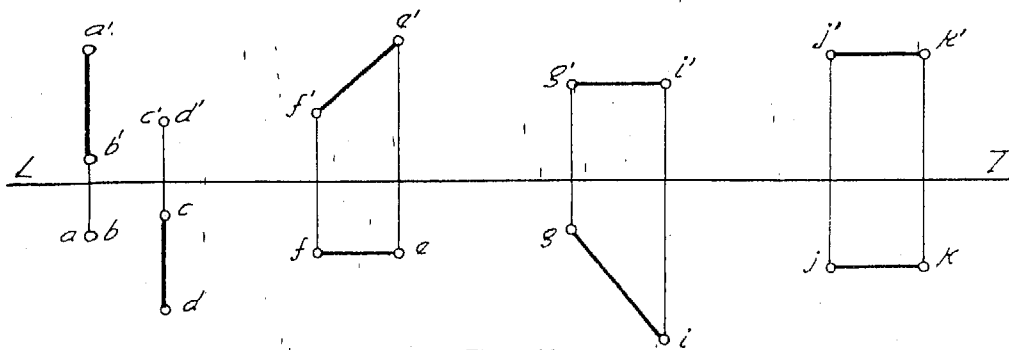


Figura 16

cal $g'-i''$ paralela a $L-T$. A reta em questão é chamada de *reta horizontal*.

Quando a reta for paralela aos dois planos de projeção, como ocorre com a reta $J-K$, estará em sua verdadeira grandeza nas suas duas projeções. Esta reta é chamada de *reta paralela à linha de terra*.

tersecção formadas pelo plano com os planos de projeção; estas linhas são chamadas P (linha horizontal) e P_1 (linha vertical). Na figura 19 é dada a perspectiva de um exemplo para determinar as linhas do plano formado pelos pontos $A-B-C$ até

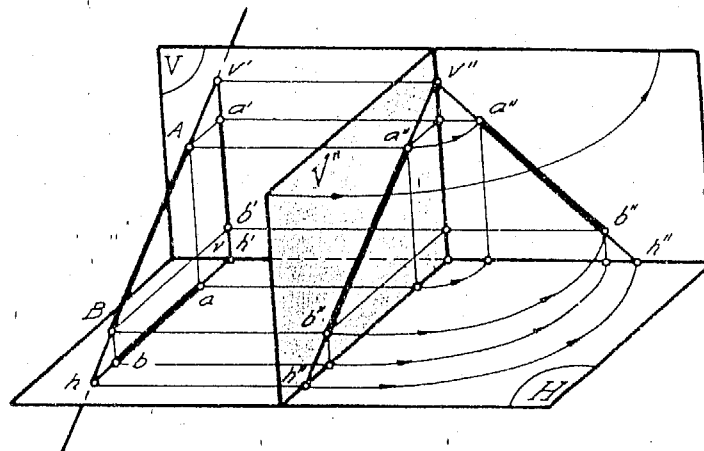


Figura 17

Reta de perfil. A *reta de perfil* é a que, representada no plano de desenho, é perpendicular à $L-T$ em suas duas projeções. Para determinar suas linhas recorre-se a um segundo plano V'' , de projeção perpendicular a $L-T$, e que se faz coincidir com o plano V de projeção e ao mesmo tempo faz-se girar estes em redor da $L-T$, até coincidir com o plano H de projeção determinando as vistas de *planta*, *elevação* e *perfil*.

Na figura 17 é dada uma perspectiva da reta $A-B$, cujas pontas foram prolongadas para determinar as linhas $h-v'$. Na figura 18 temos sua representação sobre o plano de desenho e a forma de determinar a vista de *perfil* para achar as linhas da reta em questão.

Representação do plano. O plano é determinado no mínimo por três pontos e suas projeções são representadas pelas linhas. Estas são as retas de in-

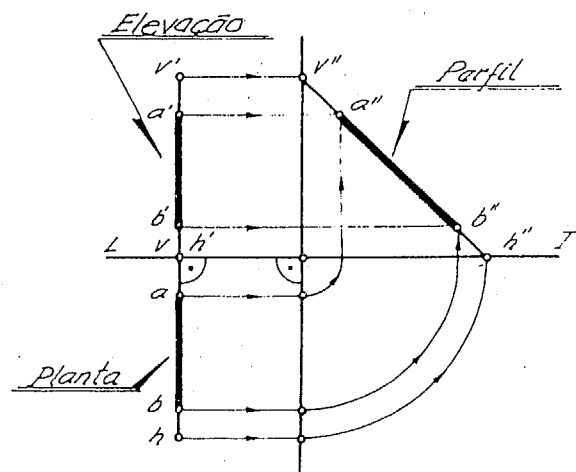


Figura 18

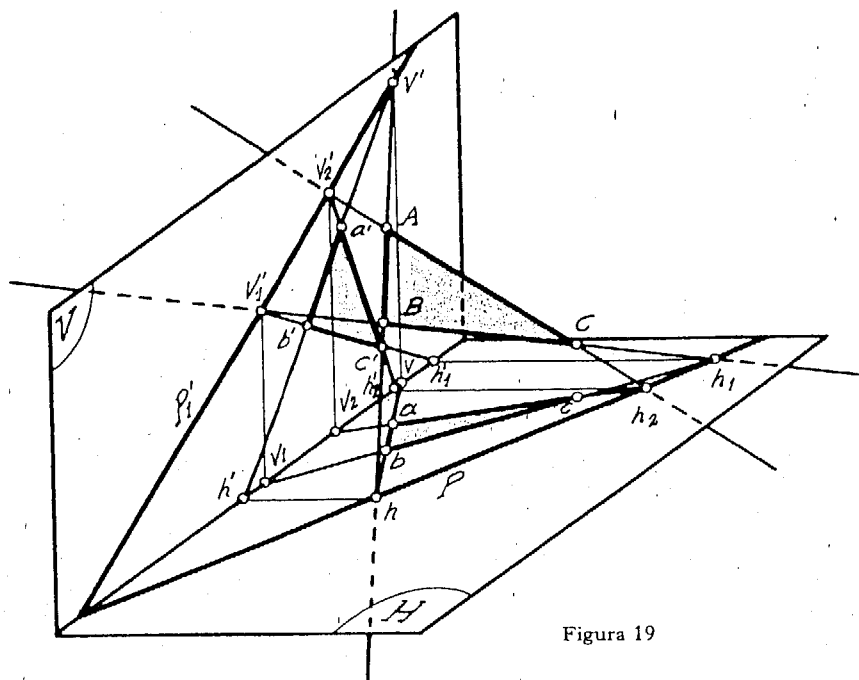


Figura 19

cortar os planos de projeção, obtendo-se as linhas $h-h_1-h_2$ horizontais destas retas e as verticais $v'-v'_1-v'_2$. Se unirmos os pontos destas linhas por meio de retas, determinaremos as linhas $P-P'_1$ do plano que passa pelos pontos $A-B-C$.

A figura 20 mostra a representação no plano das projeções $a-b-c$ e $a'-b'-c'$ dos pontos $A-B-C$ do espaço e as linhas $P-P'_1$ do plano que passam por estes pontos. As linhas do plano sempre são cortadas em um mesmo ponto da $L-T$.

Nas figuras 21 e 22 dá-se a vista em perspectiva de um plano qualquer P e sua representação em

plano, representada pela linha de terra $L-T$ e pela linha horizontal P e vertical P'_1 do plano.

Plano formado por duas retas que se cortam.
Para que duas retas se cortem, estando represen-

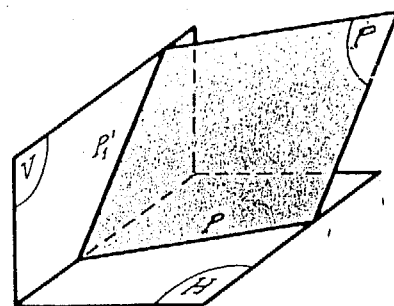


Figura 21

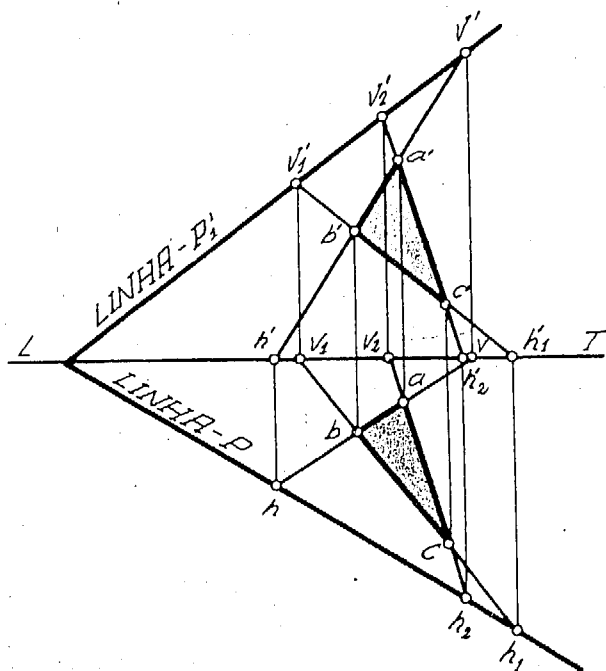


Figura 20

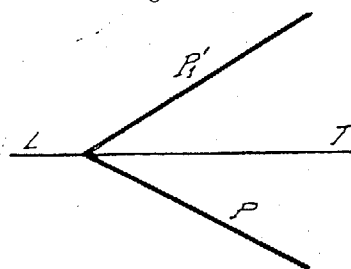


Figura 22

tadas por suas projeções $r-r'$ e $l-l'$ (fig. 23), é imprescindível que as duas projeções homônimas se cortem nos pontos $a-a'$, sendo estes as projeções do ponto de intersecção das duas retas no espaço. As linhas $h-h'$, $v-v'$, $h_1-h'_1$ e $v_1-v'_1$ são determinadas da mesma forma que se explicou para achar as linhas da reta da figura 14. Unindo os pontos $h-h_1$ e $v'-v'_1$ por meio das retas, determinaremos

os pontos $P-P_1$ do plano que passa pelas duas retas que se cortam.

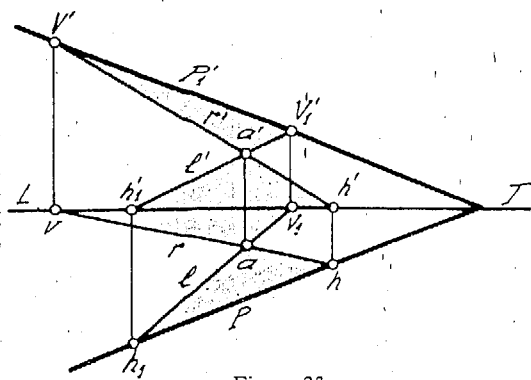


Figura 23

Plano determinado por um ponto e uma reta. Se temos as projeções do ponto $a-a'$ e da reta $r-r'$ (fig. 24), escolhemos um ponto $b-b'$ qualquer da reta e unimo-la com $a-a'$, formando-se assim uma nova reta $l-l'$; depois se acham as linhas das retas $r-r'$ e $l-l'$, como se explica na figura 14, obtendo-

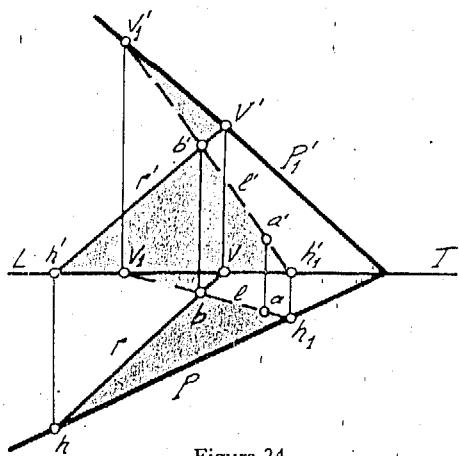


Figura 24

se as linhas $h-h'$, $v-v'$, $h_1-h'_1$ e $v_1-v'_1$, pelas quais passam as linhas $P-P_1$ do plano em questão.

Vertical do plano. A vertical ou frontal do plano (fig. 25) é a reta F de um plano qualquer $P-P_1$ que mantém uma distância constante com respeito ao plano vertical de projeção. Na figura 26 dá-se a representação da vertical do plano $P-P_1$ em

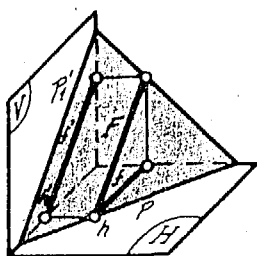


Figura 25

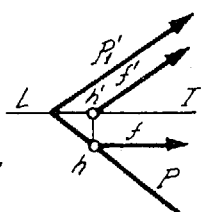


Figura 26

suas projeções $f-f'$, sendo f' paralela à linha P_1 e f paralela a $L-T$.

Horizontal do plano. A horizontal do plano (figs. 27 e 28) é a inversa da vertical, ou seja, é a reta que está em um plano qualquer, mantendo-se todos os seus pontos na mesma altura do plano H de projeção.

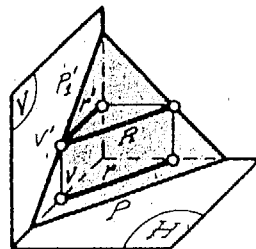


Figura 27

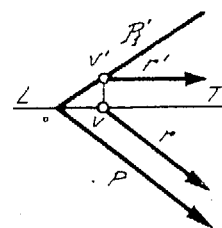


Figura 28

Situação de um ponto em um plano. Tendo-se linhas $P-P_1$ do plano (fig. 29) e a projeção horizontal do ponto a , traça-se uma reta que seja paralela a $L-T$ e que corte a linha P em h . Traça-se desde h uma perpendicular a $L-T$, obtendo-se o ponto h' e desde esse ponto se traça uma paralela

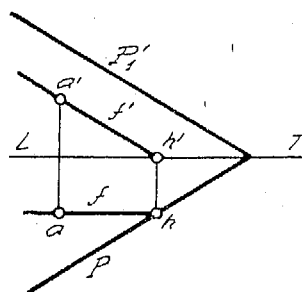


Figura 29

à linha P_1 ; desta forma se constrói uma vertical ou frontal do plano, sendo esta $f-f'$. Como o que queremos é colocar o ponto a no plano, traçamos desde a uma perpendicular a $L-T$, cortando a reta f' em a' , ficando colocado assim o ponto no plano, já que a reta $f-f'$ é uma vertical do plano.

Pode-se também colocar o ponto no plano, fazendo passar por ele uma horizontal do plano, seguindo o mesmo procedimento descrito para a vertical.

Colocar uma vertical em um plano dado por duas retas que se cortam. A uma distância qualquer da $L-T$ (fig. 30), traça-se uma reta f paralela a $L-T$ que corte as retas r e l por $b-c$. Desde b e c traçam-se perpendiculares a $L-T$, cortando as retas r' e l' em b' e c' . Unindo estes pontos por meio da reta f' , ficaria determinada a vertical desejada.

Situação de uma reta qualquer em um plano. Estando o plano representado por suas linhas $P-P_1$ (fig. 31), traça-se uma reta r qualquer, determinando os pontos h e v ; a partir destes traçam-se perpendiculares a $L-T$; cortando-a em h' e à linha P_1 em v' , estes pontos e unem por meio da reta r' , ficando assim colocada a reta no plano.

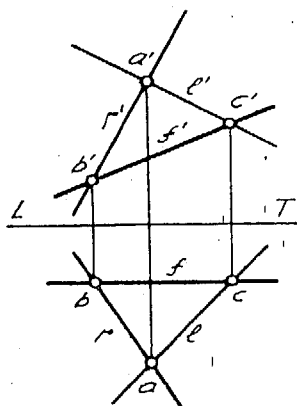


Figura 30

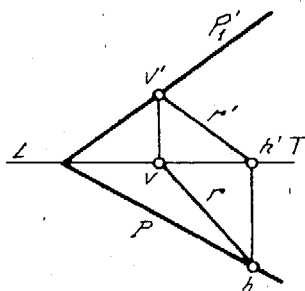


Figura 31

Planos principais. Existem vários planos que são muito importantes para a resolução de muitíssimos problemas que poderão aparecer. São os seguintes:

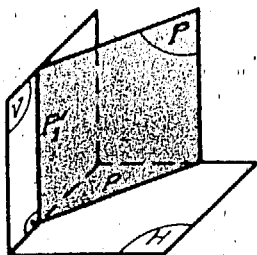


Figura 32

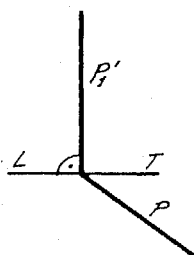


Figura 33

Plano projetante horizontal. Este plano P (figuras 32 e 33) é perpendicular ao plano H de projeção e tem sua linha vertical P_1 perpendicular a $L-T$ e pela linha horizontal P , uma reta qualquer. Tudo o que é contido neste plano é projetado horizontalmente, conforme a sua linha horizontal P , ou seja, poderia confundir-se com a mesma.

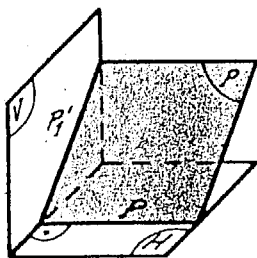


Figura 34

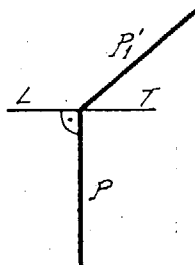


Figura 35

Plano de canto ou projetante vertical. Este plano P (figs. 34 e 35) é perpendicular ao plano V de projeção e tem sua linha horizontal P , perpendicular a $L-T$, sendo qualquer uma a sua linha vertical P_1 . Tudo o que é contido no plano é projetado verticalmente, segundo sua linha vertical P_1 .

Plano de perfil. Este plano (figs. 36 e 37) é perpendicular aos dois planos de projeção e tem suas duas linhas P e P_1 perpendiculares a $L-T$. Todas as figuras que incluem este plano são projetadas sobre suas linhas; por exemplo, se a figura fosse uma circunferência suas duas projeções seriam duas retas.

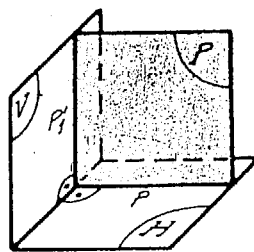


Figura 36

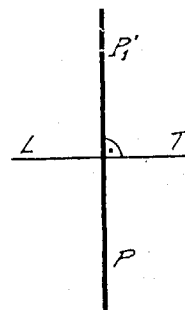


Figura 37

Plano paralelo à linha de terra. O plano paralelo a $L-T$ (figs. 38 e 39) é o que tem suas linhas $P-P_1$ paralelas a $L-T$.

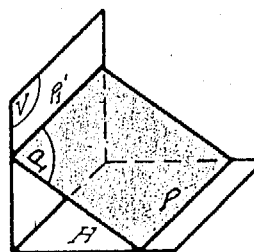


Figura 38

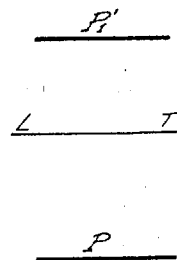


Figura 39

Plano paralelo à vertical de projeção. Este plano (figs. 40 e 41) só tem a linha horizontal P que é paralela a $L-T$.

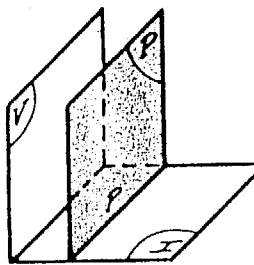


Figura 40

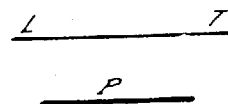


Figura 41

Plano paralelo à horizontal de projeção. Como vemos nas figuras 42 e 43, este plano carece de linha horizontal e só tem a vertical P'_1 que é paralela a $L-T$.

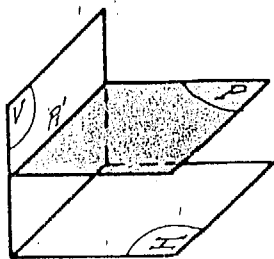


Figura 42

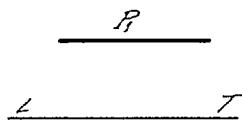


Figura 43

Projeções de um triângulo. Nas figuras 44 e 45 temos um triângulo que está incluído em um plano projetante horizontal, tendo por projeção horizontal a reta $a-b-c$ e por projeção vertical o triângulo $a'-b'-c'$.

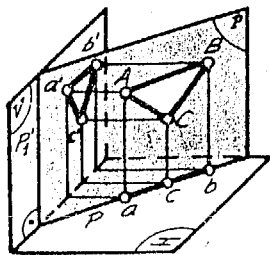


Figura 44

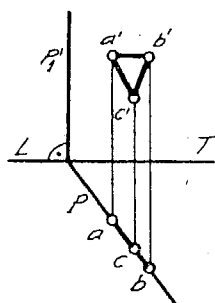


Figura 45

O triângulo $A-B-C$ (fig. 46) está incluído em um plano projetante vertical e, assim, a projeção horizontal do triângulo $A-B-C$ (fig. 47) é o triângulo $a-b-c$ e a vertical, a reta $a'-b'-c'$.

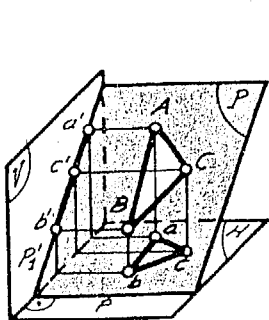


Figura 46

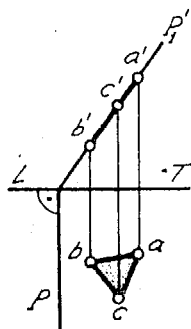


Figura 47

Intersecções de planos. A figura 48 dá uma perspectiva dos planos de projeção $H-V$ e, os planos P e Q , cuja intersecção queremos determinar. Para determinar a reta de intersecção vamos usar os planos de projeção $H-V$. No plano de projeção

H temos as linhas P e Q que formam o ponto de intersecção $h-h'$, e no vertical de projeção temos as linhas P'_1 e Q'_1 e o ponto de intersecção das mesmas $v-v'$. A união dos pontos h e v' por meio

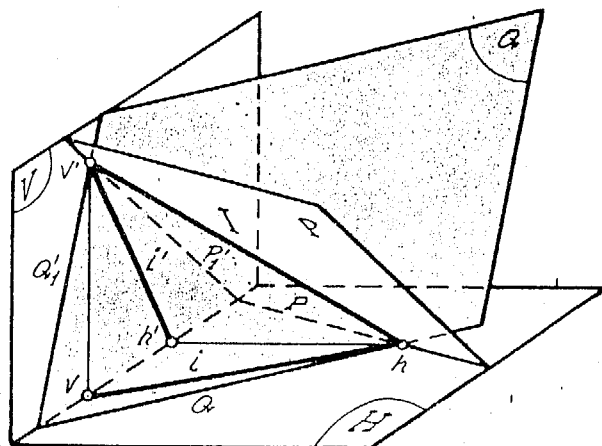


Figura 48

de uma reta nos daria a reta de intersecção I dos planos P e Q , sendo suas projeções $i-i'$ as retas de união dos pontos $h-v$ e $h'-v'$.

Na representação em plano (fig. 49) seguem-se as normas indicadas no espaço para determinar as projeções $i-i'$ da reta de intersecção dos dois planos.

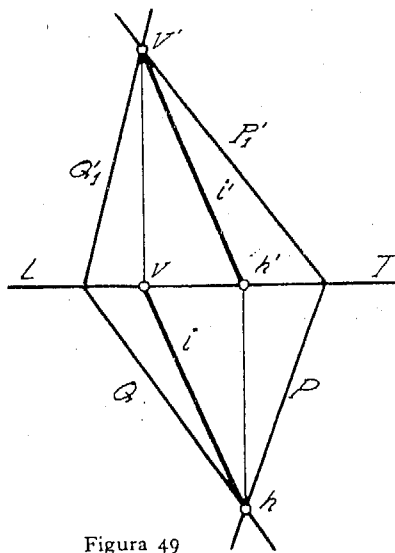


Figura 49

Intersecção de dois planos de linhas verticais paralelas. Os planos em questão são dados por suas próprias projeções $P-P'_1$ e $Q-Q'_1$ (fig. 50). No plano H de projeção temos o ponto de intersecção $h-h'$ e, no vertical, o ponto comum $v^\infty-v'^\infty$ e, assim, a reta de intersecção $i-i'$ é a vertical comum a estes dois planos.

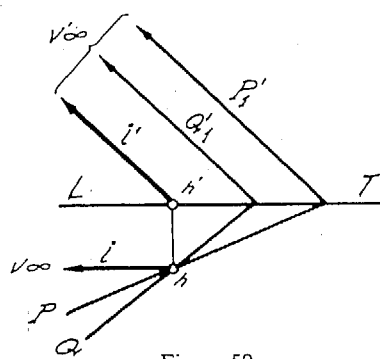


Figura 50

Intersecção de um plano paralelo a L-T com outro qualquer. Os pontos $P-P_1$ do plano paralelo a L-T (fig. 51) cortam as linhas $Q-Q_1$ do outro

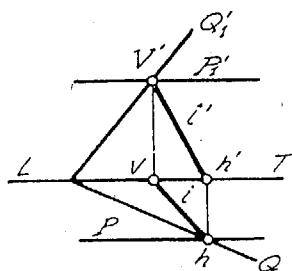


Figura 51

plano em $h-h'$ e $v-v'$; logo, a reta de intersecção projetada $i-i'$ são as retas que unem os pontos $h-v$ e $h'-v'$.

Intersecção de um plano projetante horizontal $Q-Q_1$ com outro $P-P_1$ paralelo a L-T. Como se

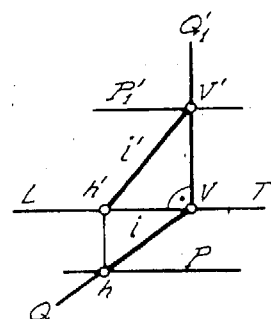


Figura 52

V_1 de projeção que é perpendicular ao plano H e forma por sua intersecção uma segunda linha de terra que denominaremos L_1-T_1 . As projeções b , b' foram determinadas projetando o ponto B perpendicularmente aos planos de projeção H e V .

Logo, o ponto B se projeta perpendicularmente ao segundo plano vertical V_1 de projeção, obtendo-se o ponto b'_1 (o ponto b e b_1 é comum para as duas projeções). É natural que a altura H_B dos pontos B , b' e b'_1 seja a mesma por serem todos os planos ortogonais. Faz-se coincidir os planos V e

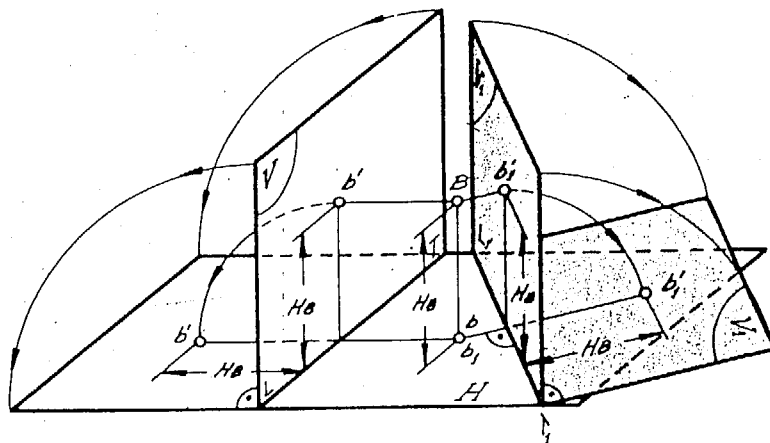


Figura 53

deduz da figura 52, a projeção da reta de intersecção i sobre o plano H se confunde com a linha Q do plano projetante horizontal. A projeção vertical i' é determinada unindo os pontos $h'-v'$.

V_1 com o plano H fazendo-os girar em redor de suas correspondentes linhas de terra, ficando representados sobre o plano de desenho, como mostra a figura 54.

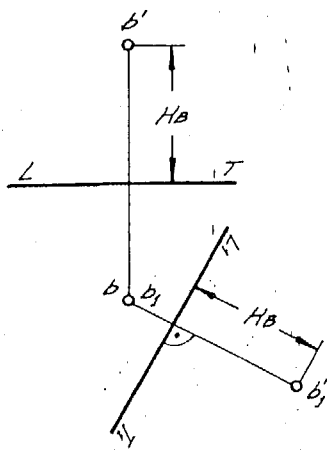


Figura 54.

V e sobre o segundo plano horizontal H_1 de projeção é como no caso anterior. Uma vez obtidas todas as projeções do ponto B (observe a vista em perspectiva) mantém-se fixo o plano de projeção V e se rebate o plano H_1 , fazendo-o girar em redor da segunda linha de terra L_1-T_1 ; depois se rebate o plano V até fazer com que coincida com o plano H , ou seja, com o plano de desenho, como se pode ver na figura 56.

Determinação da verdadeira grandeza de uma reta por mudança de plano vertical. Na figura 57 temos a perspectiva de uma reta qualquer $A-B$ que, em suas projeções com os planos H e V , determina as retas $a-b$ e $a'-b'$. Na reta $A-B$ situa-se um plano V_1 paralelo à mesma, determinando as

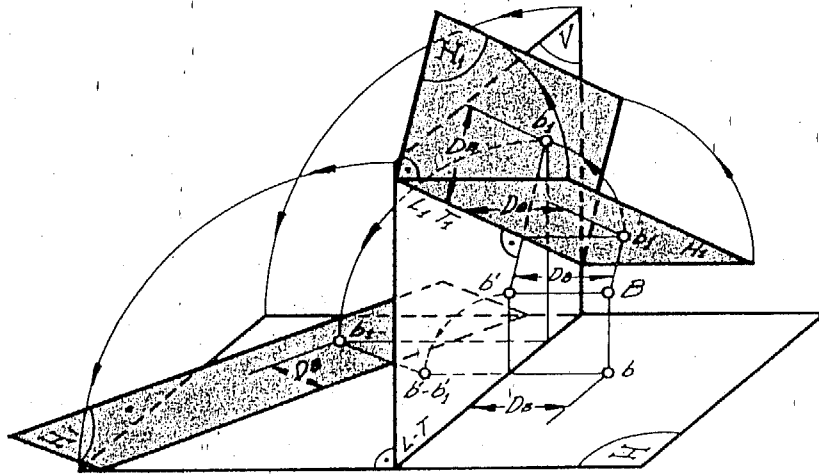


Figura 55

Mudança de plano horizontal (figs. 55 e 56). Este segundo plano H_1 que chamamos horizontal, não é horizontal, mas pode ser chamado assim por ser *ortogonal* ao plano V de projeção. A forma de projetar o ponto B sobre os planos de projeção H -

projeções a_1-b_1 e $a'_1-b'_1$, sendo esta uma reta *frontal* ou *vertical* e, portanto, está em sua verdadeira grandeza na projeção vertical segunda $a'_1-b'_1$.

Se conhecermos as projeções da reta $a-b$ e $a'-b'$

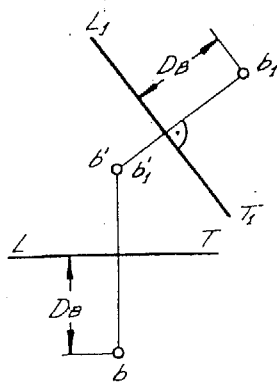


Figura 56

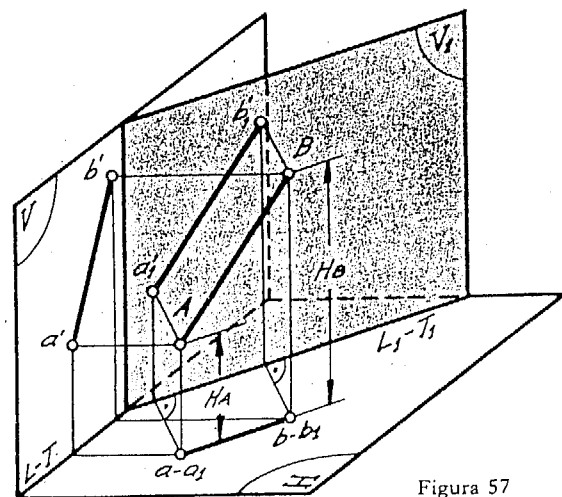


Figura 57

(fig. 58), podemos determinar a verdadeira grandeza da reta da seguinte forma:

A uma distância qualquer traçamos a segunda linha de terra, L_1-T_1 , paralela à reta projetada $a-b$ e, desde os pontos a e b da reta, traçamos perpendiculares a L_1-T_1 , dando a partir da L_1-T_1 as alturas H_A e H_B , respectivamente, tomadas da vista em elevação, determinando os pontos $a'_1-b'_1$

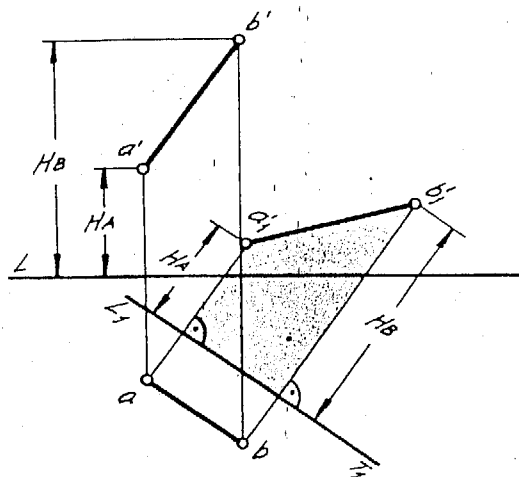


Figura 58

que se unem por meio de uma reta, sendo esta a verdadeira grandeza.

Verdadeira grandeza de uma reta por mudança de plano horizontal (fig. 59). Este caso pode ser resolvido como o da figura 58. Traça-se uma nova linha de terra L_1-T_1 paralela à reta $a'-b'$. Depois projetam-se as extremidades desta $a'-b'$, perpendicularmente a L_1-T_1 , dando-lhes as distâncias D_A-D_B tomadas da vista em planta. Assim se obtêm os pontos $a'_1-b'_1$ que se unem por meio de uma reta, sendo esta a verdadeira grandeza.

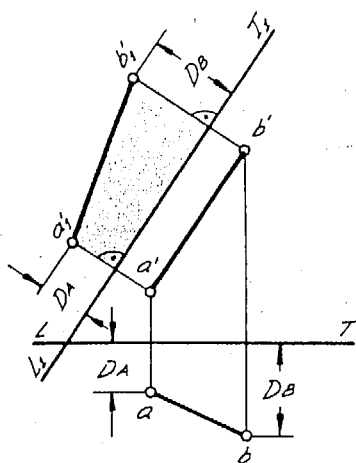


Figura 59

Projeção de um ponto de uma reta sobre a verdadeira grandeza da mesma (fig. 60). A verdadeira grandeza da reta foi determinada pela mudança de plano vertical, sendo esta a projeção $a'_1-b'_1$. O ponto c , que queremos situar sobre a reta projetada em sua verdadeira grandeza $a'_1-b'_1$, projeta-se perpendicularmente a L_1-T_1 , determinando sobre a reta o ponto c'_1 , sendo esta a sua situação.

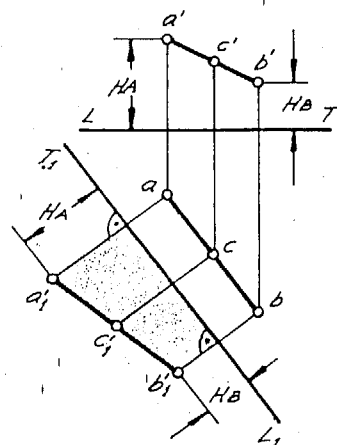


Figura 60

Projeção de uma reta sobre um plano vertical qualquer (fig. 61). A linha de terra L_1-T_1 do plano, sobre o qual vamos projetar a reta $a-b$, tem a posição que escolhermos. Desde as extremidades da reta $a-b$ traçam-se perpendiculares a L_1-T_1 , dando-lhes as distâncias H_A-H_B , determinan-

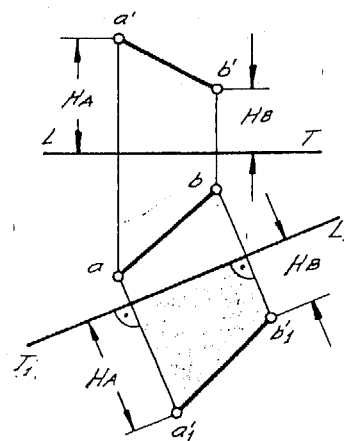


Figura 61

do os pontos $a'_1-b'_1$. Estes pontos são unidos por meio de uma reta, sendo esta a nova posição da reta que nos interessa sem estar na verdadeira grandeza.

Rebatimentos. Rebater um plano sobre outro é fazer o primeiro coincidir sobre o segundo, fazendo-o girar em redor de sua reta de intersecção que

recebe o nome de *charneira*. Sempre se toma como plano de rebatimento o plano de representação ou de desenho, pois desta forma obteremos sobre o mesmo a verdadeira grandeza de tudo o que for contido pelo plano rebatido.

Rebatimento de um ponto A . Quando falamos em rebater um ponto ou uma reta, referimo-nos ao plano que passa por eles, visto que só se pode rebater um plano sobre outro.

Na perspectiva (fig. 62) temos o ponto A , cuja projeção *ortogonal* sobre o plano de rebatimento Q é a . Queremos rebater o plano P que passa pelo ponto A . Toma-se como eixo de rotação do plano P a *charneira*.

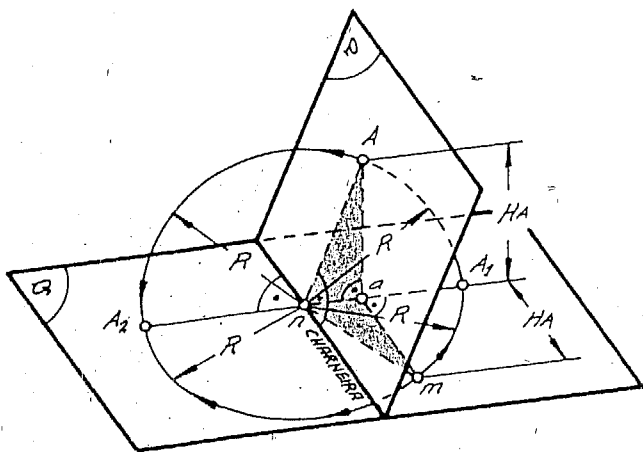


Figura 62

O ponto A descreve no espaço uma semicircunferência, cujo plano é perpendicular à *charneira*; e seu raio R é igual à distância existente desde o ponto A até o ponto n , sendo este ponto o centro da semicircunferência. O raio R é a *hipotenusa* do triângulo retângulo $A-a-n$.

O plano da circunferência descrita pelo ponto A tem por linha a reta A_1-A_2 , sendo esta perpendicular à *charneira*. Como a projetante $A-a$ é perpendicular ao plano Q , assim como o plano da semicircunferência, vemos que as retas $A-a$ e $A-n$ se acham no plano da circunferência.

O triângulo $A-a-n$, coincidindo com o plano de desenho, ocuparia a posição $a-n-m$, sendo a *hipotenusa* do triângulo retângulo $a-n-m$ igual ao raio R que, descrevendo um arco com este raio em ambas as partes de m e de centro n , determinaria os pontos A_1 e A_2 . Estes dois pontos seriam as posições que o ponto A ocuparia ao se rebater o plano P em ambas as partes da *charneira*.

Representação de um ponto rebatido em plano. A norma que se deve seguir para representar um ponto rebatido é a seguinte:

Utiliza-se um dos planos de projeção H ou V como plano de rebatimento que é neste caso o plano H (fig. 63), e se toma como *charneira* a linha P do plano que queremos rebater. Desde o ponto a traça-se uma paralela à *charneira*. A partir do ponto a tem-se sobre a paralela a altura H_A , tomada da vista em *elevação*, obtendo-se o ponto m . Tam-

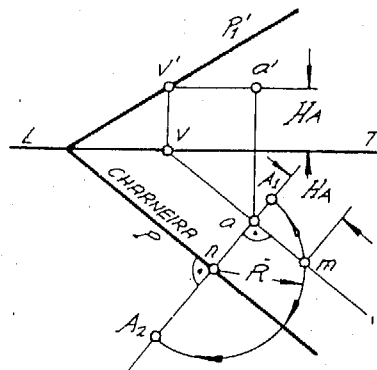


Figura 63

bém, desde a se traça uma perpendicular à *charneira*, que marca sobre ela o ponto n . Tomando este ponto como centro, descreve-se um arco que parte de m e marca sobre a perpendicular os pontos A_1-A_2 , sendo esta a posição do ponto rebatido.

A figura 64 representa o plano $P-P_1$ que contém o ponto $a-a'$ que rebatemos em redor de sua linha vertical P_1 , sendo ao mesmo tempo a *charneira*. Neste caso o plano de projeção V serve de

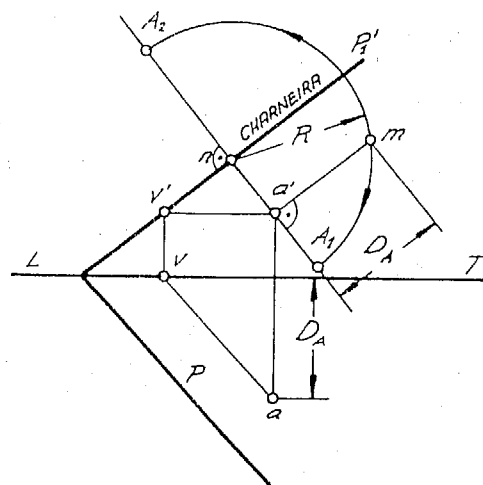


Figura 64

plano de rebatimento; como se deduz pelo desenho, os pontos A_1-A_2 são determinados conforme as normas expostas no exercício anterior.

Medição de ângulos por rebatimentos. Na perspectiva (fig. 65) são dadas duas retas, R e S , que são projetadas em seus respectivos planos de proje-

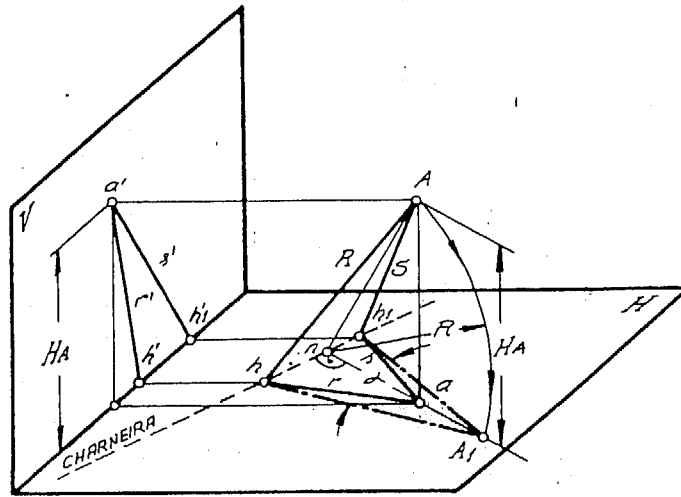


Figura 65

ção H e V , sendo as projeções as retas $r-r'$ e $s-s'$, e o ponto de intersecção das mesmas $a-a'$. O método consiste em fazer coincidir por rebatimento o plano que passa pelas retas R e S com o plano de rebatimento que, neste caso, é o plano de projeção H , sendo a *charneira* a linha do plano que passa pelas retas com o plano H . Para determinar a *charneira* unem-se entre si por meio de uma reta as linhas $h-h_1$ das retas dadas com o plano H de projeção.

Uma vez conhecido o ponto a (projeção horizontal do vértice A do ângulo), rebata-se o ponto A , obtendo-se o ponto A_1 que é unido com os pontos fixos $h-h_1$ da *charneira* correspondentes às retas R e S . Desta forma determinamos o ângulo a que procuramos.

A representação em plano das duas retas $R-S$ do espaço e seu rebatimento se faz da mesma forma mostrada na figura 66. Conhecendo as retas projetadas $r-r'$ e $s-s'$, suas linhas $h-h'$, $h_1-h'_1$ e as projeções do vértice $a-a'$, unem-se as linhas $h-h_1$

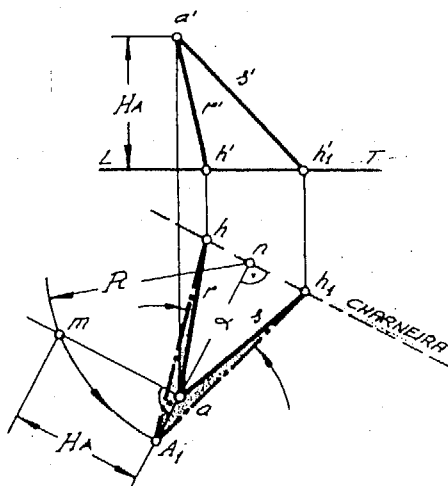


Figura 66

das retas, obtendo-se a *charneira*. A seguir, e desde o ponto a , traça-se uma perpendicular à *charneira*, determinando o ponto de intersecção n . Também desde o ponto a se traça uma paralela à *charneira*, dando-lhe a distância H_A , tomada da vista em elevação, formando-se assim o ponto m . Com centro em n e raio $R = nm$, descreve-se um arco até cortar a perpendicular à *charneira*, determinando o ponto A_1 que, unido com os pontos $h-h_1$, determinará as verdadeiras magnitudes das retas e o ângulo a que procuramos.

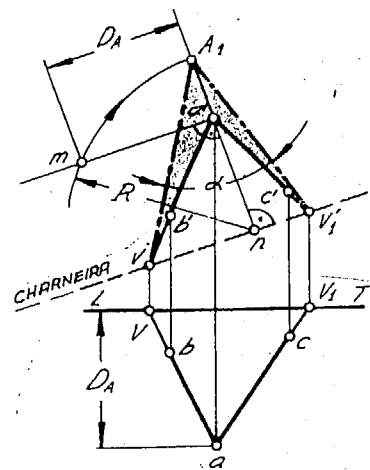


Figura 67

Ângulo formado por duas retas que se cortam, rebatidas sobre o plano V de projeção. As projeções das retas $a-b$, $a'-b'$ e $a-c$, $a'-c'$ (fig. 67), são prolongadas determinando as linhas verticais $v-v'$ e $v_1-v'_1$. Unem-se as linhas v' e v'_1 por meio de uma reta que é ao mesmo tempo a *charneira*. Para achar o ângulo a seguiremos o mesmo procedimento do caso anterior.

Bissetriz do ângulo formado por duas retas. Neste caso (fig. 68) aproveitamos um segundo plano vertical que só tem linha horizontal P e corta o ângulo de projeção horizontal $a-b-c$ em v e v_1 ; estes pontos, projetados sobre a vista em *elevação*, determinam os pontos v' e v'_1 , pelos quais passa a *charneira*. Paralelamente a esta se traça uma reta passando por a' , dando-lhe a partir deste ponto a

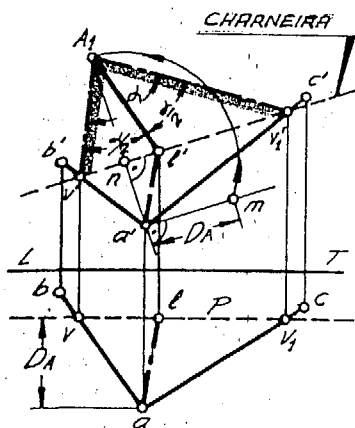


Figura 68

distância D_A , obtendo-se o ponto m . Tomando como centro o n , traça-se um arco de raio R , partindo de m e cortando a perpendicular em A_1 (obtem-se n projetando o ponto a' perpendicularmente à *charneira*).

O ponto A_1 une-se com v' e v'_1 , formando-se o ângulo a onde se traça a bissetriz que corta a *charneira* em l' . Une-se l' com a' , determinando desta maneira a bissetriz em sua projeção vertical; a seguir une-se l (projeção homônima de l') com a , sendo esta a projeção horizontal da bissetriz.

Ângulo formado por duas retas quando uma delas é prolongada pelo vértice (fig. 69). Conhecendo as projeções do ângulo $a-b-c$ e $a'-b'-c'$, prolongam-se as retas $a-b$, $c-a$, $a'-b'$ e $c'-a'$, determinando as primeiras sobre a $L-T$, os pontos $v-v_1$ (linhas verticais das retas), sendo suas projeções homônimas $v'-v'_1$, pelas quais passa a *charneira*. O ponto A_1 é determinado como nos casos anteriores, sendo o ângulo a que procuramos o que é formado pela reta $A_1-v'_1$ e a prolongação da reta $v'-A_1$.

Verdadeira grandeza das figuras contidas por um plano projetante vertical, por seu rebatimento. A figura 70 nos dá a representação em plano das projeções de um triângulo $a-b-c$ e $a'-b'-c'$ e as linhas $P-P_1$ do plano projetante vertical. Este plano poderá ser abatido à esquerda ou à direita de sua *charneira*, pois em qualquer uma destas par-

tes teremos a verdadeira grandeza do triângulo; neste caso, o rebatimento será nas duas partes.

Traçam-se desde os pontos $a-b-c$ perpendiculares à linha P que, neste caso, serve de *charneira*; depois descrevem-se arcos partindo de $a'-b'-c'$ e em ambas as partes dos mesmos, com centro comum, igual ao ponto de intersecção das linhas $P-P_1$ com a $L-T$, determinando sobre esta os pontos de intersecção $a'_1-b'_1-c'_1$ (parte esquerda) e $a'_2-b'_2-c'_2$ (parte direita); traçando perpendiculares à $L-T$ desde estes pontos, determinamos sobre as perpendiculares à *charneira* os pontos $a_1-b_1-c_1$ e $a_2-b_2-c_2$. Estes pontos são unidos por meio de retas que limitam o triângulo em sua verdadeira grandeza.

Na figura 71 temos uma circunferência em suas projeções $a'-b'-c-d-o$ e $a'-b'-c'-d'-o'$ e o plano projetante vertical $P-P_1$.

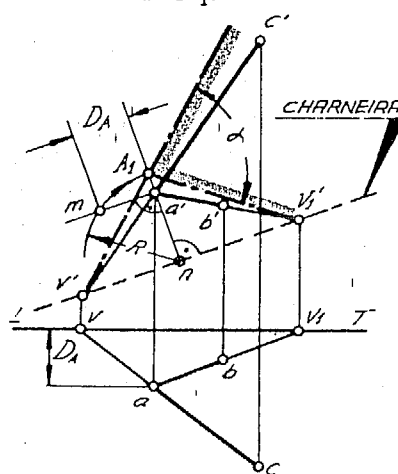


Figura 69

Para achar a verdadeira grandeza da circunferência, segue-se o mesmo método exposto anteriormente para a fig. 70.

Quando as figuras cuja verdadeira grandeza procuramos, estiverem em planos projetantes horizontais, procede-se da mesma maneira, pois, sempre se traçam na vista da *charneira*, perpendiculares à mesma e, na outra vista, os arcos.

Ângulo formado por dois planos (fig. 72). Para medir o ângulo formado por dois planos P e Q , estes são seccionados perpendicularmente à reta de intersecção por um terceiro plano S , sendo o ângulo que procuramos o que é formado pelas retas de intersecção dos planos P e Q com o plano S , sendo este o ângulo formado pelas retas $g-h$ e $g-i$.

Na representação em plano (fig 73) são dados os planos pelas projeções de suas linhas $P-P_1$ e $Q-Q_1$ e a reta de intersecção $I-I'$; o método que segue é:

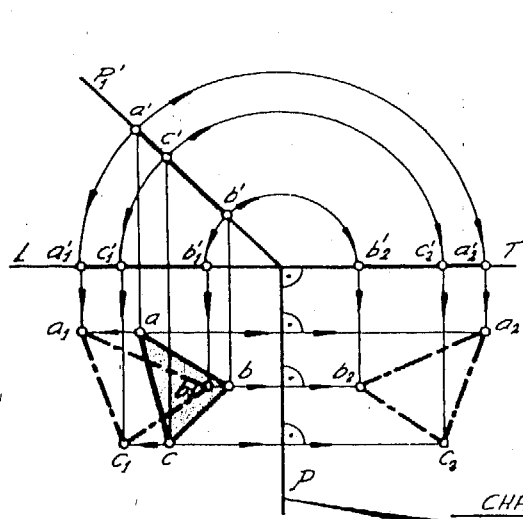


Figura 70

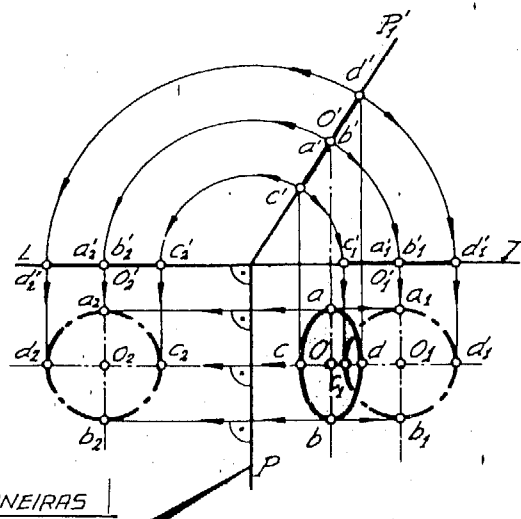


Figura 71

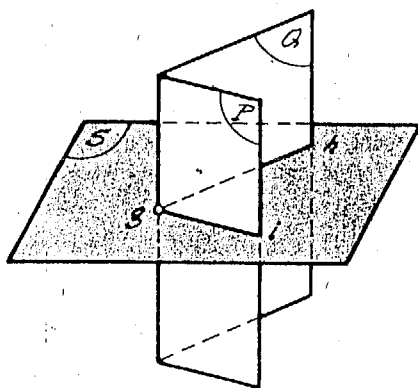


Figura 72

Nota. No ponto v traça-se uma perpendicular à reta de intersecção I e, com centro no mesmo ponto, descreve-se um arco, partindo do ponto v' e cortando a perpendicular em v'_1 ; unindo v'_1 com h_1 determina-se a verdadeira grandeza da reta de intersecção h_1-v_1 . Em uma posição qualquer traça-se uma perpendicular à reta de intersecção I ,

cortando-a em $h'-i'$ e cortando as linhas $P-Q$ em $h-i$. Desde o ponto $h'-i'$ traça-se uma perpendicular à reta $h_1v'_1$, determinando o ponto g' ; este é projetado perpendicularmente à reta de intersecção I , formando o ponto g . Une-se o ponto g com $h-i$, formando-se o ângulo em projeção formado pelo plano que secciona os outros dois. Como o que procuramos é o ângulo formado pelos dois planos $P-Q$ entre si, o processo para achá-lo é o seguinte:

Descreve-se um arco de centro $h'-i'$ e que parta de g' e corte a reta de intersecção I em g_1 . Une-se este ponto com os pontos $h-i$, determinando desta maneira o ângulo a que procuramos.

Ângulo formado por dois planos de uma tremonha (fig. 74). Na Figura 74 representam-se as projeções de duas chapas planas $a-b-d-e$, $a-c-d-f$ e $a'-b'-c'-d'-e'$, $a'-c'-d'-f'$, de uma tremonha qual-

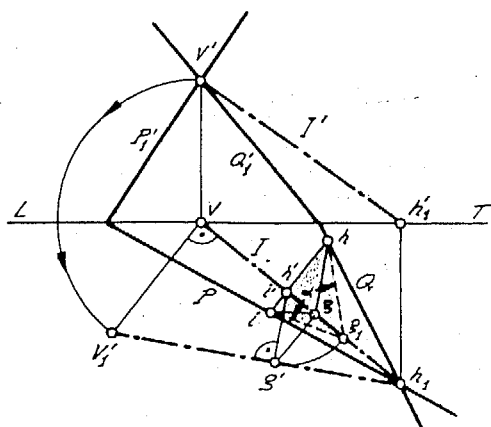


Figura 73

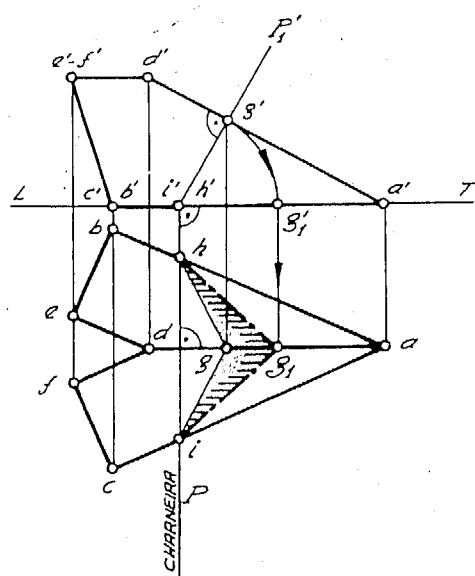


Figura 74

quer, cuja aresta (reta de intersecção) se vê com a verdadeira grandeza na vista em *elevação* $a'-d'$, por estar na projeção horizontal, $a-d$, paralela a $L-T$. O método a seguir para achar o ângulo formado pelas duas chapas planas é o seguinte:

Os planos formados pelas chapas em questão são seccionados por meio de um plano projetante vertical $P-P_1$, cuja linha vertical P_1 , é perpendicular à aresta $a'-d'$, determinando na vista em *planta* o ângulo formado pelas retas $g-h$, $g-i$ e, na vista em *elevação*, as retas $g'-h'$, $g'-i'$ que se confundem entre si, já que tudo o que é contido no plano projetante vertical é projetado conforme a linha P_1 . O plano projetante vertical é rebatido em redor de sua linha horizontal P que serve de *charneira*, determinado desta forma a verdadeira grandeza do ângulo g_1-h , g_1-i formado pelas duas chapas planas da tremonha.

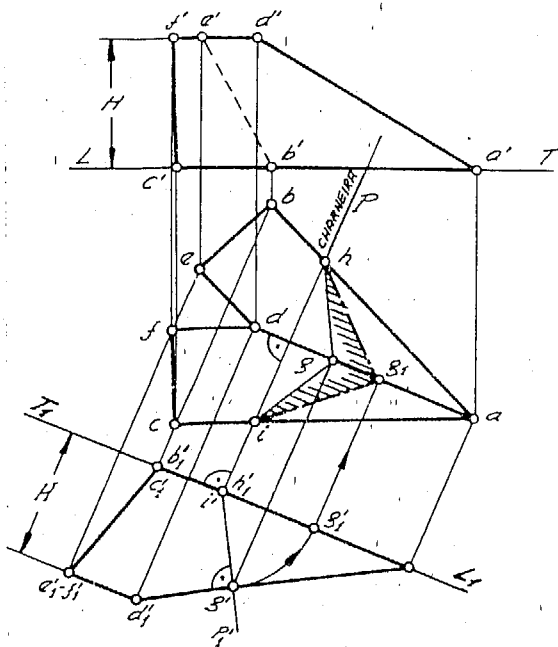


Figura 75

Na figura 75 temos um caso igual ao anterior com a variante de que nem na *planta* nem na *elevação* a aresta está em sua verdadeira grandeza, de modo que se recorre a uma mudança de plano vertical, paralelo à aresta $a-d$, vista em *planta*.

Ângulo formado por um plano qualquer com os de projeção (fig. 76). O plano em questão é representado por suas linhas $P-P_1$. O ângulo formado com o plano H de projeção é determinado da seguinte maneira:

Secciona-se o plano $P-P_1$ por meio de um plano projetante horizontal $Q-Q_1$, determinando os pontos $h-h'$ e $v-v'$; em v se traça uma perpendicular à linha Q e, também, formando centro em v , descreve-se um arco partindo de v' , determinando

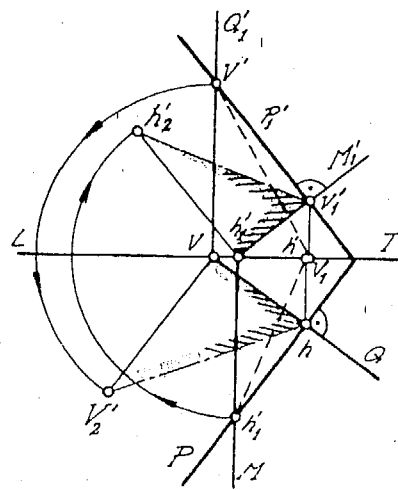


Figura 76

sobre a perpendicular o ponto V'_2 , que se une com h , encontrando-se assim o ângulo formado pelo plano $P-P_1$ com o plano H , sendo este o que está sombreado.

Para achar o ângulo formado pelo plano $P-P_1$ com o plano V de projeção, secciona-se por meio de um plano projetante vertical $M-M_1$ e prossegue-se com o mesmo procedimento de antes.

Quando houver necessidade somente do conhecimento do ângulo α formado por dois planos P e Q no espaço (fig. 77) a solução se obtém traçando desde um ponto A do espaço, perpendiculares p e q aos planos P e Q , determinando o mesmo ângulo α dos planos.

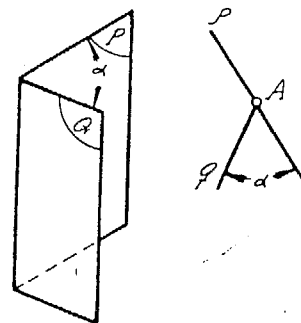


Figura 77

Na figura 78 são dadas as projeções das linhas $P-P_1$ e $Q-Q_1$ dos planos cujo ângulo se procura medir.

Escolhe-se um ponto qualquer $a-a'$ e traçam-se as perpendiculares $p-p'$ e $q-q'$ às linhas $P-P_1$ e $Q-Q_1$; estas retas são rebatidas sobre o plano H , tomado como plano de rebatimento, determinando o ângulo α formado pelos planos (o rebatimento das retas $p-p'$ e $q-q'$ é efetuado como se explica nas figuras 65 e 66).

Rotações (giro do ponto). O ponto A do espaço (fig. 79), ao girar em redor de uma reta E chama-

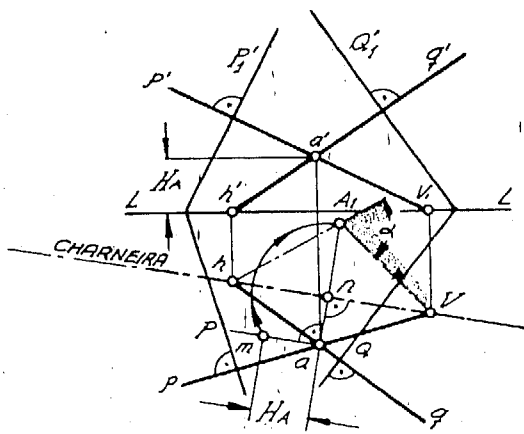


Figura 78

da eixo, descreve uma circunferência, cujo plano, P é perpendicular à reta eixo. O ponto O da circunferência é o ponto de intersecção do eixo E com o plano P . O raio R é igual à distância do ponto A ao eixo E .

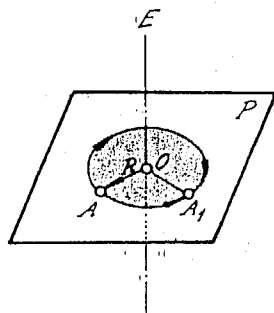


Figura 79

Para achar a posição de um ponto depois de sua rotação em redor de seu eixo E , em qualquer sentido, traça-se, a partir do ponto inicial A , um arco de círculo de raio $R = O-A$, conseguindo-se assim a nova posição A_1 .

Rotação de uma reta qualquer para achar sua verdadeira grandeza. A figura 80 dá uma perspectiva da reta R no espaço e dos planos de projeção H e V . A reta R é limitada pelo ponto N e sua linha h . A rotação foi feita em redor do eixo E que passa por N e determina sobre o plano H de projeção o ponto E que se confunde com n . Com um raio $r = E-h$, igual à reta em sua projeção horizontal, descreve-se um arco em qualquer sentido, até situar o ponto h na mesma distância da $L-T$, da distância existente entre esta e o ponto n , determinando um novo ponto chamado h_1 que, unido com o ponto n , seria a nova projeção r_1 da reta da rotação, sendo esta no espaço a reta R_1 e, em sua projeção vertical r'_1 , que está na verdadeira

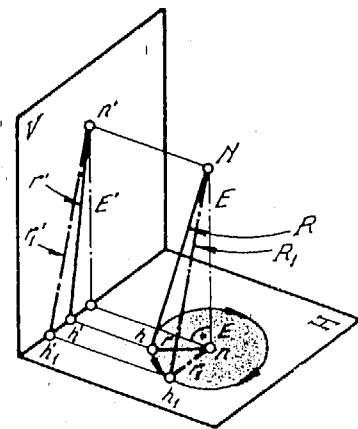


Figura 80

grandeza por ser sua projeção horizontal r_1 paralela à $L-T$.

Dando-se as projeções $n-h$ e $n'-h'$ de uma reta qualquer (fig. 81) e as projeções do eixo de rotação $E-E'$, acha-se a verdadeira grandeza da reta, do mesmo modo explicado anteriormente, sendo a verdadeira grandeza a reta $n'-h'_1$.

Rotação de uma reta em redor de um eixo horizontal (fig. 82). A reta e o eixo são dados por suas projeções $n-a$, $n'-a'$ e $E-E'$. O eixo de rotação é uma reta de ponta perpendicular ao plano V de projeção e por isso tem como projeção vertical o ponto E' .

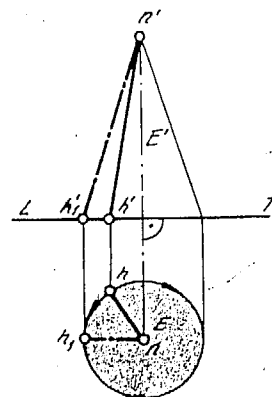


Figura 81

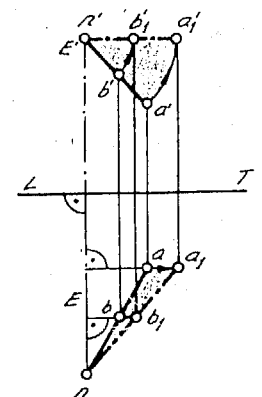


Figura 82

Todos os pontos da reta $N-A$ no espaço descrevem circunferências situadas em planos perpendiculares ao plano H de projeção. Para achar a verdadeira grandeza da reta em questão, gira-se, em sua projeção vertical, até ficar paralela a $L-T$, determinando sobre a projeção horizontal a verdadeira grandeza $n-a_1$ da reta; ao mesmo tempo ter-se-á girado um ponto $b-b'$ qualquer da reta. Para situar este ponto sobre a reta $n-a_1$ em sua verdadeira grandeza, não é necessário descrever o arco da vista em elevação; simplesmente se projeta o

ponto b , paralelamente a $L-T$, determinando sobre a reta $n-a_1$ o ponto b_1 .

Se o eixo de rotação $E-E'$, em vez de ser perpendicular ao plano V de projeção, como acontece neste caso, fosse perpendicular ao plano H , o sistema a seguir seria o mesmo, com a diferença de que as circunferências estariam na vista em *planta* e, as perpendiculares ao eixo, na vista em *elevação*.

Rotação de uma frontal em redor de um eixo que a corta por dentro (fig. 83). Quando a reta $a-b$, $a'-b'$ é uma frontal que queremos que gire em redor de um eixo $E-E'$ que a corte pelo centro para situá-la paralela a $L-T$, o eixo que passa por esta reta tem que ser perpendicular ao plano V de projeção; desta forma se faz a rotação, tal como vemos na representação em plano, ocupando esta a posição a_1-b_1 , $a'_1-b'_1$.

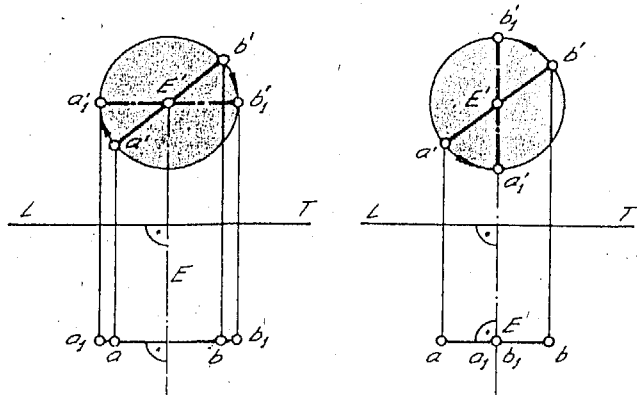


Figura 83

Figura 84

Na figura 84 temos também uma frontal que queremos situar de topo. Da simples observação da representação, vê-se que o sistema a seguir é o mesmo do caso anterior, sendo a nova posição da reta as projeções a_1-b_1 e $a'_1-b'_1$.

Também a frontal $b-c$, $b'-c'$ (fig. 85) pode ser situada de topo por meio de uma rotação em re-

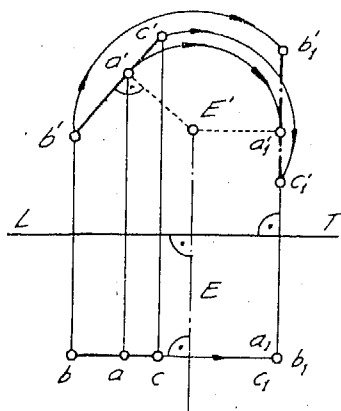


Figura 85

dor de um eixo $E-E'$ que não corta a reta. Traça-se desde o ponto E' uma perpendicular em a' à reta $b'-c'$ e uma paralela a $L-T$; gira-se o ponto a' em redor de E' , até situá-lo sobre a paralela anterior em a'_1 .

Desde a'_1 e em ambas as partes traça-se uma perpendicular indefinida à $L-T$; logo, faz-se girar as extremidades da reta $b'-c'$, determinando os pontos $b'_1-c'_1$, sendo esta a nova posição da reta, vista em *elevação*. Para achar a nova projeção horizontal, prolonga-se a reta $b-c$ até cortar a perpendicular em $a_1-b_1-c_1$ (a_1 é a projeção homônima de a'_1).

Rotação de um plano qualquer transformando-o em projetante vertical (fig. 86). O plano é representado por suas linhas $P-P_1$, sendo o seu eixo de rotação $E-E'$ uma reta de topo perpendicular ao plano H de projeção que corta o plano em b em sua projeção horizontal. Pelo ponto b faz-se passar uma frontal $f-f'$ para determinar sua projeção homônima b' (ver a situação de um ponto em um plano, figura 29).

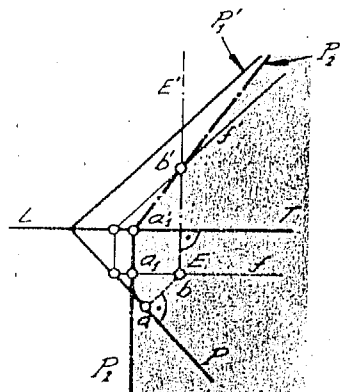


Figura 86

Desde o ponto E traça-se uma perpendicular à linha P , determinando o ponto a que é girado em redor do eixo E , formando sobre a projeção f o ponto a_1 ; em ambas as partes de a_1 se traça uma perpendicular à $L-T$, sendo esta a linha horizontal P_2 do plano projetante vertical. A linha vertical P'_2 do plano projetante vertical é a reta que passa pelos pontos a'_1-b' .

Situar um plano projetante, paralelo a um plano de projeção. A figura 87 representa em suas projeções as linhas $P-P_1$ de um plano projetante horizontal. Para podermos situar este plano paralelo ao plano V de projeção temos que girá-lo em redor de um eixo $E-E'$ de ponta, perpendicular ao plano H (o eixo é contido no plano P , embora também possa estar fora do mesmo).

Com uma simples observação da representação da figura 87, vê-se claramente como se situa o plano projetante $P-P_1$ em uma tal posição que seja paralela ao plano V de projeção, sendo P_2 sua linha horizontal.

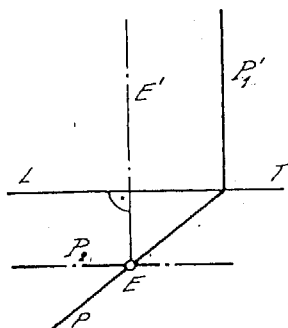


Figura 87

Intersecções

O procedimento geral a seguir para achar as intersecções de duas ou mais superfícies é o seguinte:

Cortam-se as duas superfícies por meio de esferas ou planos, de tal maneira que a sua intersecção com cada superfície seja uma circunferência ou uma reta de determinação simples. Como os pontos de intersecção destas circunferências ou retas pertencem a uma mesma esfera ou a um mesmo plano, o ponto de intersecção é determinado no ponto em que as duas superfícies se cortam.

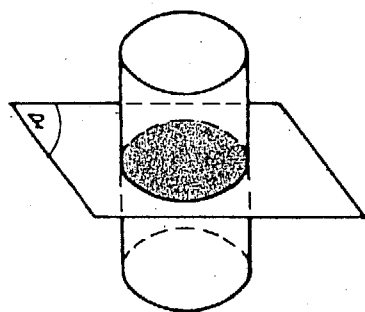


Figura 88

As figuras 88, 89, 90 e 91 representam as perspectivas de um cilindro reto, um cone reto, um cone oblíquo de base circular e um cilindro oblíquo de bases circulares, seccionados por um plano P , paralelamente a suas correspondentes bases circulares.

Cada plano corta estes cones e cilindros, seguindo uma circunferência (como a esfera da fig. 92).

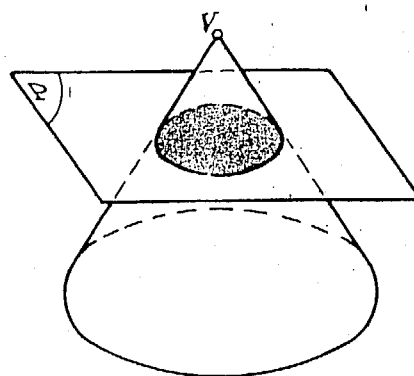


Figura 89

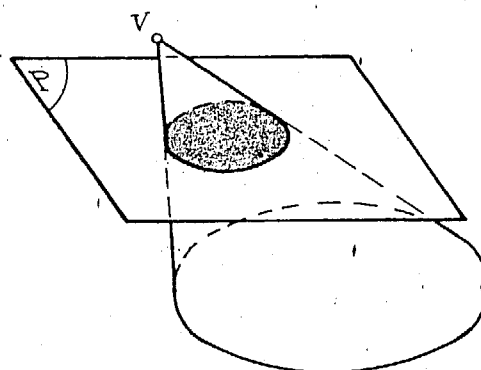


Figura 90

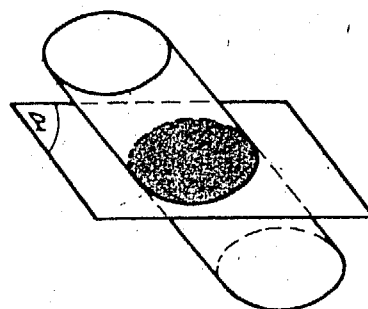


Figura 91

Logo, a intersecção do cilindro e do cone (fig. 93) seriam os pontos $a-b$, já que estes pontos são a intersecção das duas circunferências pertencentes ao plano.

Nas figuras 94, 95, 96 e 97 são dados quatro exemplos de intersecções de corpos diferentes, para os quais se segue o mesmo método para achar a linha de intersecção.

Trata-se de um método muito prático para resolver qualquer trabalho que se nos apresentar semelhante aos explicados.

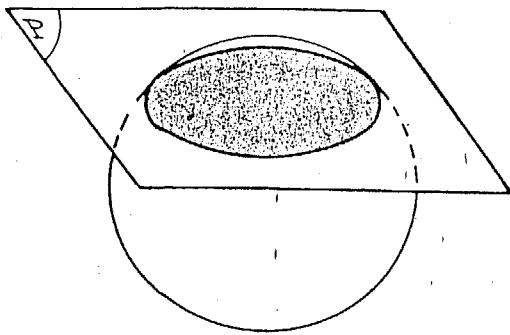


Figura 92

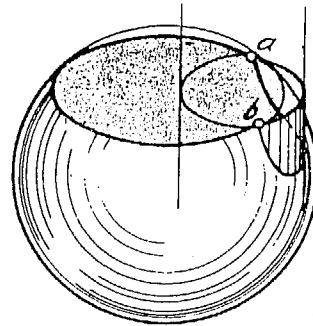


Figura 96

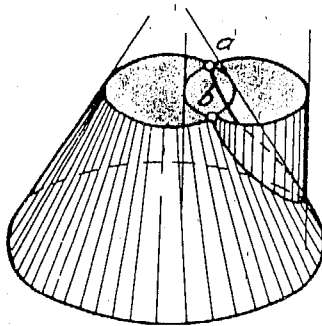


Figura 93

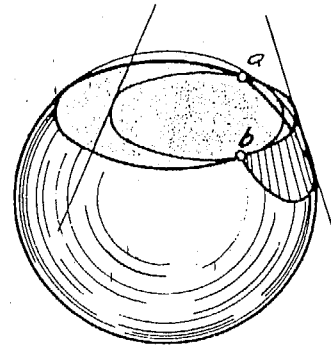


Figura 97

Intersecção de um cilindro com um cone, cujos eixos são perpendiculares. O plano P (fig. 98), ao secionar o cone perpendicularmente ao eixo, determina uma circunferência; o mesmo plano determina duas retas paralelas $a-a_3$ e $b-b_3$ (fig. 99)

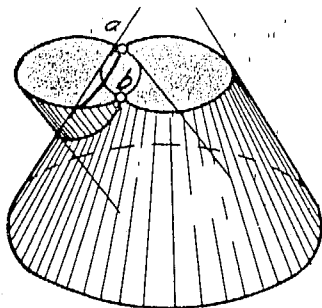


Figura 94

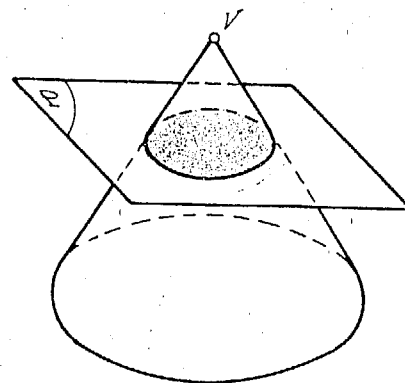


Figura 98

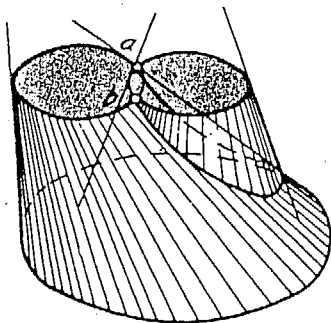


Figura 95

ao secionar o cilindro, paralelamente ao seu eixo. Como as duas retas do cilindro e a circunferência do cone pertencem ao mesmo plano P (fig. 100), a intersecção de ambos seriam os pontos a_1-a_2 , b_1-b_2 . A figura 101 dá uma representação em plano da intersecção do cilindro com o cone. O plano P , neste caso, seciona o cilindro por seu eixo, determinando as geratrizes em suas projeções $a-a_3$, $b-b_3$ e $a'-a'_3$, $b'-b'_3$ e os pontos de intersecção a_1-a_2 ,

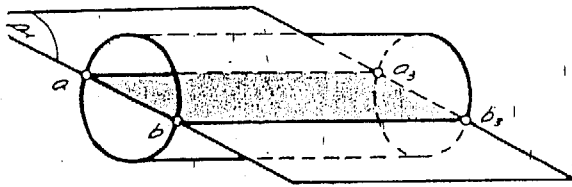


Figura 99

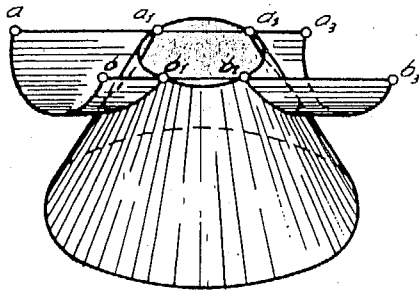


Figura 100

b_1-b_2 e $a'_1-a'_2$, $b'_1-b'_2$, pertencentes à curva de intersecção. Este procedimento repete-se várias vezes para determinar outros pontos de intersecção que se unem ordenadamente por meio de uma régua flexível, ficando assim determinada a linha de intersecção de ambos os corpos.

Intersecção de um cilindro reto com um cone reto cujos eixos são paralelos (segundo método). O

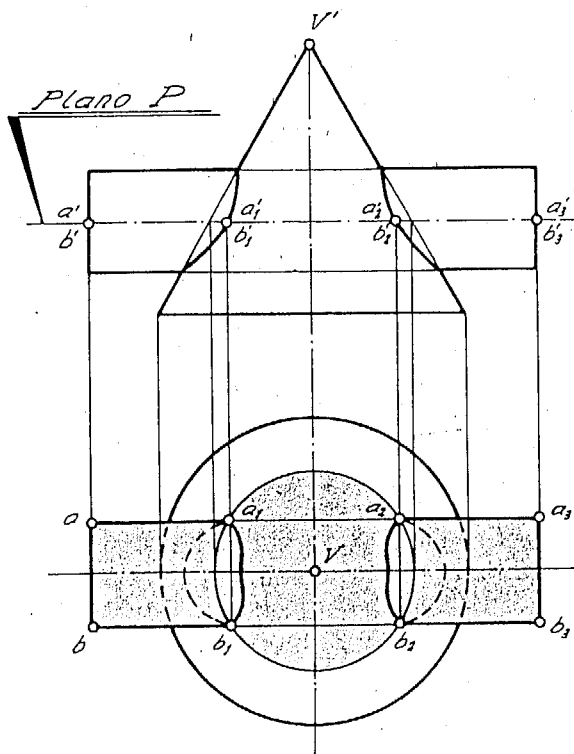


Figura 101

plano P (fig. 102), ao sectionar o cilindro paralelamente a seu eixo, determina duas retas paralelas $a-a_1$ e $b-b_1$ chamadas geratrizes. O mesmo plano

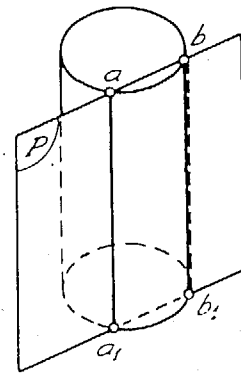


Figura 102

P que passa pelo eixo do cone (fig. 103), determina a geratriz $V-a_2-b_2$. Como as geratrizes $V-a_2-b_2$ do cone e as geratrizes $a-a_1$ e $b-b_1$ do cilindro (fig.

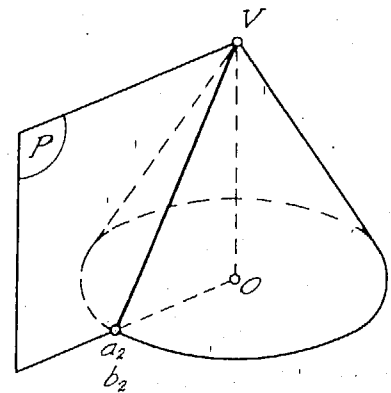


Figura 103

104) pertencem ao mesmo plano, os pontos de intersecção de ambas $a_3-b'_3$ logicamente também pertencem ao plano P ; portanto, estes pontos, a_3 e

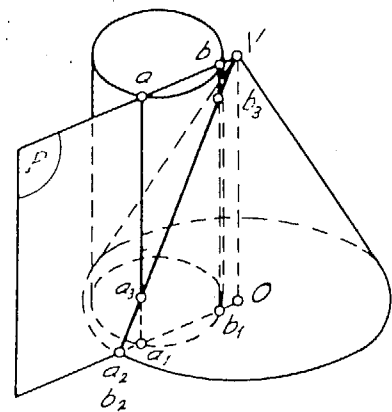


Figura 104

b_3 , correspondem à curva de intersecção do cilindro e do cone.

A figura 105 dá uma perspectiva de vários planos $P-I$, $P-II$ e $P-III$ que têm uma reta comum chamada *charneira*.

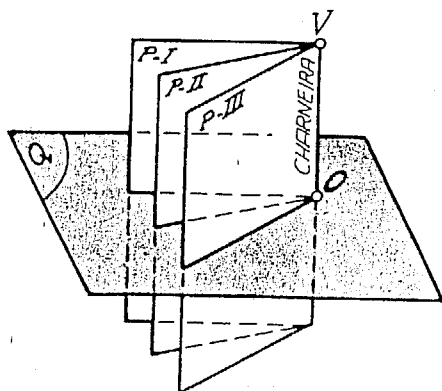


Figura 105

Estes planos são seccionados por outro plano Q , perpendicularmente à *charneira*, determinando sobre esta o ponto O . Na representação em plano (fig. 106) dos planos $P-I$, $P-II$ e $P-III$ observar-se-á que estes planos estão seccionados perpendicularmente à *charneira* por um plano Q que, neste caso, serve de plano horizontal de projecção. Todas as linhas horizontais dos planos em questão têm que concorrer para o ponto O , sendo este ponto a linha horizontal da *charneira*.

Na representação em plano do cilindro inserido no cone (fig. 107), vemos como em sua vista em elevação temos a *charneira* que passa pelo eixo do

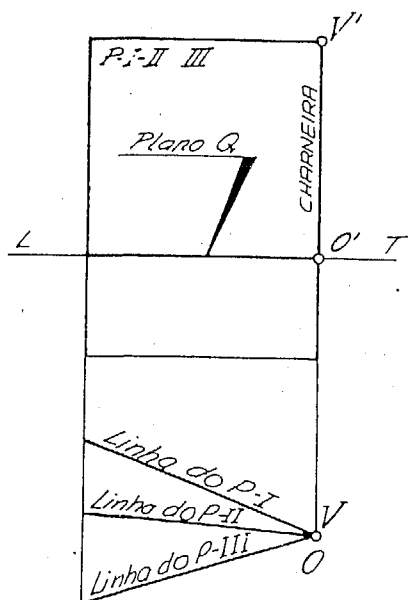


Figura 106

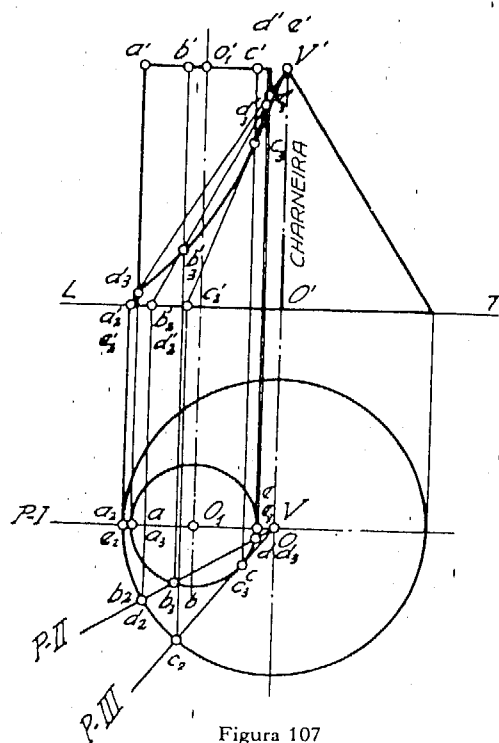


Figura 107

cone, como foi explicado na figura 103. Na vista em planta temos as linhas horizontais dos planos $P-I$, $P-II$ e $P-III$ que concorrem logicamente para o ponto O .

Uma simples observação pode mostrar como são determinados os pontos da curva de intersecção, conforme foi explicado com relação à figura 104.

Intersecção de um cilindro reto com um cone reto, cujos eixos são oblíquos entre si. Quando for para inserir um cilindro reto em um cone reto e o eixo do cilindro for uma frontal (fig. 110), será empregado o seguinte método:

A perspectiva da figura 108 representa um cilindro reto inclinado com respeito ao plano horizontal de projecção, estando o cilindro seccionado por dois planos $P-I$ e $P-II$ que concorrem para a reta $X-Y$ chamada de *charneira* e paralela ao eixo do cilindro. O plano $P-I$ determina uma só geratriz $a-a_1$ por ser sua linha X_1-Y tangente à elipse diretriz da base do cilindro e o plano $P-II$ determina sobre o cilindro duas geratrizes $b-b_1$ e $c-c_1$ por ser sua linha X_2-Y secante à elipse da base. Na figura 109 temos os mesmos planos $P-I$ e $P-II$ que determinam sobre um cone as geratrizes a_2-b_2 e c_2 , considerando que a linha de intersecção $X-Y$ dos dois planos que, como foi dito, chama-se *charneira*, tem que passar pelo vértice V do cone.

Representação em plano do cilindro inserido no cone (fig. 110). Conhecidas as projecções do cone e

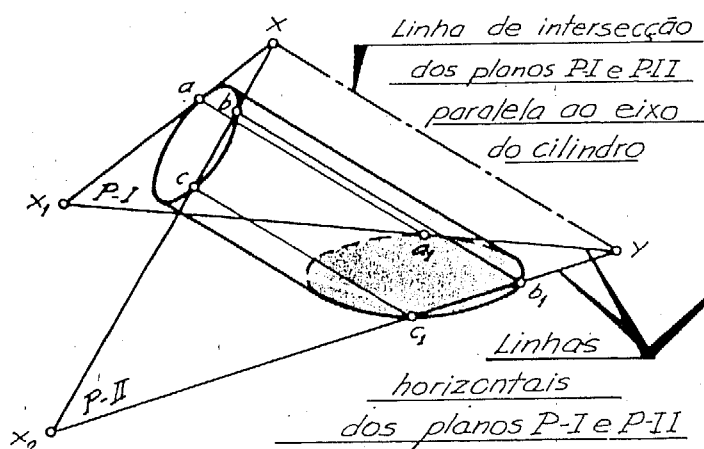


Figura 108

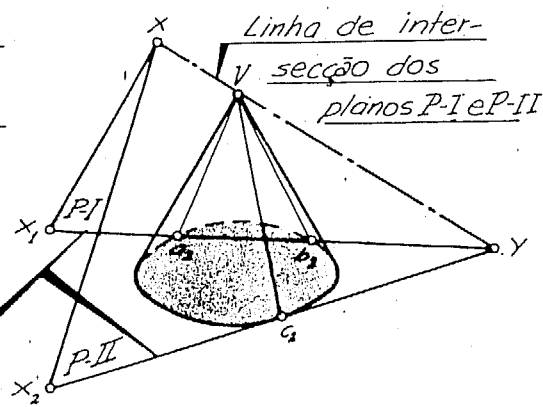


Figura 109

do cilindro, cujos eixos estão em um mesmo plano, traça-se a *charneira* $X'-Y'$ que passa pelo vértice V' do cone sendo paralela ao eixo do cilindro em sua projeção vertical. A projeção horizontal da *charneira* $X-Y$ sempre tem que se confundir com o eixo horizontal da base do cone. Todos os planos secantes que seccionarem o cone e cilindro têm que ter a mesma linha de intersecção (*charneira*); portanto, todas suas linhas horizontais têm que concorrer para o ponto Y , sendo este ponto a linha horizontal da *charneira*.

O plano $P-I$, cuja linha horizontal é tangente à elipse diretriz do cilindro, determina a geratriz $a-$

a_1 e, ao seccionar o cone, forma também a geratriz $V-a_2$; como estas geratrizes pertencem ao mesmo plano, a intersecção de ambas as geratrizes $a-a_1$ e $V-a_2$ determinam o ponto a_3 em sua projeção horizontal, pertencente à curva de intersecção do cone e do cilindro. As geratrizes $a'-a'_1$ e $V'-a'_2$, em sua projeção vertical ou *vista em elevação*, determinam o ponto de intersecção a'_3 que também pode ser determinado traçando a geratriz do cone ou do cilindro de projetando o ponto a_3 perpendicularmente a $L-T$, até cortar a geratriz antes mencionada, determinando o ponto a'_3 .

O plano $P-II$ determina nas projeções horizon-

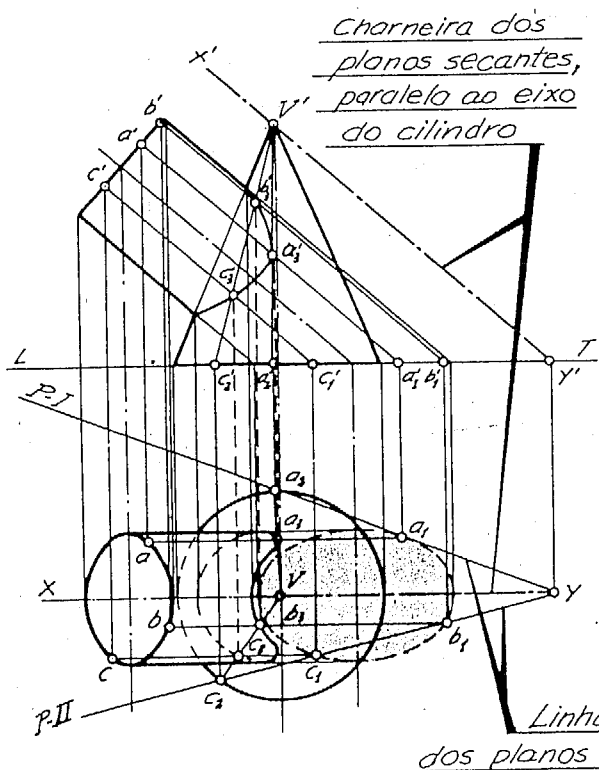


Figura 110

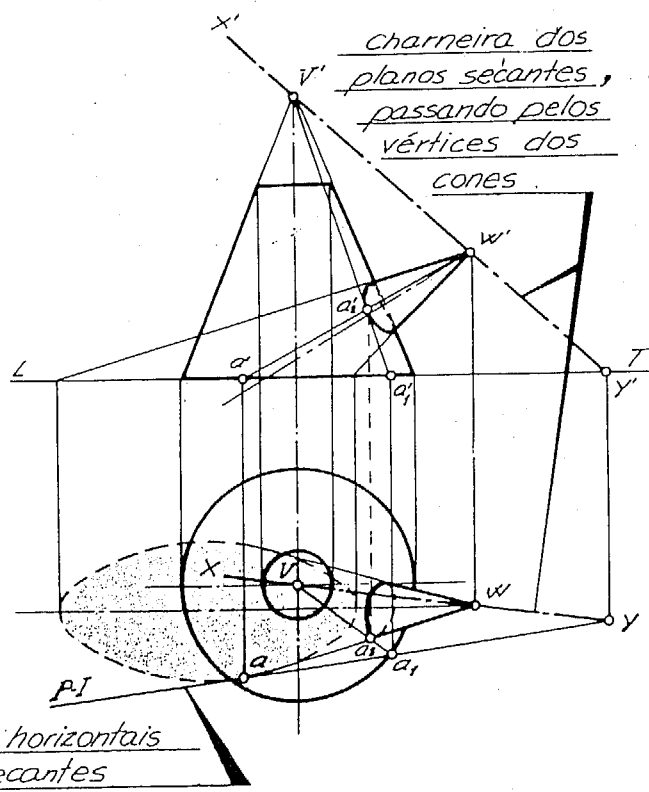


Figura 111

tal e vertical as geratrizes $b-b_1$, $c-c_1$, $V-c_2$ e $b'-b'_1$, $c'-c'_1$, $V'-c'_2$ e os pontos de intersecção b_3-c_3 e $b'_3-c'_3$, pertencentes à curva de intersecção.

Desta mesma forma são determinados todos os pontos desejados para determinar a curva de intersecção, unindo-os ordehadamente depois.

Intersecção de cones cujos eixos ficam situados em planos paralelos e inclinados entre si (fig. 111). A projeção vertical da charneira $X-Y$ é uma reta que tem que passar pelos vértices $V'-W'$ dos cones, cuja projeção horizontal $X-Y$ é determinada passando uma reta pelos vértices $V-W$ e traçando uma perpendicular à $L-T$; desde Y' achamos Y , sendo que para o ponto Y é que têm que concorrer todas as linhas horizontais dos planos secantes. Neste caso só desenhemos um plano $P-I$, cuja li-

Dá-se, porém, uma explicação para determinar os eixos da elipse de um plano quando se sectiona obliquamente um cone.

Na vista em *elevação* da figura 112 representamos um cone $V'-A'-B'$, cujo eixo $V'-P'$ está inclinado com respeito ao plano H de projeção, sendo este o plano setor que corta o cone em suas geratrizes extremas $V'-A'$ e $V'-B'$ determinando os pontos $a'-b'$, sendo esta distância igual a M , pertencente ao eixo maior da elipse.

No ponto médio c' e d' do eixo maior da elipse, traça-se uma perpendicular ao eixo do cone, determinando sobre o mesmo o ponto P' e, sobre as geratrizes extremas $V'-A'$ e $V'-B'$, os pontos $A'_1-B'_1$, pelos quais se passa uma semicircunferência de centro P' . Desde o ponto c' e d' se traça uma paralela ao eixo do cone para cortar a semicircun-

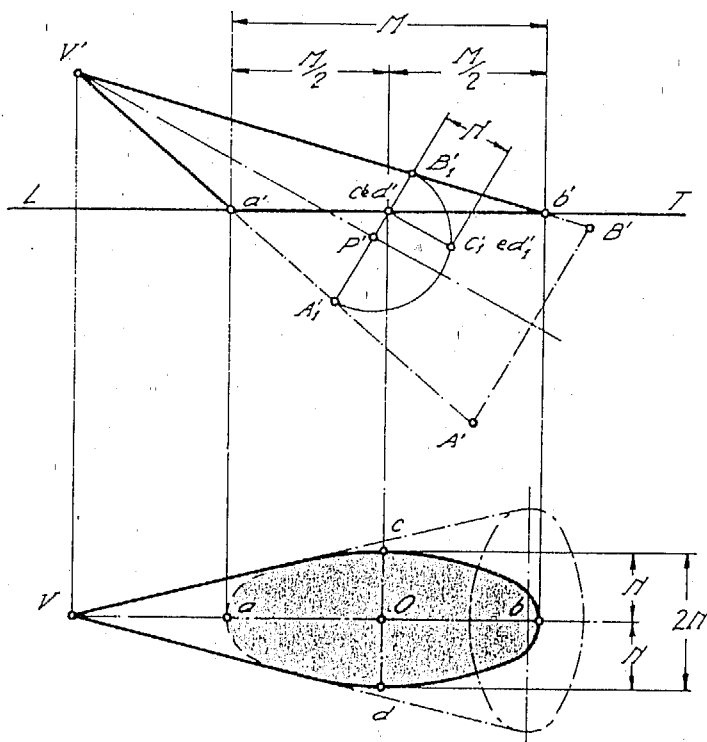


Figura 112

nha horizontal é tangente à elipse diretriz do cone de vértice W , determinando a geratriz $W-a$ sobre o outro cone, a geratriz $V-a_1$, cujas intersecções formam o ponto a_2 , pertencente à curva de intersecção: desta mesma forma se determinam todos os pontos que nos interessarem.

Não é necessário desenhar a elipse diretriz do cone, pois, na prática, determinam-se pontos da elipse, que nos interessarem para facilitar o desenvolvimento do cone; isto é explicado nos exercícios correspondentes a inserções de cilindros com cones entre si, como se expõe mais adiante.

ferência em $c'_1-d'_1$, determinando a distância N , equivalente ao semi-eixo da elipse.

Na vista em *planta*, representa-se a elipse de centro O , cujos eixos são $a-b$ igual à distância M e, $c-d$, igual a $2N$.

Intersecção de cilindros com cones e cones entre si sem necessidade de construir a elipse diretriz. Sempre que se tratar de intersecções de cones ou cilindros retos, pode-se evitar a construção da elipse diretriz para determinar a curva de intersecção do enxerto, utilizando um plano projetante

vertical perpendicular ao eixo do enxerto, o qual determina uma circunferência. É imprescindível que o eixo do enxerto seja paralelo ao plano V de projeção, devendo-se trocar de plano no caso de não ser paralelo.

Na perspectiva (fig. 113) é dado um conjunto de planos (quatro neste caso) que tem a mesma li-

P que é representado pelas linhas P e P' , sendo a linha horizontal P a que serve de *charneira* de rebatimento. A linha de intersecção $i-i'$ serve de *charneira* dos quatro planos que chamaremos de *planos secantes*. As linhas produzidas pelo plano projetante vertical com os quatro planos secantes cortam a linha horizontal P do plano projetante

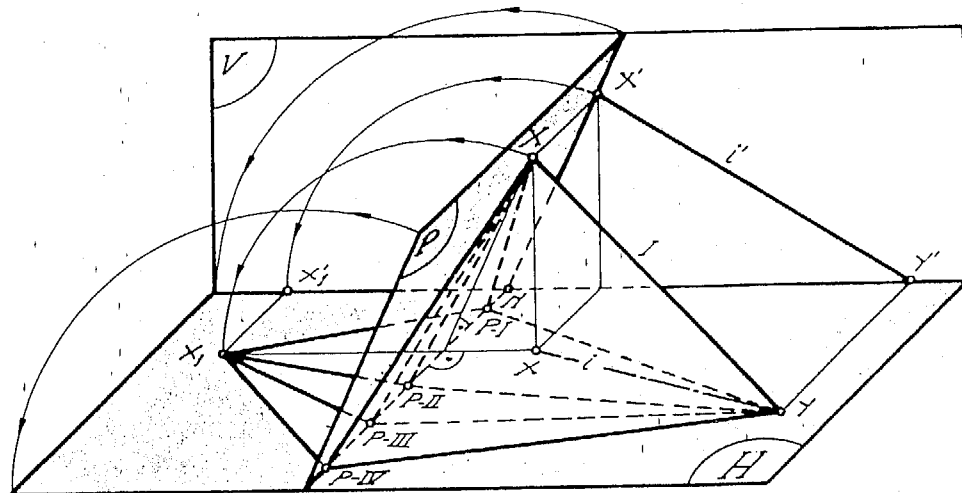


Figura 113

nha de intersecção I , sendo suas linhas horizontais $P-I-Y$, $P-II-Y$, $P-III-Y$ e $P-IV-Y$; como se vê, todas as linhas horizontais convergem para o ponto Y . Estes planos são seccionados por um plano P , projetante vertical, que determina as linhas $X-P-I$, $X-P-II$, $X-P-III$ e $X-P-IV$. O plano P é rebatido para coincidir com o plano H de projeção. Na figura 114 dá-se a representação em plano dos quatro planos anteriores e o rebatimento do plano

nos mesmos pontos que as linhas horizontais, sendo estes os pontos $P-I$, $P-II$, $P-III$ e $P-IV$.

Na perspectiva da figura 115 representam-se duas superfícies cônicas, cujos eixos são inclinados entre si. O cone de vértice V tem a base sobre um plano horizontal H e pela base do cone de vértice W passa um plano P , sendo este um plano projetante vertical. Estas duas superfícies cônicas são seccionadas por um plano secante que passa por

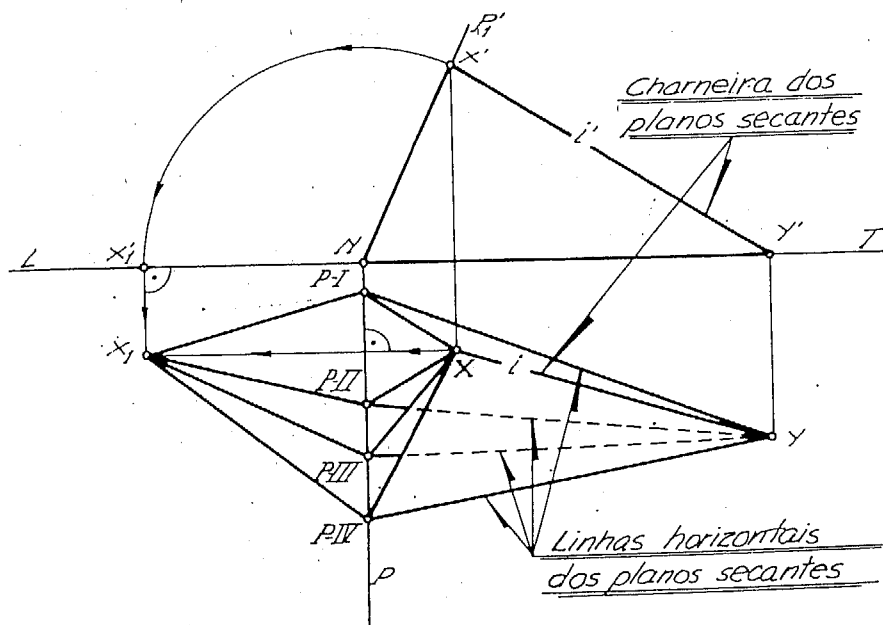


Figura 114

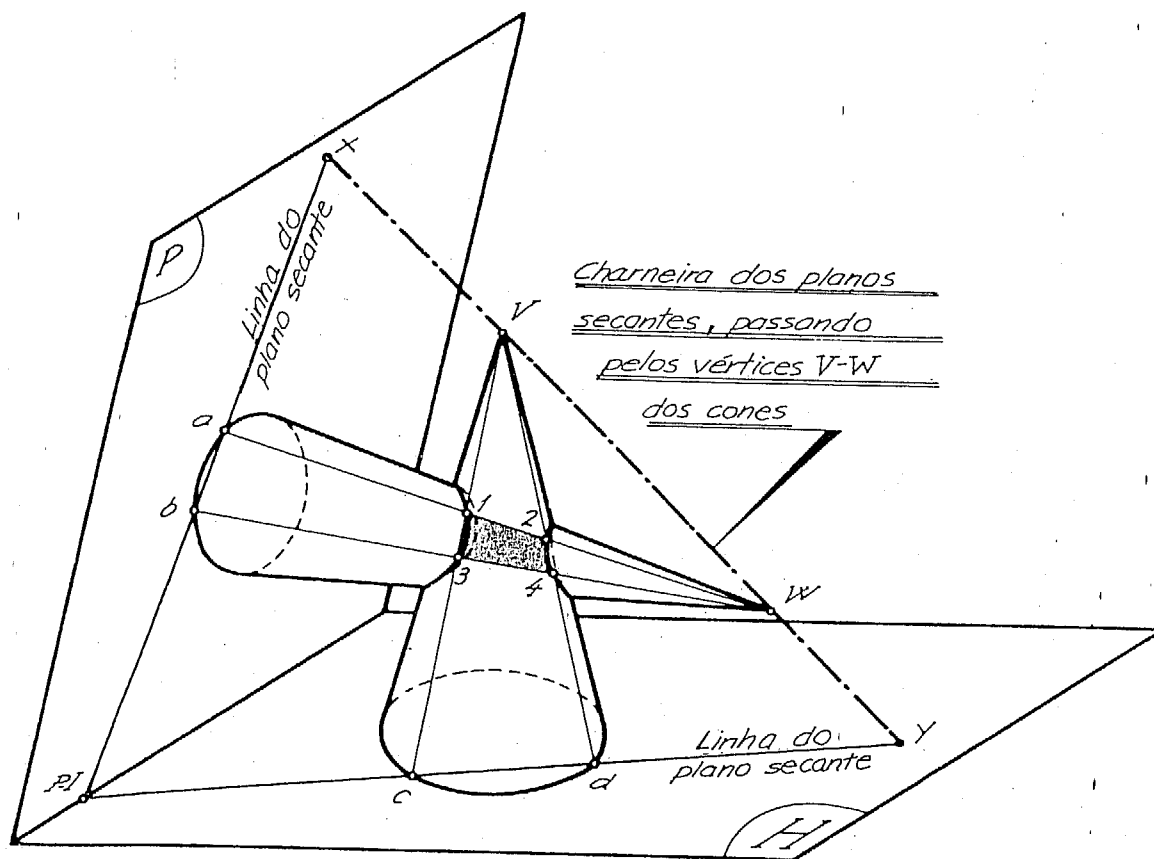


Figura 115

seus vértices V e W , determinando sobre o cone de vértice W as geratrizes $W-a$ e $W-b$, e sobre o cone de vértice V as geratrizes $V-c$ e $V-d$. Como estas quatro geratrizes são do mesmo plano secante, também pertence a este plano o quadrilátero de vértices 1, 2, 3 e 4 formado pelas geratrizes, pertencendo estes pontos à curva de intersecção das duas superfícies.

Repetindo várias vezes esta mesma operação, poderiam ser determinados outros pontos da curva de intersecção.

Determinação da curva de intersecção de dois cones (fig. 116). O eixo do cone de vértice W é paralelo ao plano vertical de projeção e é inclinado com respeito ao plano H de projeção. O eixo do cone de vértice V é perpendicular ao plano H de projeção.

Pela base do cone de vértice W passa um plano $P-P_1$ projetante vertical, cuja linha vertical P_1 é, por força maior, perpendicular ao eixo do enxerto. Na vista em *elevação* se desenha a *charneira* que passa pelos vértices $V'-W'$ e corta o plano projetante em X' e a $L-T$ em Y' . A projeção horizontal da *charneira* é determinada unindo os pontos V e W por meio de uma reta indefinida e se traçando desde os pontos $X'-Y'$, *perpendiculares* à

$L-T$, determinando sobre a reta anterior os pontos $X-Y$.

O plano $P-P_1$ é rebatido pela rotação em redor de sua linha P que serve de *charneira*, determinando os pontos O_1-X_1 .

Exemplo com um plano secante de linha horizontal $X-P-I$, para achar um ponto da curva de intersecção. Marcando o centro em O_1 , descreve-se uma circunferência de diâmetro igual ao do enxerto. Desde X_1 se traça uma reta (esta reta é a linha que forma o plano secante com o plano projetante vertical $P-P_1$), cortando a circunferência em a_1-b_1 e, a linha P , em $P-I$; os pontos a_1 e b_1 se projetam perpendicularmente à $L-T$, determinando os pontos $a'_1-b'_1$, pelos quais passam arcos de centro N , cortando o diâmetro do enxerto em a' e b' ; estes pontos se unem com W' , determinando-se as geratrizes $W'-a'$ e $W'-b'$ do enxerto na vista em *elevação*.

Desde a' e b' traçam-se perpendiculares indefinidas à $L-T$ e desde a_1 e b_1 traçam-se perpendiculares à linha P , determinando sobre as anteriores os pontos a e b que, unidos com o vértice W , seriam determinadas as geratrizes do enxerto, vistas em *planta*. O ponto $P-I$ se une com Y através de uma reta, sendo esta a linha horizontal do plano

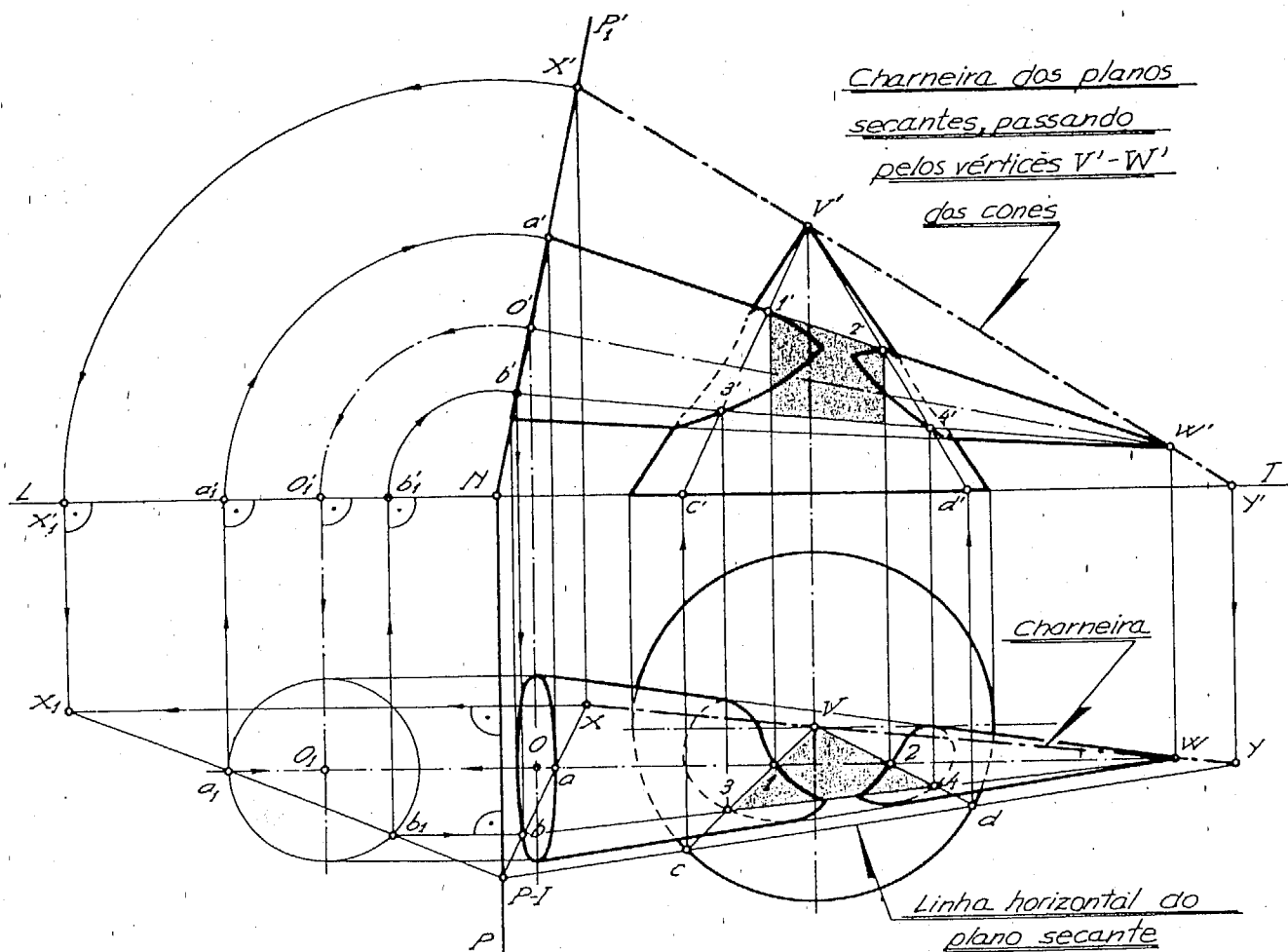


Figura 116

secante que tomamos como exemplo. Essa linha corta a circunferência da base do cone de vértice V em c e d ; unem-se os pontos c e d com V , ficando assim representadas as geratrizes $V-c$ e $V-d$ que cortam as outras geratrizes do enxerto, determinando um quadrilátero de vértices 1-2-3-4, pertencendo estes pontos à curva de intersecção (o que é explicado na perspectiva da fig. 115).

Os pontos 1-2-3-4 projetam-se perpendicularmente à $L-T$, determinando sobre as geratrizes do enxerto os pontos 1'-2'-3'-4' pertencentes à curva de intersecção de ambos os cones na vista em elevação.

Os pontos 1'-2'-3'-4' também podem ser determinados pela intersecção das geratrizes de ambos os cones.

Para melhor apreciação, foram sombreados os quadriláteros 1-2-3-4 e 1'-2'-3'-4'.

Do mesmo modo determinam-se todos os pontos desejados, tendo que passar todos os planos pela charneira.

Os planos secantes situam-se nas projeções horizontal e vertical, em uma posição qualquer, mas é preferível passar estes planos pelas geratrizes do enxerto de divisão em partes iguais, servindo estas geratrizes para desenvolver o enxerto. Portanto,

divide-se a circunferência de centro O_1 em partes iguais e passam-se os planos secantes por estes pontos. Cada plano corta a circunferência em dois pontos (salvo quando for tangente), sendo um o ponto de divisão e o outro um ponto qualquer que não levaremos em conta.

Intersecção de um cilindro em um cone evitando a elipse diretriz (fig. 117). O eixo do cone é uma *reta de topo* perpendicular ao plano H de projeção e o eixo do cilindro é uma *reta frontal*, ou seja, paralela ao plano V de projeção e inclinada com respeito ao plano H de projeção. A *charneira* que passa pelo vértice $V-V'$ do cone é sempre paralela ao eixo do cilindro e, portanto, também é uma *frontal*.

Pela base do enxerto cilíndrico se passa um plano projetante vertical $P-P_1$ que, logicamente, é perpendicular à *charneira*, determinando o ponto $X-X'$.

Uma vez conhecida a posição da charneira $X-Y$, $X'-Y'$ determina-se a curva de intersecção das duas superfícies, como foi explicado no exercício anterior.

Neste caso, tomamos como exemplo um plano secante que passa pelo ponto a_1 da circunferência

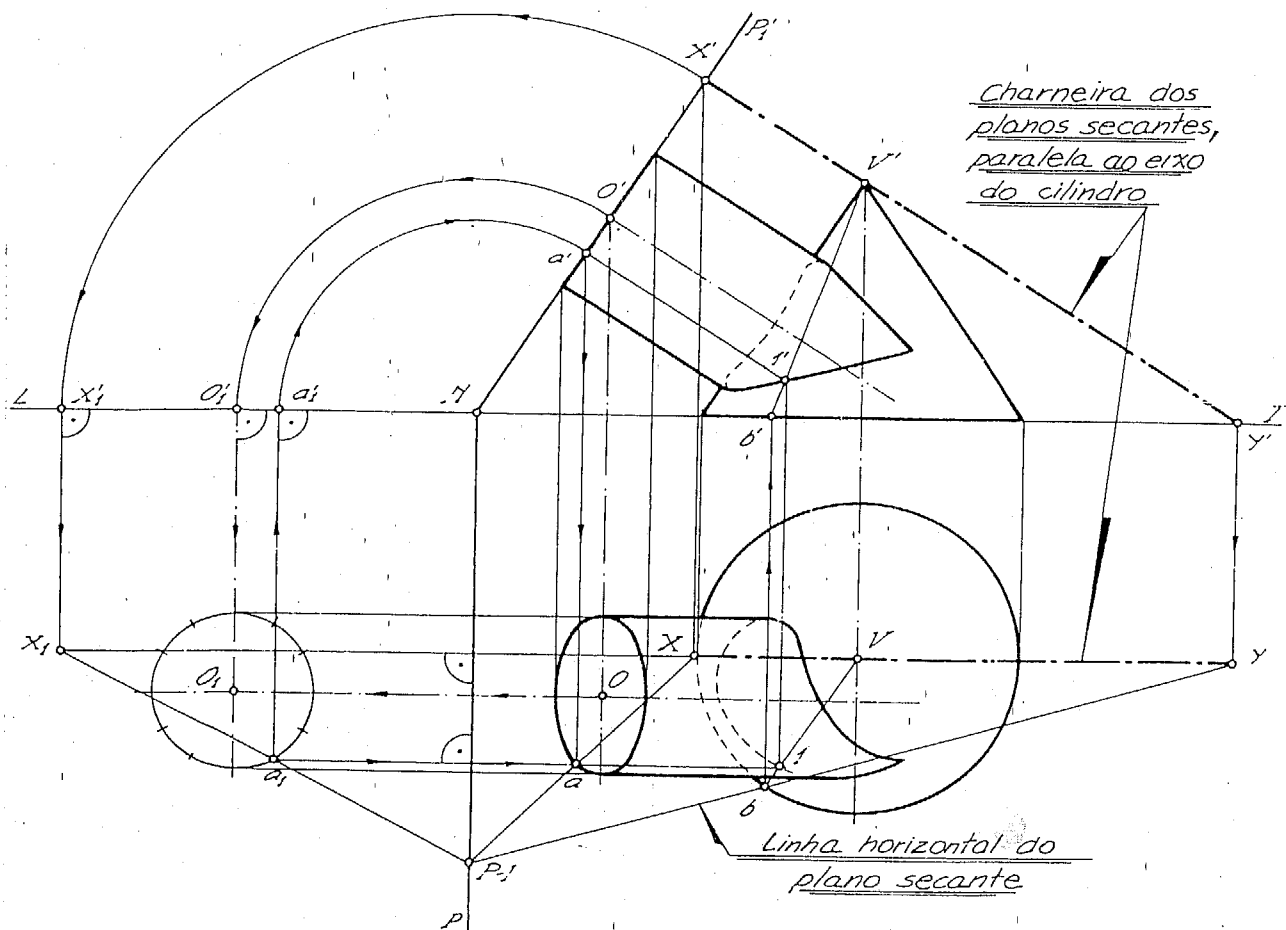


Figura 117

de centro O_1 , determinando no fim o ponto $l-l'$ pertencente à curva de intersecção. Desde modo determinam-se todos os pontos desejados.

Nota. A circunferência de centro O_1 foi dividida em certo número de partes iguais (doze neste caso) e o ponto a_1 é um dos pontos de divisão; o plano corta também a circunferência em outro ponto, mas não o levaremos em conta para que não tenhamos dificuldade ao desenvolver o cilindro.

Representação das superfícies no sistema diédrico (cone oblíquo de base circular) (fig. 118). Quando a base circular deste cone se acha situada no plano H de projeção e dado o vértice $V-V'$, a determinação do contorno aparente na projeção horizontal se acha traçando desde o vértice V tangentes à circunferência da base, determinando as geratrizes $V-a$ e $V-b$. O contorno aparente na projeção vertical se acha traçando tangentes à circunferência perpendiculares à $L-T$, determinando os pontos $c-d$, c' e d' . Ficaria determinada a projeção vertical, estando limitada, pelo diâmetro da base e pelas geratrizes extremas $V'-c'$ e $V'-d'$.

Estes contornos aparentes dividem a superfície em partes *visíveis* e *ocultas* e que serão desenhadas

com linha cheia e grossa quando for parte *visível* e, quando for parte *oculta*, será desenhada finamente e por linhas descontínuas de 3 mm de comprimento, aproximadamente.

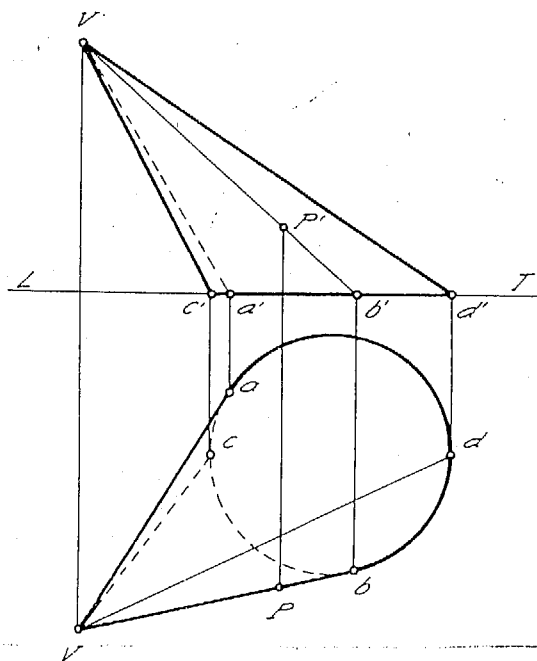


Figura 118

Cone reto (fig. 119). Se o cone for reto e sua base circular estiver situada no plano H de projeção, a sua representação vertical do contorno aparente

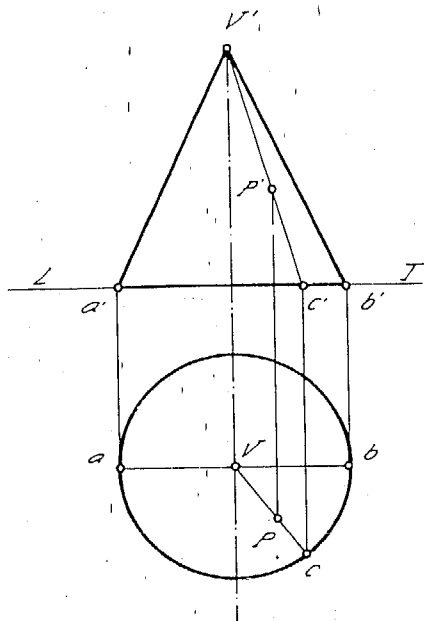


Figura 119

seria um triângulo isósceles, como o que é visto na figura, sendo este o formado pelo diâmetro $a'-b'$ e as geratrizes extremas $V'-a'$ e $V'-b'$.

Na projeção horizontal não há geratrizes de contorno, sendo sua representação a circunferência da base. O mesmo acontece com um cone oblíquo quando a projeção horizontal do vértice for um ponto interno da circunferência da base.

O ponto P de uma geratriz qualquer $V-c$, $V'-c'$ é projetado perpendicularmente à $L-T$ para determinar sua projeção vertical P' .

Cilindro oblíquo de bocas circulares e paralelas entre si (fig. 120). A base circular deste cilindro está no plano horizontal de projeção e suas geratrizes de contorno aparente $a-a_1$ e $b-b_1$, vistas em planta, são determinadas traçando tangentes às circunferências.

A projeção vertical do contorno aparente se acha unindo as pontas dos diâmetros por meio de retas que serão as geratrizes extremas $c'-c'_1$ e $d'-d'_1$.

Como poderá ser observado, a geratriz extrema $a-a_1$ da projeção horizontal vê-se de pontos na projeção vertical $a'-a'_1$ por ser *oculta* nesta projeção; o mesmo ocorre com a geratriz $c'-c'_1$ da pro-

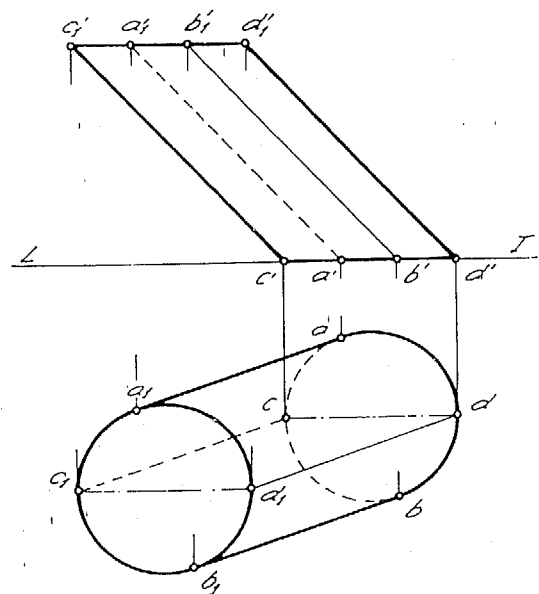


Figura 120

jeção vertical que se vê de pontos na projeção horizontal $c-c_1$ por ser *oculta* nesta posição. Também o arco $a-b-c$ é oculto.

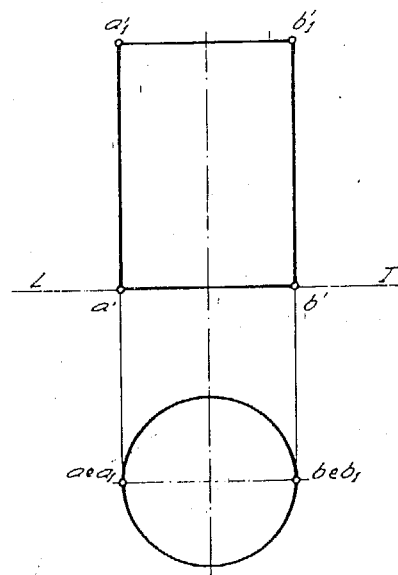


Figura 121

Cilindro reto (fig. 121). O cilindro reto carece, neste caso, de geratrizes de contorno aparente em sua projeção horizontal, sendo $a'-a'_1$ e $b'-b'_1$ as geratrizes de contorno da projeção vertical que, em sua projeção horizontal, são representadas pelos pontos $a-a_1$ e $b-b_1$ por serem retas de topo, perpendiculares ao plano H de projeção.

Nota. As geratrizes $V-c$ e $V'-a'$ da figura 118 e as geratrizes $c-c_1$ e $a'-a'_1$ da figura 120 nunca se desenhavam, apesar de terem sido representadas para melhor explicação da interpretação das partes visíveis e ocultas. Elas só se desenhavam quando forem arestas, como por exemplo, a aresta $b-f$ da figura 124.

Poliedros regulares

Tetraedro (fig. 122). O tetraedro é o poliedro que é formado por quatro faces em forma de triângulos equiláteros. A sua representação mais simples é aquela em que uma de suas faces coincide com um dos planos de projeção (sendo, neste caso, com o plano H).

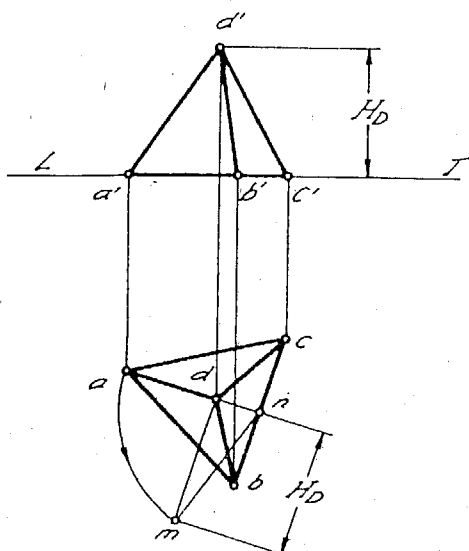
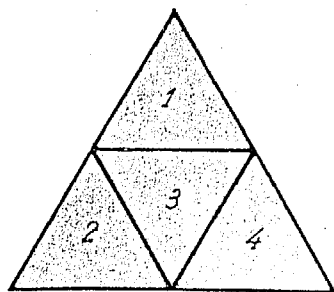


Figura 122

No plano H desenha-se o triângulo equilátero $a-b-c$ e sua projeção vertical $a'-b'-c'$. O ponto d é determinado traçando as bissetrizes dos ângulos do triângulo, sendo este ponto a intersecção das bissetrizes. Projeta-se o ponto d perpendicularmente à $L-T$, dando-se-lhe altura H_d , determinando o ponto d' que se une com os pontos a' , b' e c' por meio de retas que se chamam *arestas*.

Acha-se a altura H_d da seguinte maneira:

Marcando o centro em n (ponto médio da aresta $b-c$) descreve-se um arco indefinido que parte de a e, desde d se traça uma paralela a $b-c$ e que



Desenvolvimento
do tetraedro regular

Figura 123

corte o arco em m , determinando assim a altura H_d que precisamos para achar o ponto d' .

Na figura 123 representa-se o desenvolvimento do tetraedro que, como dissemos anteriormente, é formado por quatro triângulos equiláteros iguais ao desenhado na projeção horizontal $a-b-c$.

Cubo. O cubo é o poliedro regular que é formado por seis faces iguais planas e quadradas. Na figura 124 representa-se o cubo, em suas projeções, tendo duas faces $a-b-c-d$, $a'-b'-c'-d'$ e $e-f-g-h$, $e'-f'-g'-h'$, paralelas ao plano V de projeção e as demais são perpendiculares.

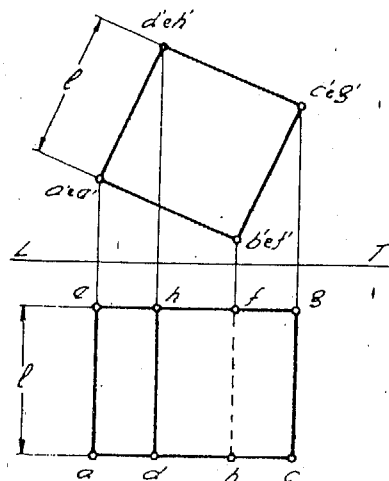
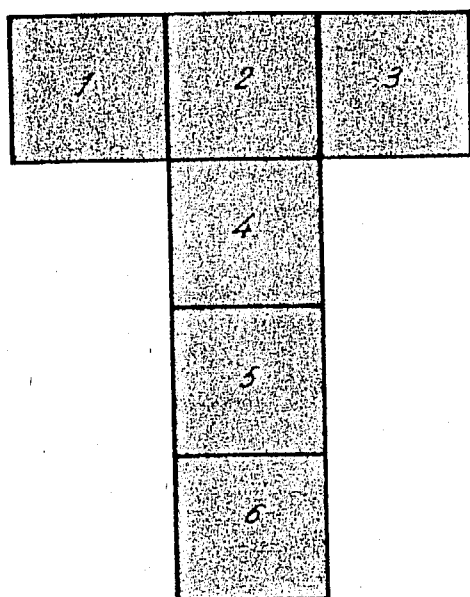


Figura 124

A aresta $b-f$ na projeção horizontal se vê por pontos por estar *oculta*. O desenvolvimento foi desenhado na figura 125. A representação do cubo da figura 126, deverá ser determinada conhecendo somente a posição das diagonais a_1-c_1 , $a'_1-c'_1$ e e_1-g_1 , $e'_1-g'_1$ de duas faces perpendiculares ao plano vertical e o lado l .

A melhor forma de achar a representação deste cubo consistirá em colocar o cubo sobre o plano H de projeção que, neste caso, é o sombreado. Depois se toma o eixo de rotação $E-E'$, situado no ponto horizontal que passa pelo ponto $c-c'$, sendo perpendicular ao plano vertical, girando o cubo sombreado até determinar o cubo na representação que desejamos.

A representação mais simples do cubo é a que ilustra a figura 127, sendo esta a projeção $A-A'$. A este cubo deu-se uma dupla rotação: primeiro em redor de um eixo $E-E'$ de ponta, perpendicular ao plano H de projeção, determinando a posição $A_1-A'_1$. A segunda rotação foi feita em redor de outro eixo de ponta $E_1-E'_1$ perpendicular ao plano V de projeção, obtendo-se a nova posição $A_2-A'_2$, semelhante à posição da figura 126.



Desenvolvimento do cubo

Figura 125

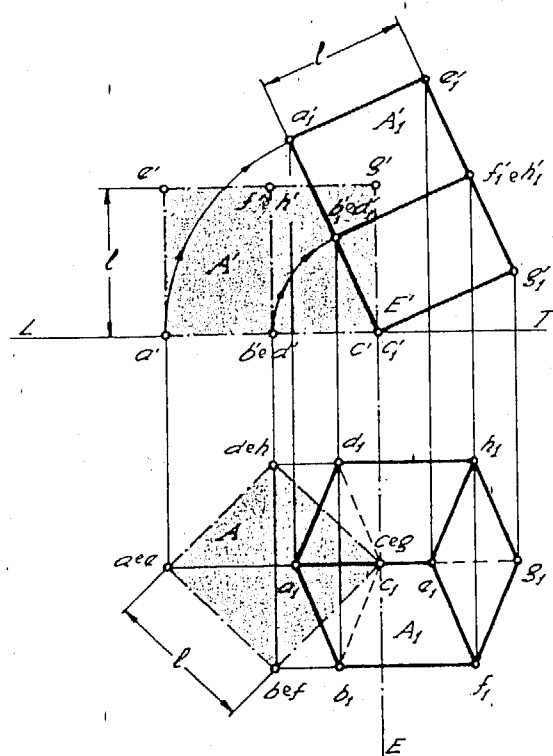


Figura 126

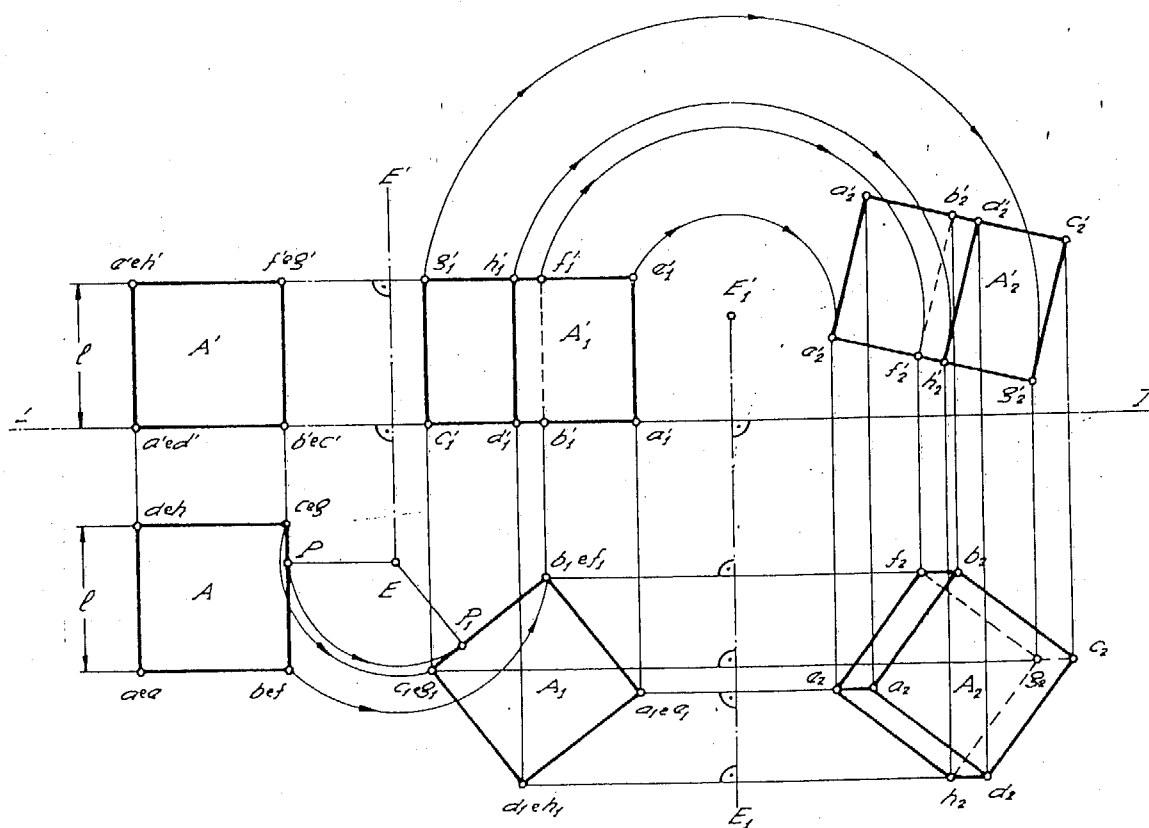


Figura 127

Octaedro (fig. 128). O octaedro é formado por oito faces iguais em forma de triângulos equiláteros.

Quando um de seus planos diametrais é paralelo a um dos planos de projeção (neste caso o plano H), é suficiente uma simples observação da figura

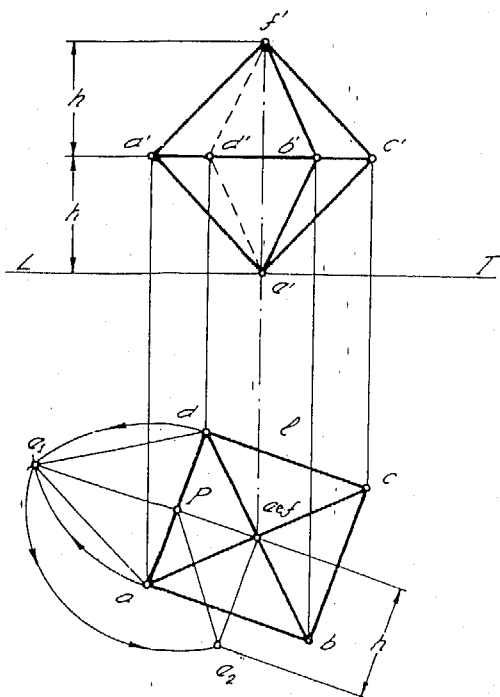


Figura 128

para representá-lo no sistema diédrico. O triângulo sombreado é a verdadeira grandeza de uma face rebatida. A figura 129 representa o desenvolvimento do octaedro, formado por oito triângulos equiláteros iguais ao sombreado.

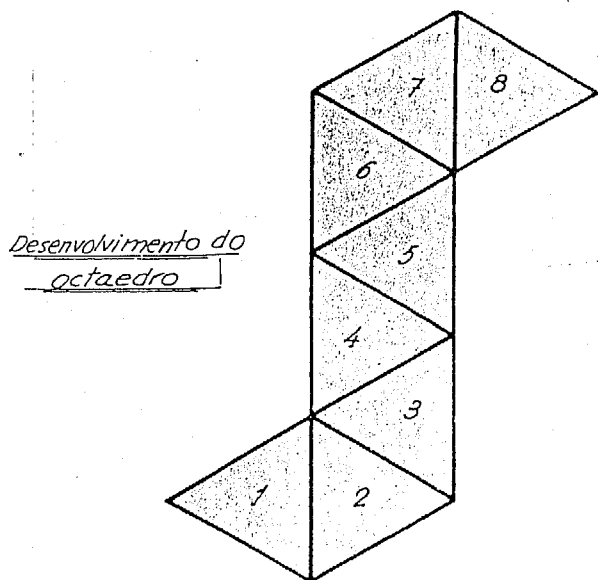


Figura 129

Dodecaedro (fig. 130). O dodecaedro é o poliedro regular de doze faces pentagonais. A representação mais simples desta superfície é aquela em que uma de suas faces (que é um pentágono regular) coincide com o plano H de projeção, sendo um de seus lados paralelo à $L-T$.

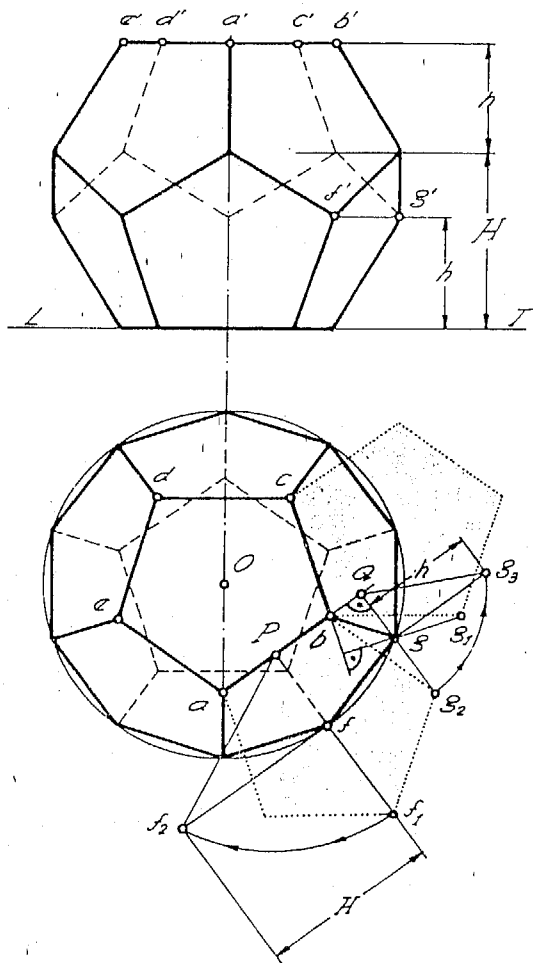


Figura 130

Tomam-se dois lados contíguos quaisquer $a-b$ e $b-c$ como *charneiras* e giramos as faces adjacentes a estes lados, em redor da *charneira* respectiva, até que as duas faces fiquem paralelas ao plano H de projeção, permanecendo como foram desenhadas na figura e conforme foram sombreadas.

Estando a aresta $b-g$ rebatida em redor das duas *charneiras* $a-b$ e $b-c$, a mesma nos determina as arestas $b-g_1$ e $b-g_2$ rebatidas.

Desde g_1 e g_2 traçam-se perpendiculares a suas correspondentes *charneiras*, determinando os pontos de intersecção g e Q .

Tomando O como centro descreve-se uma circunferência passando por g e dividida em dez partes iguais, unindo estes pontos de divisão por meio de retas, ficando, desta forma, representada a projeção horizontal deste sólido.

Para achar a altura H e h da projeção vertical, a determinação é feita como se vê na projeção horizontal.

O desenvolvimento do dodecaedro (fig. 131) é formado por doze pentágonos regulares iguais.

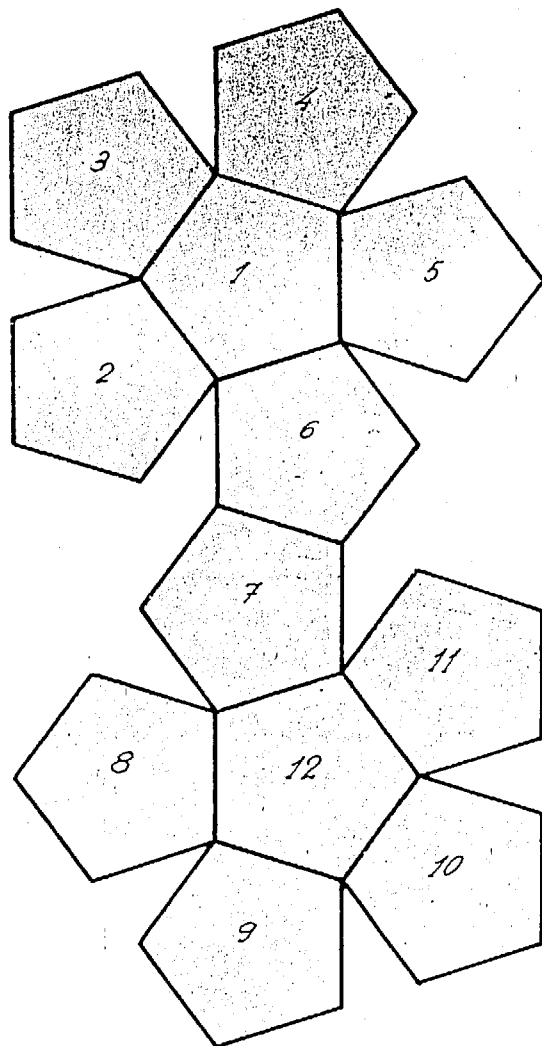


Figura 131

Icosaedro (fig. 132). O icosaedro é o poliedro regular, formado por vinte faces triangulares (triângulos equiláteros).

A representação em *planta* é feita desenhando um pentágono regular de lado l , igual ao lado do triângulo equilátero de uma face, sendo um lado do pentágono paralelo à $L-T$. A seguir, desenha-se outro pentágono, como mostra a figura, e unem-se os vértices dos dois pentágonos regulares, determinando as distâncias h e H que precisamos para a representação da vista em *elevação*.

A figura 133 representa o desenvolvimento do icosaedro.

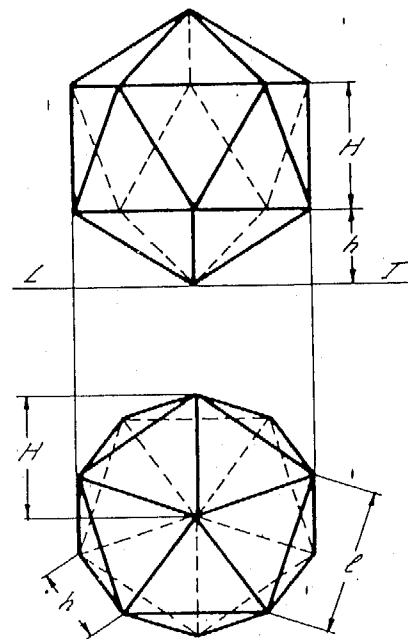


Figura 132

Prismas e Pirâmides

Prisma. O prisma é o poliedro irregular, limitado por duas faces paralelas entre si, chamadas bases que são polígonos quaisquer, mas iguais e com faces laterais que são paralelogramos.

As arestas laterais do prisma são iguais entre si.

Os lados dos polígonos das bases chamam-se *arestas básicas*.

Prisma oblíquo (fig. 134). Este prisma é o que tem as arestas laterais oblíquas às bases, sendo representado tal como se ilustra na figura, levando em consideração as partes *visíveis* e *ocultas*.

Prisma reto (fig. 135). É o que tem as arestas perpendiculares às bases, sendo estas retas de topo.

Pirâmide. A pirâmide é o poliedro irregular, limitado por um polígono qualquer chamado base e por faces laterais triangulares que concorrem para um mesmo ponto chamado vértice. Os lados dos triângulos que concorrem para o vértice chamam-se *arestas* e os lados do polígono da base recebem o nome de *arestas básicas*.

Pirâmide oblíqua. A figura 136 representa uma pirâmide de base pentagonal irregular, situada no plano H de projeção, sendo seu vértice $V-V'$.

A projeção horizontal desta pirâmide se obtém unindo os vértices do polígono $a-b-c-d-e$ com o

Desenvolvimento do icosaedro

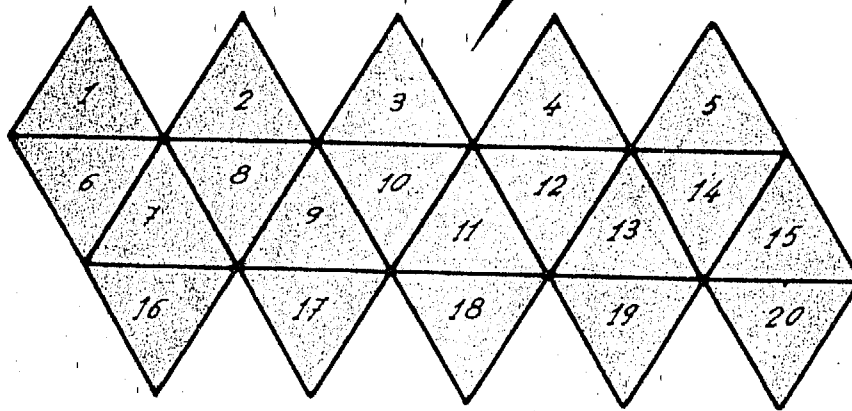


Figura 133

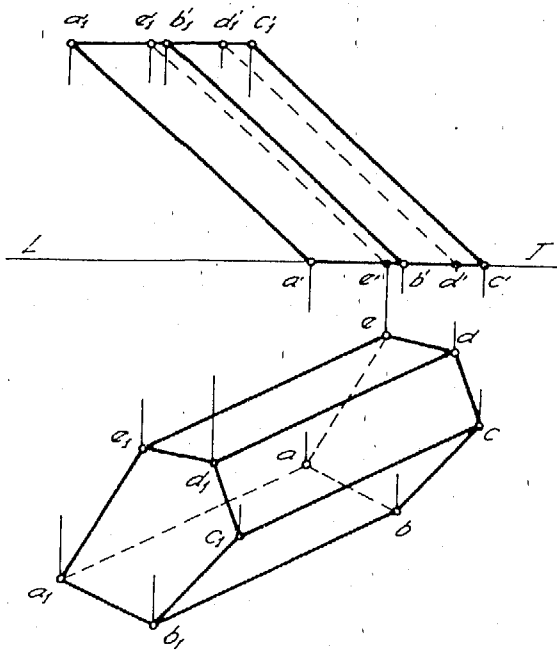


Figura 134

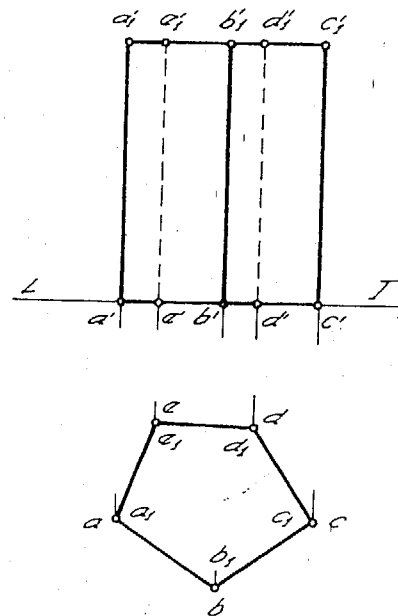


Figura 135

vértice V . As arestas $V-e$ e $V-b$ limitam as partes *visíveis* (desenhadas com linhas grossas) e partes *ocultas* (desenhadas com linhas descontínuas e finas).

Para determinar a projeção vertical traçam-se perpendiculares à $L-T$, desde os pontos $a-b-c-d-e$, determinando os pontos $a'-b'-c'-d'-e'$ que, unidos com o ponto V' , determinam a projeção vertical.

Nesta projeção, a aresta $V'-d'$ é a única que não é visível; isto quer dizer que as faces $V'-c'-d'$ e $V'-d'-e'$ são *ocultas*.

Pirâmide reta (fig. 137). A representação desta pirâmide reta de base quadrada, situada no plano H de projeção, é feita como no caso anterior, tendo em conta que toda a superfície será *visível* na projeção horizontal, por ser o vértice V interno à base.

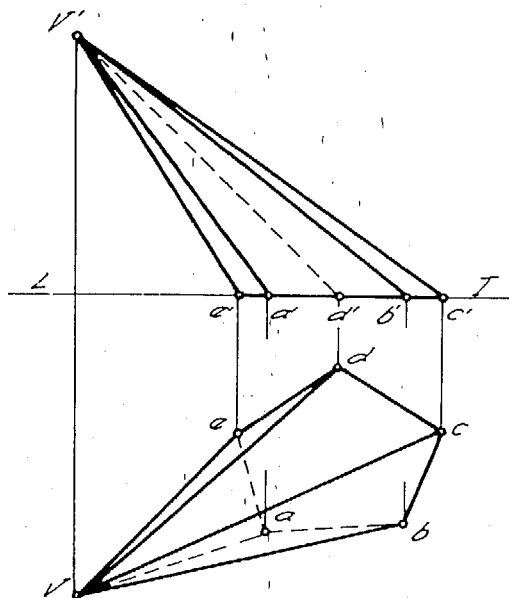


Figura 136

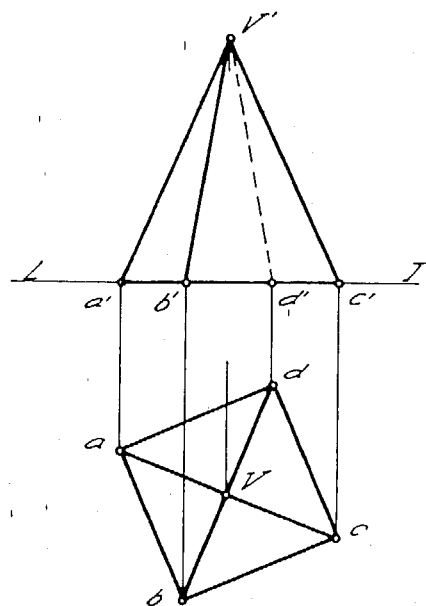


Figura 137

As curvas mais comuns

Arcos de circunferência de grande raio. Quando por exigências do trabalho tivermos que traçar arcos de grande raio e não dispusermos de um compasso suficientemente grande para poder traçá-lo, empregaremos qualquer um dos seguintes procedimentos:

Primeiro procedimento (fig. 138). Representam-se a corda $A-B$ e a flecha $C-D$; desde o ponto D traça-se uma paralela indefinida à corda, determinando o ponto E ao cortar a perpendicular traçada no ponto B . A seguir, unem-se os pontos B e D por meio de uma reta e, no ponto B , traça-se uma perpendicular a esta reta, determinando o ponto F sobre o prolongamento da reta $D-E$. As retas $B-C$, $D-F$ e $B-E$ dividem-se em um mesmo número de partes iguais cada uma delas (em quatro partes, por exemplo); formando-se os pontos $a-b-c$, $a_1-b_1-c_1$ e $a_2-b_2-c_2$ que se unem como se vê

na figura, determinando os pontos $a_3-b_3-c_3$, pertencentes à curva do arco. Os pontos $B-a_3-b_3-c_3$ e D se unem por meio de uma régua flexível que se flexiona até coincidir com os pontos citados, ficando assim traçado meio arco; usando o mesmo procedimento para a outra metade, ficará traçado por completo o arco desejado.

Segundo procedimento (fig. 139). Neste caso, como no anterior, só foram determinados os pontos correspondentes a meio arco.

Tomando como centro o ponto D descreve-se um arco indefinido partindo do ponto B . Também desde D se traça uma paralela à semicorda $B-C$, cortando o arco anterior em E ; este arco $B-E$ é dividido em um número qualquer de partes iguais (quatro, por exemplo) e se unem os pontos de divisão com o ponto D . No ponto médio b_1 da reta $B-D$ se traça uma perpendicular, determinando sobre a reta $b-D$ o ponto de intersecção b_2 pertencente ao arco. Unem-se os pontos B e b_2 por

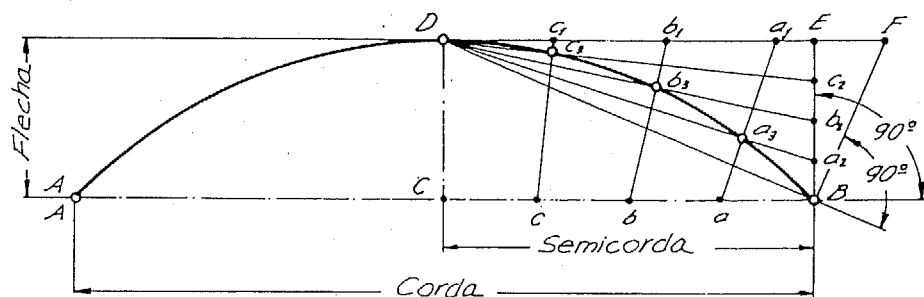


Figura 138

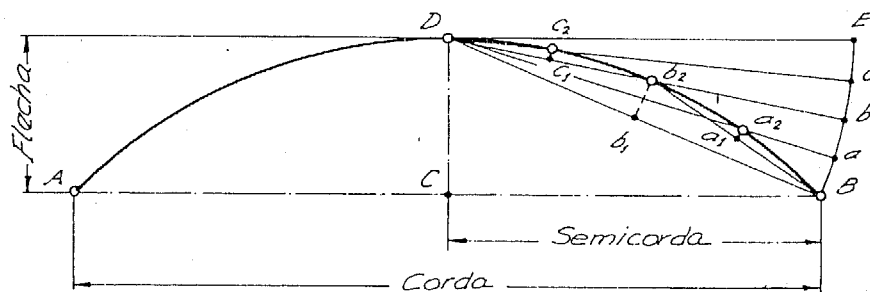


Figura 139

meio de uma reta e em seu ponto médio a_1 se traça uma perpendicular, cortando a reta $a-D$ no ponto a_2 . A mesma operação é feita com o ponto médio c_1 da reta $c-D$ para determinar o ponto c_2 .

Terceiro procedimento (fig. 140). Tomando como centro os pontos A e B , descrevem-se arcos partindo do ponto C e cortando as retas $A-D$ e $B-D$ nos pontos O e O' ; sobre estes arcos transpor-

é paralelo a duas geratrizes, a curva da seção chamar-se-ia de *hipérbole*. As figuras 141, 142 e 143 representam estas curvas pela ordem como são citadas.

Teorema de Dandelin. Os focos de toda seção plana de um cone de rotação são os pontos de tangência das esferas inscritas no cone com o plano secante.

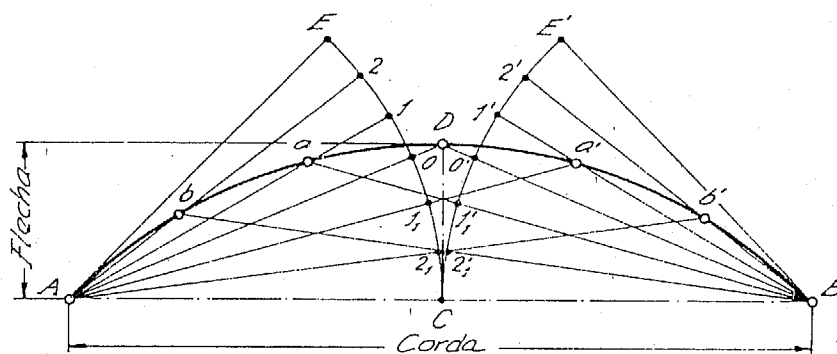


Figura 140

tam-se as distâncias $O-C = O'-C$, determinando os pontos E e E' . Os Arcos $E-C$ e $E'-C$ se dividem em certo número de partes iguais (seis, por exemplo) e se unem os pontos de divisão $1, 2, 1_1$ e 2_1 com o ponto A e $1', 2', 1'_1$ e $2'_1$ com o ponto B . Prolongando as retas que passam pelos pontos $1_1, 2_1$ e $1'_1, 2'_1$, determinam-se sobre as retas $1, 2$ e $1', 2'$ os pontos a, b e a', b' , respectivamente, pertencentes ao arco, e ligados por meio de uma régua flexível.

Cônicas. Chamam-se *cônicas* as seções produzidas em uma superfície cônica de rotação por um plano secante que não passa pelo vértice. Quando o plano secante não é perpendicular ao eixo do cone de rotação e corta todas as geratrizes da superfície, a seção é chamada de *elipse*; se o plano secante é paralelo a uma só geratriz, a curva formada pela seção é chamada de *parábola* e, se o plano

Primeiro caso: elipse. A figura 141 dá uma perspectiva de um cone de vértice V situado em um plano Q e seccionado obliquamente, determinando a seção elíptica E que é sombreada. Os focos F e F' são os pontos de contato das esferas de centro O e O_1 tangentes ao plano da *elipse* e inscritas no cone ao longo dos círculos C e C_1 .

Escolheu-se um ponto P qualquer da *elipse* para demonstrar que $\overline{P-F} + \overline{P-F'}$ é igual à *constante*, verificando-se assim esta propriedade geral. Pelo ponto P se traça uma geratriz do cone, cortando os paralelos C e C_1 em a e b (recordemos que os paralelos C e C_1 são as circunferências de contato das esferas com o cone).

Sabemos que $\overline{P-a} + \overline{P-b} = \overline{P-F} + \overline{P-F'}$ é *constante* porque $\overline{P-a} = \overline{P-F}$ por ser duas tangentes traçadas à esfera O desde um ponto externo P , e $\overline{P-b} = \overline{P-F'}$ por ser também duas tangen-

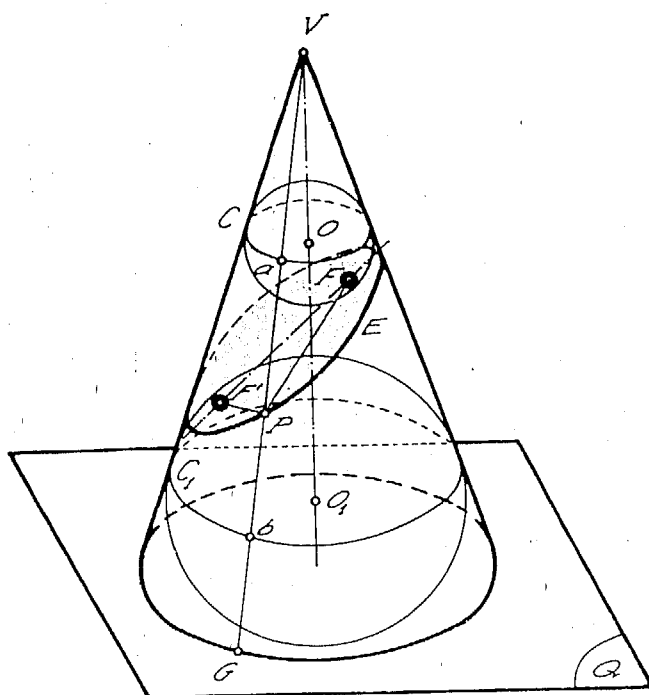


Figura 141

tes traçadas à esfera O_1 desde um ponto externo P ; logo, $\overline{P-a} + \overline{P-b}$ é igual a $\overline{a-b}$.

Considerando que a distância $\overline{a-b}$ é o segmento interceptado em uma geratriz qualquer por dois círculos C e C_1 que são paralelos, esta grandeza é constante para qualquer ponto escolhido, ficando assim demonstrado o teorema.

Segundo caso: parábola. A figura 142 dá uma perspectiva como a da figura anterior, mas seccionando o cone de vértice V por meio de um plano secante que é paralelo a uma só geratriz, sendo neste caso paralelo à geratriz $V-c$. Também temos o paralelo C de contato da esfera com o cone e F , seu ponto de tangência com o plano da parábola; com isto vamos demonstrar que sendo a *diretriz* da parábola a linha de intersecção dos planos Q_2 e Q_3 , verifica-se que $\overline{P-F} = \overline{P-b}$ (P é um ponto qualquer da parábola).

Dissemos anteriormente que o plano da parábola é paralelo à geratriz $V-c$ que se obtém traçando pelo vértice do cone um plano Q_1 paralelo ao plano Q_2 da parábola, sendo tangente à superfície cônica ao longo da geratriz $V-c$.

A reta $P-b$ é, por condição, perpendicular à *diretriz* da parábola e, portanto, é paralela à geratriz $V-c$.

Também consideramos que $\overline{P-F} = \overline{P-a}$ por ser duas tangentes traçadas à esfera O desde um ponto externo P .

Trasladando o segmento $P-b$, conforme a dire-

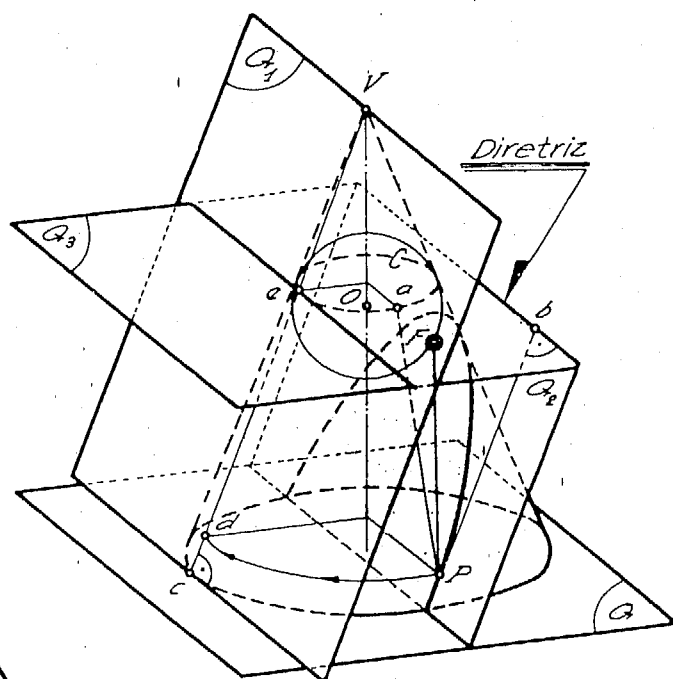


Figura 142

ção do cone, até ocupar a direção $e-d$ sobre a geratriz $V-c$, situando o ponto e no paralelo C , temos: $\overline{d-e} = \overline{P-a}$; logo, como $\overline{d-e} = \overline{P-b}$, o resultado é que $\overline{P-b} = \overline{P-F}$ é a propriedade característica de um ponto da parábola.

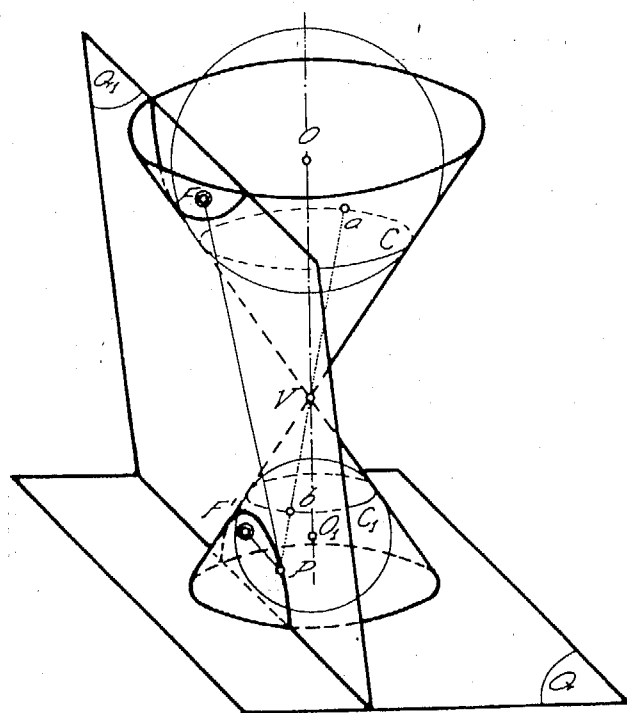


Figura 143

Terceiro caso: hipérbole. Os elementos V , O , O_1 , F , F' , C e C_1 da figura 143 são os mesmos da figura 141, onde se demonstra igualmente que, escolhendo um ponto qualquer P de um dos ramos da hipérbole, temos: $\overline{P-F} - \overline{P-F'} = \overline{P-a} - \overline{P-b} = a-b = \text{constante}$ porque $\overline{P-F'} = \overline{P-b}$ por ser duas tangentes traçadas à esfera O_1 desde um ponto externo P e $\overline{P-F} = \overline{P-a}$ por ser também duas tangentes traçadas à esfera O desde o ponto P .

Traçado da elipse. A elipse é uma curva plana formada por um ponto que se move em um plano, de forma que a soma das distâncias deste ponto a outros dois, que se chamam focos e permanecem fixos, é sempre a mesma. Conforme a figura 144, o ponto móvel é representado pelas letras P , P_1 e P_2 e, os focos, pelas letras F e F' .

A elipse consta dos seguintes elementos:

Centro: O

Vértices: A , B , C e D .

Focos: F e F' .

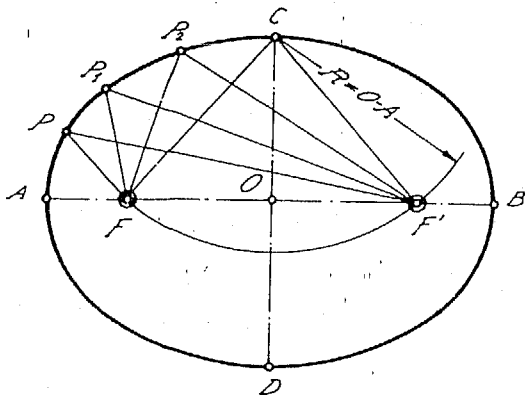


Figura 144

Eixo maior: $\overline{A-B} = 2a$.

Eixo menor: $\overline{C-D} = 2b$.

Distância entre focos: $\overline{F-F'} = 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

a = semi-eixo maior.

b = semi-eixo menor.

Raios vetores: $\overline{F-P}$, $\overline{F'-P}$, $\overline{F-P_1}$, $\overline{F'-P_1}$, etc.

Constante: $\overline{F-P} + \overline{F'-P} = \overline{F-P_1} + \overline{F'-P_1} = \dots = \overline{F-P_2} + \overline{F'-P_2}$, etc.

Para o traçado da elipse existem vários procedimentos, como se expõe a seguir.

Primeiro procedimento (fig. 145). Dados os dois eixos $A-B$ e $C-D$ da elipse, descreve-se um arco de centro C e de raio R igual ao semi-eixo maior $O-A$ que corta o eixo maior nos pontos F e F' , sendo estes os focos. Entre a distância O e F' marca-se um número qualquer de pontos 1-2-3, etc. e em qualquer posição, pois não é necessário que estejam a igual distância.

Com uma abertura de compasso igual à distância $A-I$, descreve-se um arco de centro F e outro de centro F' , tomando também como centro estes

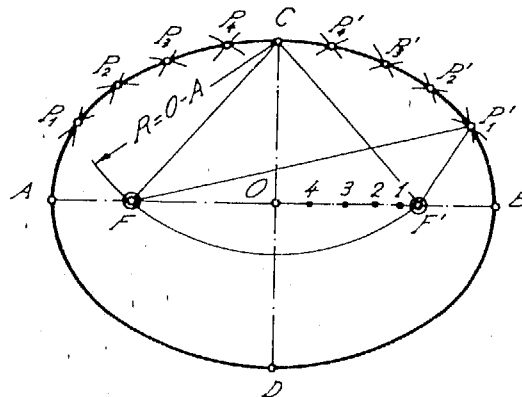


Figura 145

pontos, descrevem-se outros arcos de raio igual à distância $B-I$, determinando sobre os arcos anteriores os pontos de intersecção $P_1 - P'_1$. Desta mesma forma acham-se os pontos $P_2, P'_2, P_3, P'_3, P_4, P'_4$ e quantos mais desejarmos e que se ligam por meio de uma curva contínua.

Segundo procedimento (fig. 146). Divide-se o semi-eixo maior $O-A$ em qualquer número de partes iguais (três, por exemplo); depois traça-se uma perpendicular no vértice A e dando-lhe uma distância igual ao semi-eixo $O-C$, dividindo esta distância no mesmo número de partes iguais em que o semi-eixo $O-A$ tiver sido dividido anteriormente. Depois unem-se os pontos de divisão I e II com o vértice C e desde o vértice D traçam-se retas passando pelos pontos 1 e 2, cortando as retas anteriores nos pontos $P_1 - P_2$ pertencentes à elipse. Para traçar o resto da elipse opera-se da mesma forma.

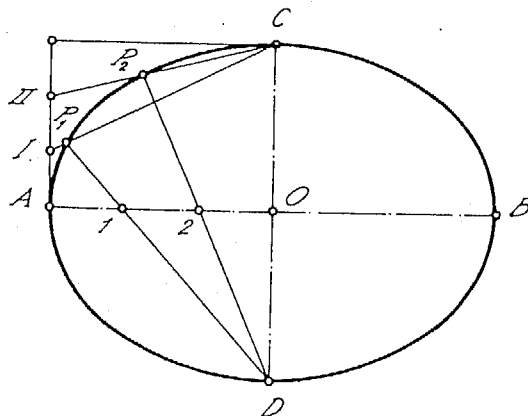


Figura 146

Terceiro procedimento (fig. 147). Tomando como centro o ponto O , descrevem-se duas circunferências de diâmetros iguais aos eixos maior $A-B$ e menor $C-D$ da elipse. Em qualquer posição se traça uma reta passando pelo centro O e cortando as circunferências nos pontos c e c_1 , respectivamente; desde o ponto c se traça uma paralela ao eixo maior $A-B$ e, desde c_1 , traça-se uma perpendicular a esta paralela, cortando-a no ponto c_2 , pertencendo este à curva da elipse. Repetindo esta

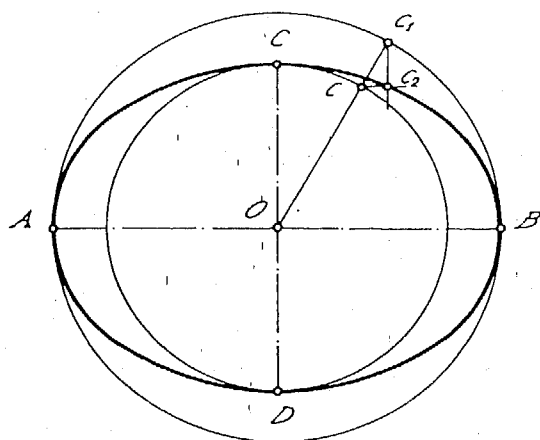


Figura 147

mesma operação podemos determinar todos os pontos que desejarmos.

Quarto procedimento (fig. 148). Sobre uma régua metálica ou de madeira se traçam as distâncias $M-P$ igual ao semi-eixo $O-A$ e $P-N$ igual ao semi-eixo $O-C$. Os pontos M e N deslizam pelos eixos maior e menor, respectivamente, da elipse, pondo-se em movimento o ponto P que descreve a curva da elipse.

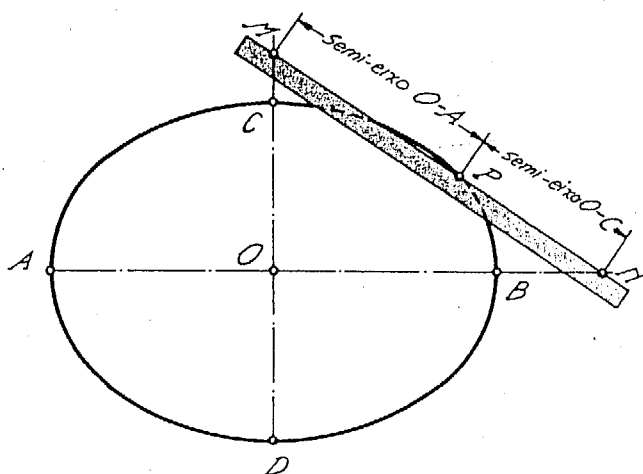


Figura 148

Quinto procedimento (fig. 149). Com uma régua como a do exercício anterior, marca-se o ponto P e, a partir deste ponto, traçam-se as distâncias $P-M$ e $P-N$ iguais aos semi-eixos da elipse. Os pontos M e N da régua deslizam pelos eixos maior e menor, respectivamente, descrevendo o ponto P da curva elíptica.

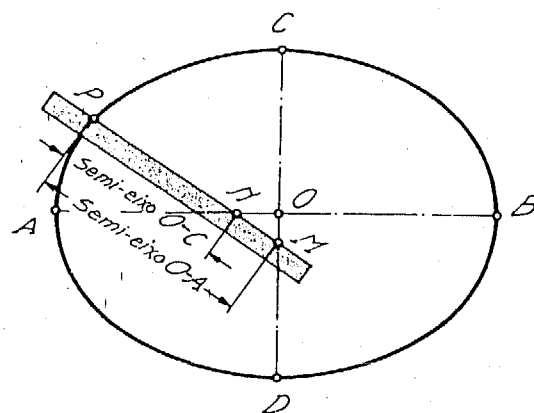


Figura 149

Traçado de uma tangente à elipse por um ponto qualquer da mesma (fig. 150). Traçam-se os

raios vetores correspondentes a um ponto qualquer, sendo este o ponto P , e se prolonga um dos raios vetores (neste caso o raio vetor $F-P$). Tomando como centro o ponto P , descreve-se um arco de raio qualquer, cortando no ponto a o prolongamento do raio vetor $F-P$ e, em b , o raio vetor $F'-P$. Com uma abertura qualquer de compasso se descrevem arcos de centro a e b até se cortarem; traça-se uma reta passando pelo ponto de intersecção dos dois arcos e o ponto P , sendo esta a tangente.

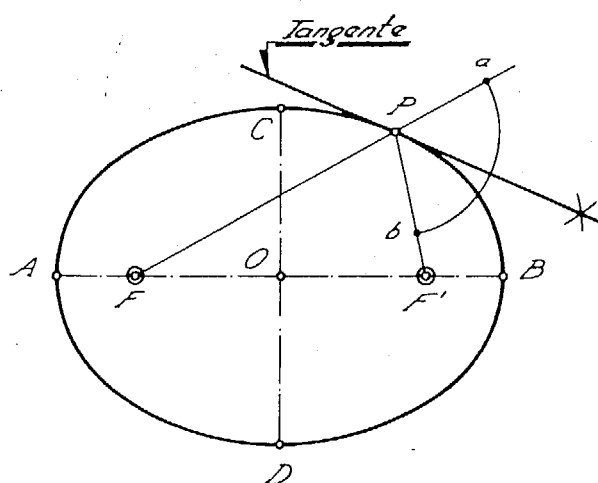


Figura 150

Traçado do oval (fig. 151). Trataremos do oval neste capítulo de elipse porque a sua curva é muito semelhante a esta, embora, como veremos a seguir, o oval é formado por quatro arcos de circunferência iguais, dois a dois.

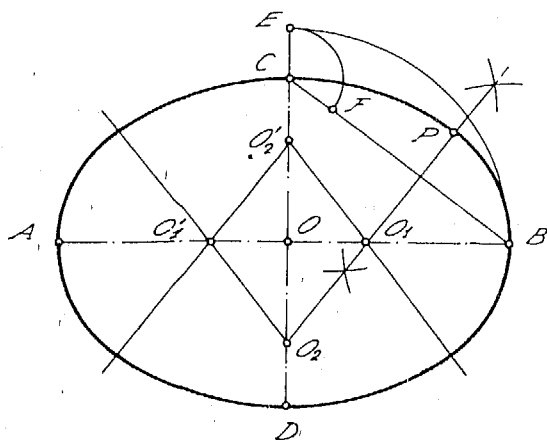


Figura 151

Unem-se as extremidades B e C dos eixos e tomando como centro o ponto O , descreve-se um arco de raio igual ao semi-eixo maior que parte de B e corta o eixo vertical no ponto E' ; depois se descreve outro arco de centro C e que parte de E , cortando a reta $B-C$ no ponto F . Traçando uma perpendicular no ponto médio de $B-F$ obtém-se, por sua intersecção com os eixos, os pontos O_1 e O_2 ,

pertencentes aos centros das curvas. A seguir, com um raio igual à distância O_1-B e centro O_1 , descreve-se um arco que corta a reta que une os centros no ponto P ; depois descreve-se outro arco de centro O_2 e que parte de C até cortar a reta anterior no ponto P .

Desta forma fica traçado um quadrante. Portanto, os quadrantes restantes traçam-se igualmente por serem simétricos entre si.

Superfícies cujas projeções proporcionam elipses. Consideremos um cilindro reto ou um cone de rotação cujos eixos são uma *frontal* ou uma *horizontal* (nestes dois casos trata-se de uma *frontal* conforme as figuras 151 e 153). As suas projeções, na vista em *planta* e de *perfil* e as bases circulares se projetam em forma de *elipses*.

Na figura 152 são dadas as três vistas do cilindro reto, cujos eixos, como dissemos, é uma *frontal*. (Recordemos que uma reta é chamada de *frontal* quando é paralela ao plano vertical de projeção e inclinada ao plano H de projeção).

Conhecendo a vista em *elevação*, determina-se as outras duas vistas da seguinte maneira:

Sobre o diâmetro da base do cilindro (fig. 152) descreve-se uma semicircunferência que se divide em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Pelos pontos de divisão traçam-se paralelas ao eixo do cilindro, determinando sobre as bases do mesmo os pontos $a'-b'-c'$, etc. e $a''_1-b''_1-c''_1$, etc.

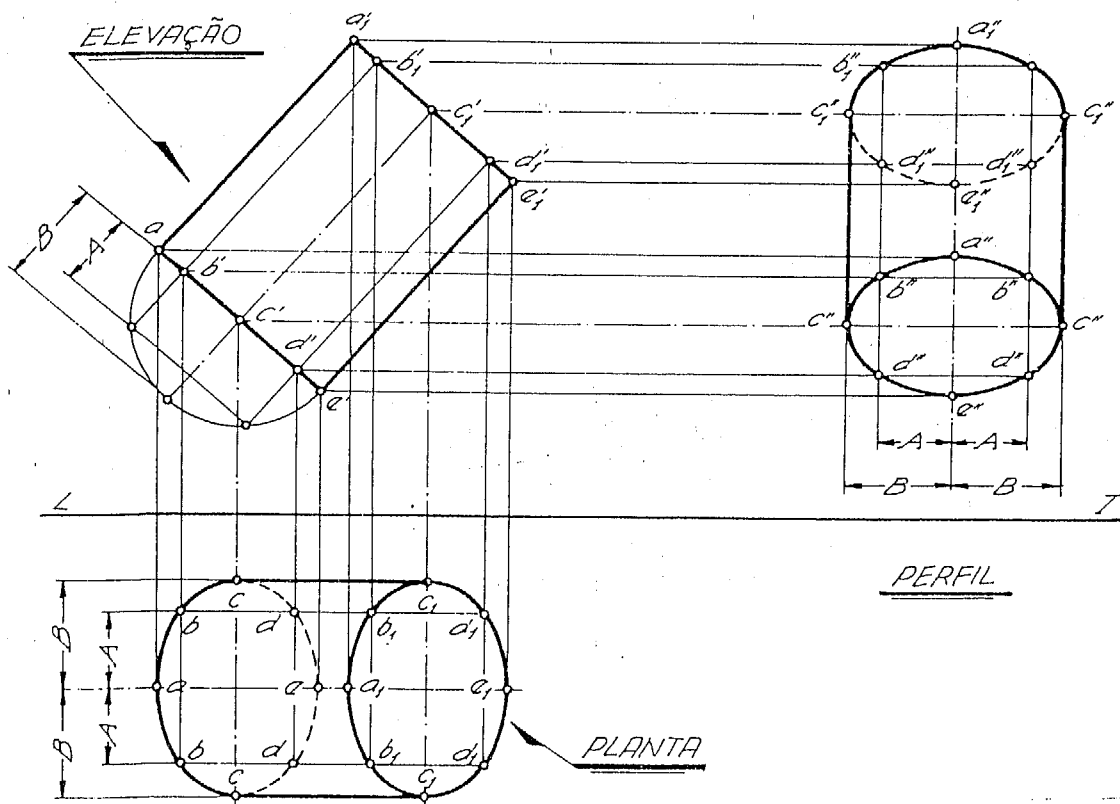


Figura 152

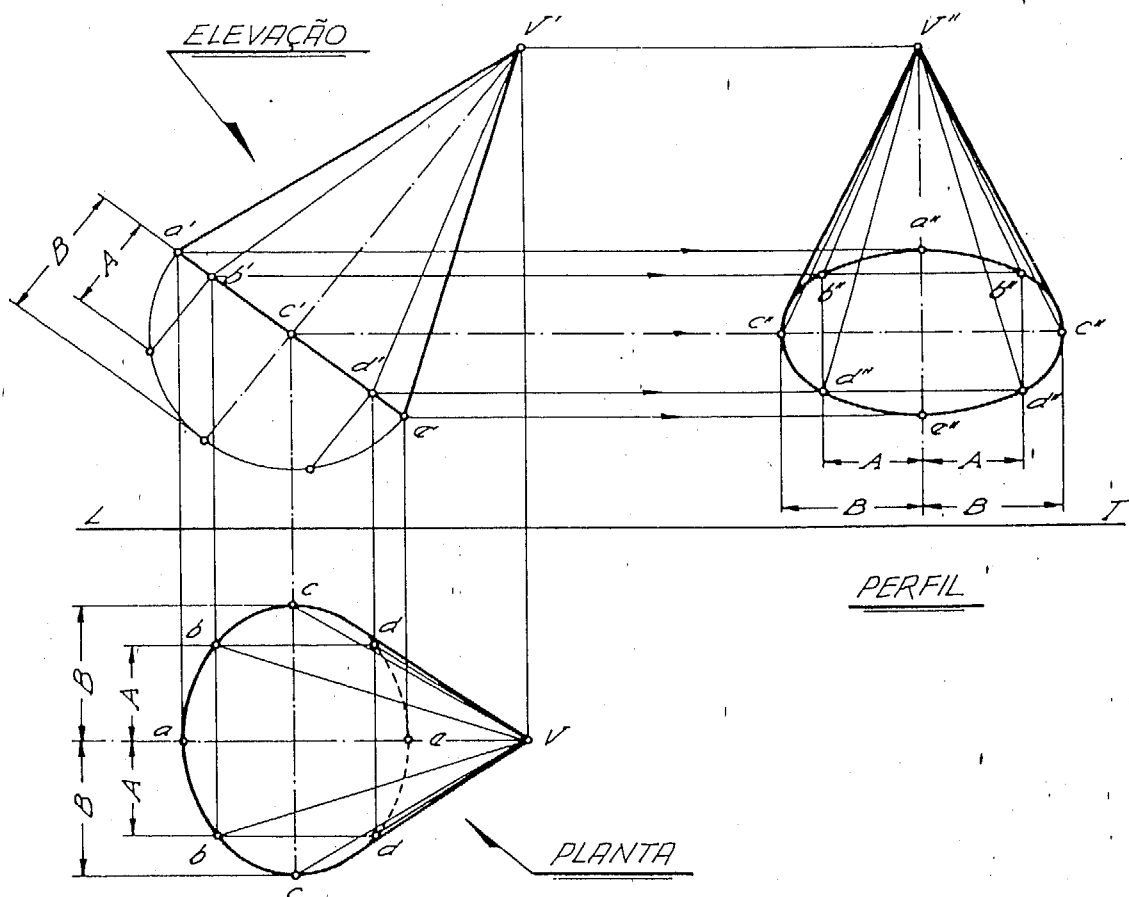


Figura 153

Na vista em *planta* desenha-se o eixo do cilindro, paralelamente à $L-T$, e se traçam em ambas as partes deste paralelas indefinidas à distância A e B tomadas da *elevação*. Em seguida traçam-se perpendiculares a estas paralelas desde os pontos $a'-b'-c'$, etc. e $a_1'-b_1'-c_1'$, etc., cortando-as nos pontos $a-b-c$, etc. e $a_1-b_1-c_1$, etc. que se unem ordenadamente por meio de uma régua flexível, obtendo-se assim as elipses que formam as bases circulares ao serem projetadas na vista em *planta*. A vista de *perfil* se acha da mesma forma, tendo em conta que o desenho terá linhas grossas nas partes visíveis e pontos nas partes ocultas.

Na figura 153 temos a representação das três projeções do cone que, como foi dito anteriormente, têm como eixo uma *frontal*. Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro da base do cone na vista em *elevação* e se divide em um número qualquer de partes iguais. Traçando pelos pontos de divisão paralelas ao eixo do cone, determinam-se sobre o diâmetro do mesmo os pontos $a'-b'-c'$, etc., e desde o vértice V' do cone, traçam-se retas geratrizes que passam por estes pontos, determinando as geratrizes do cone.

As vistas em *planta* e de *perfil* da base do cone são determinadas da mesma forma que as do cilin-

dro anterior. O vértice V' do cone se projeta perpendicularmente ao eixo do cone na vista em *planta*, assim como no eixo da vista de *perfil*, determinando os vértices V e V'' , respectivamente.

Desde o vértice V traçam-se retas geratrizes que passam pelos pontos $a-b-c-d-e$ e tangentes à elipse, sendo estas as geratrizes de contorno aparente. A mesma operação é feita com a vista de *perfil*.

Nota. Note-se que as geratrizes de divisão $c-c_1$ vistas em *planta* da figura 152 coincidem com as geratrizes de contorno aparente, assim como na vista de *perfil*, não ocorrendo o mesmo no cone nestas duas últimas vistas.

Traçado da parábola (fig. 154). A parábola é a curva que determina um plano secante ao seccionar um cone de rotação paralelamente a uma geratriz do mesmo, sem passar por seu vértice. Em qualquer ponto da parábola, a sua distância à *diretriz* será igual ao seu raio vetor, como por exemplo: a distância do ponto P à diretriz é igual ao raio vetor $P-F$, assim como a distância de P_1 à *diretriz* será igual a P_1-F .

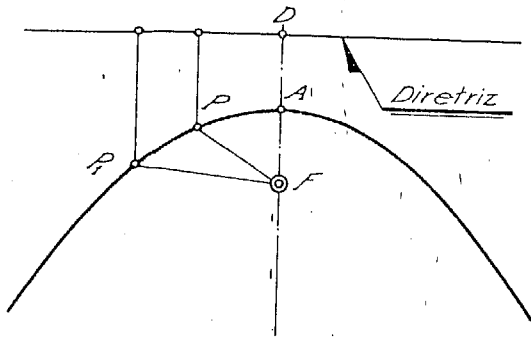


Figura 154

A parábola consta dos seguintes elementos:
Eixo: a reta que passa por D e F.

Foco: F.

Vértice: A.

Diretriz: a reta perpendicular ao eixo no ponto D.

Raios vetores: $\overline{FP}$, $\overline{FP_1}$, etc.

Parâmetro: $\overline{FD}$.

$$\text{Distância: } \overline{FA} = \overline{AD} = \frac{\overline{FD}}{2}.$$

A seguir serão explicados vários procedimentos para o traçado da parábola.

Primeiro procedimento (fig. 155). Sobre o eixo, a partir do vértice, marcam-se vários pontos em qualquer distância entre si, sendo estes os pontos 1-2-3-4, etc., onde se traçam perpendiculares a ambas as partes do eixo. Depois, traçam-se arcos

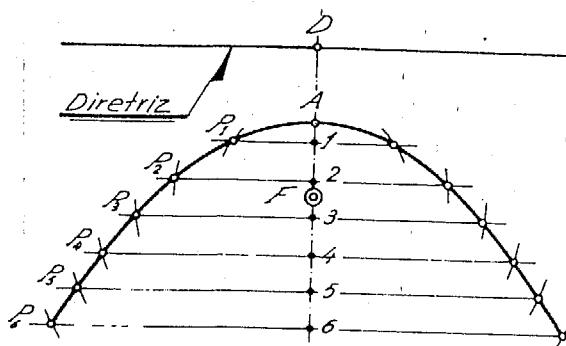


Figura 155

de centro F com raios iguais às distâncias existentes desde estes pontos até a diretriz, cortando as perpendiculares da mesma origem, determinando os pontos P_1 - P_2 - P_3 - P_4 , etc. que, unidos por uma curva contínua, determinarão a parábola.

Segundo procedimento (fig. 156). Conhecidas a corda B-C e a flecha A-D, traçaremos a parábola da seguinte maneira:

Na extremidade B da corda traça-se uma perpendicular e, no ponto A, traça-se uma paralela à corda, cortando a perpendicular anterior no ponto E. Dividem-se as distâncias $\overline{A-E}$ e $\overline{B-E}$, cada uma em certo número de partes iguais, determi-

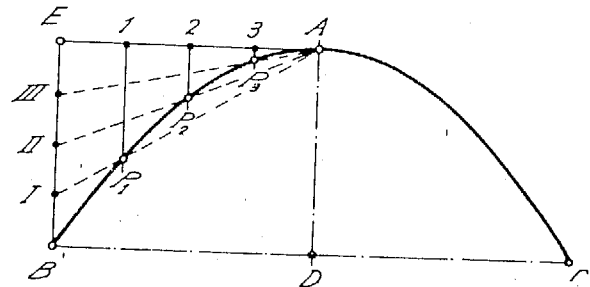


Figura 156

nando os pontos 1-2-3 e I-II-III, unindo estes últimos com o ponto A. Pelos pontos 1-2-3 se traçam paralelas à flecha A-D, cortando as retas anteriores nos pontos P_1 - P_2 - P_3 que, enlaçados por meio de uma curva contínua, determinarão o traçado de meia parábola; a outra metade poderia ser traçada da mesma maneira.

Terceiro procedimento (fig. 157). Neste caso temos os mesmos dados que no procedimento anterior. Divide-se a semicorda B-D em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e nos

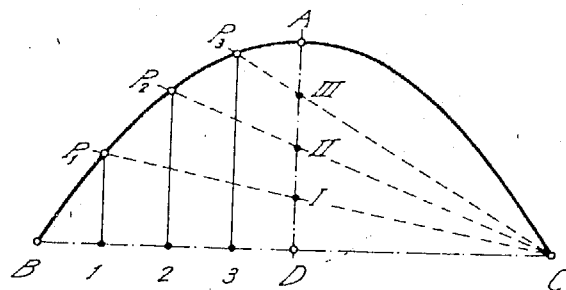


Figura 157

pontos de divisão 1-2-3 traçam-se perpendiculares à corda. Em seguida, divide-se a flecha com o mesmo número de partes iguais que a semicorda e desde C se traçam retas que passam por estes novos pontos de divisão I-II-III, cortando as perpendiculares anteriores em P_1 - P_2 - P_3 , sendo estes os pontos pertencentes à parábola que se unem por meio de uma curva contínua.

Traçado de uma tangente à parábola por um ponto qualquer P desta (fig. 158). Traça-se desde o ponto P uma paralela ao eixo da parábola e que ao mesmo tempo se une com o ponto F. Em seguida, descreve-se um arco de qualquer raio e de cen-

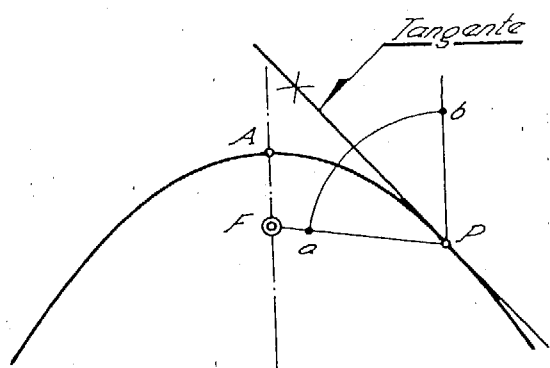


Figura 158

tro P , cortando as retas anteriores nos pontos a e b ; fazendo centro nestes pontos, descrevem-se dois arcos de raio qualquer mas iguais, até se cortarem e se traça uma reta que passa pela intersecção destes dois arcos e pelo ponto P , sendo esta a tangente desejada.

Também se pode traçar a tangente como se vê na figura 159.

Desde o ponto P se traça uma perpendicular ao eixo da parábola, cortando-a no ponto a . Fazendo centro no vértice A , descreve-se um arco que parta de a e que corte o eixo no ponto b que se une com o ponto P , ficando assim determinada a tangente.

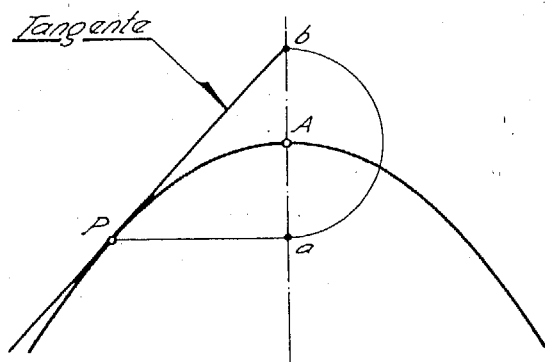


Figura 159

Traçado da hipérbole (fig. 160). A hipérbole é a curva plana que um plano secante determina ao sectionar um cone de rotação, paralelamente a duas geratrizes, sem passar pelo vértice do cone (ver a fig. 143).

A diferença dos raios vetores de qualquer ponto da hipérbole é igual à distância existente entre seus vértices.

A hipérbole consta dos seguintes elementos:

Eixos: as retas que passam por F , F' e O .

Centro: O .

Raios vetores: $\overline{FP}$, $\overline{F'P}$, $\overline{FP_1}$, etc.

Constante: $\overline{F'P} - \overline{FP} = \overline{FP_1} - \overline{F'P_1}$, etc. = $\overline{AA'}$.

Primeiro procedimento (fig. 161). Situados sobre uma reta os focos F e F' e os vértices A e A' , marcam-se pontos sobre o eixo e à esquerda do foco F , estando estes pontos a qualquer distância entre si. Fazendo centro no ponto F , descrevem-se arcos indefinidos de raios iguais às distâncias $\overline{A'-1}$, $\overline{A'-2}$, $\overline{A'-3}$, etc. e tomando como centro o ponto F' , descrevem-se arcos de raios iguais às distâncias $\overline{A-1}$, $\overline{A-2}$, $\overline{A-3}$ etc., cortando os anteriores, determinando os pontos P_1 , P_2 , P_3 , etc. A mesma operação é feita para achar o resto dos pontos da hipérbole.

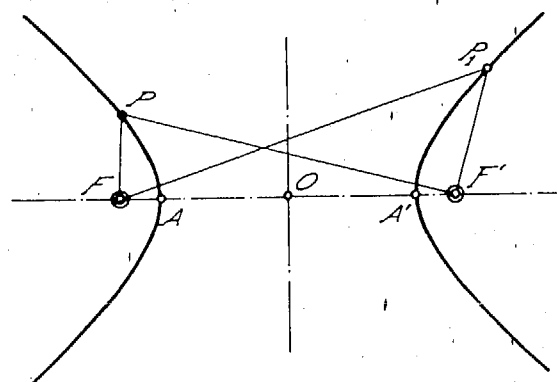


Figura 160

Os pontos P_1 , P_2 , P_3 , etc. se unem com o resto por meio de uma curva contínua.

Segundo procedimento (fig. 162). Representados os vértices A , A' e os focos F , F' sobre uma reta, coloca-se a extremidade de uma régua no foco F , tal como se vê na figura. Na outra extremidade B da régua se amarra um barbante de um comprimento igual ao da régua menos a distância $\overline{A-A'}$. A outra extremidade do barbante é fixada no ponto F' e com um lápis marca-se a curva, como se vê na figura, considerando que o barbante deve estar bem esticado e apoiado no canto da régua. O ponto P é a ponta do lápis.

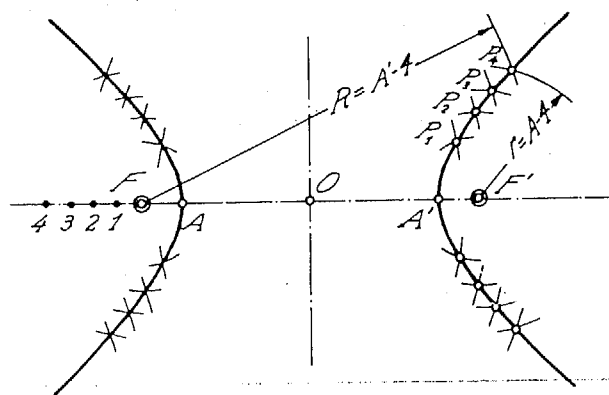


Figura 161

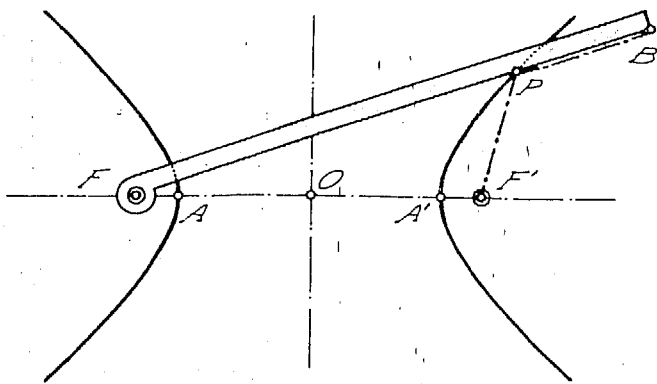


Figura 162

Traçado de uma tangente à hipérbole por um ponto qualquer desta (fig. 163). Une-se o ponto P com os focos F e F' e descreve-se um arco qualquer de centro P , determinando os pontos a e b . Fazendo centro nestes pontos, descrevem-se dois arcos quaisquer do mesmo raio até se cortarem. Pelos pontos de intersecção dos dois arcos e pelo ponto P se traça uma reta, sendo esta a tangente.

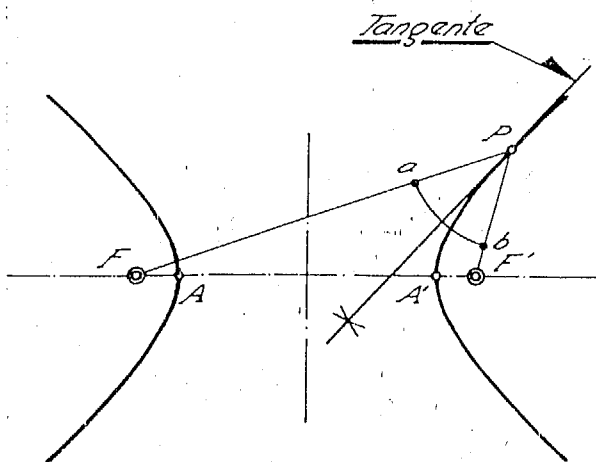


Figura 163

A hélice

A hélice é uma curva arredondada de aplicação muito importante, tanto na mecânica como na construção, sendo a *hélice cilíndrica* a mais empregada.

A hélice cilíndrica é a curva que determina um ponto gerador ao se mover, de tal forma que gira em redor de um eixo sem passar por ele, deslocando-se em direção paralela ao mesmo em segmentos proporcionais à sua rotação.

Elementos da hélice e sua representação (fig. 164). Chama-se passo P o comprimento do segmento paralelo ao eixo da hélice, correspondente a uma volta de 360° do ponto gerador. Chamare-

mos de ponto gerador o ponto N_1 que, conforme vai girando, toma as posições $N_2-N_3-N_4$, etc., e chamaremos de $E-E'$ o eixo da hélice colocado de topo com relação a um dos planos de projeção (neste caso o plano H).

A projeção horizontal da hélice será projetada conforme o círculo de centro E e o raio $R = E-N_1$, projetando qualquer posição do ponto gerador, segundo este círculo.

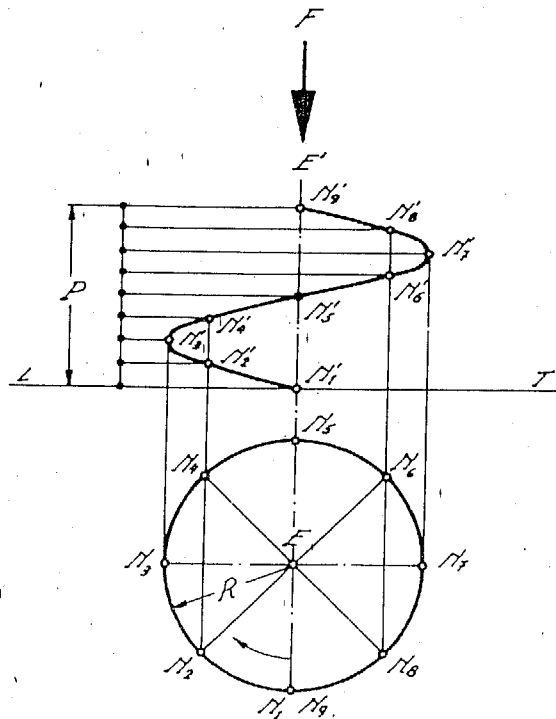


Figura 164

Na projeção horizontal representam-se nove posições do ponto gerador, sendo estas $N_1-N_2-N_3-N_4-N_5-N_6-N_7-N_8-N_9$ (podem ser colocados quantos forem precisos). Colocam-se estes pontos dividindo a circunferência em partes iguais para facilitar a representação da vista em *elevação* que é determinada da seguinte maneira:

Divide-se o passo P em um mesmo número de partes em que foi dividida a circunferência da projeção horizontal e desde os pontos de divisão traçam-se paralelas à $L-T$, cortando as projeções dos pontos $N_1-N_2-N_3$, etc., nos pontos $N'_1-N'_2-N'_3$, etc. unidos por meio de uma curva contínua, ficando assim representada a projeção vertical da hélice.

Chama-se *hélice direita* quando, olhando a hélice pela flecha F (fig. 164), vemos ascender o ponto gerador, girando da direita para a esquerda. A ascensão da esquerda para a direita, seria chamada de *hélice esquerda* (fig. 165).

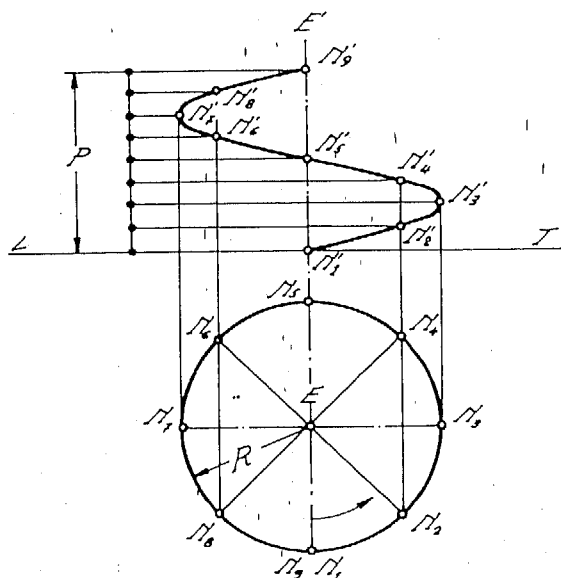


Figura 165

Traçado de uma tangente à hélice por um ponto qualquer desta (fig. 166). O ponto pelo qual deverá ser traçada a tangente é neste caso o ponto N_2 que ocupa uma posição correspondente a um giro de 45° , conforme a projeção horizontal e, portanto, um oitavo de passo $P/8$ na projeção vertical.

Une-se o ponto N_2 com o centro E e se traça uma perpendicular em N_2 , dando-lhe um comprimento igual a um oitavo de desenvolvimento da circunferência de raio R , determinando-se assim o ponto M que, projetado perpendicularmente à $L-T$, cortá-la-ia no ponto M' .

Passando uma reta pelos pontos N_2' e M' estaria traçada a tangente proposta na projeção vertical.

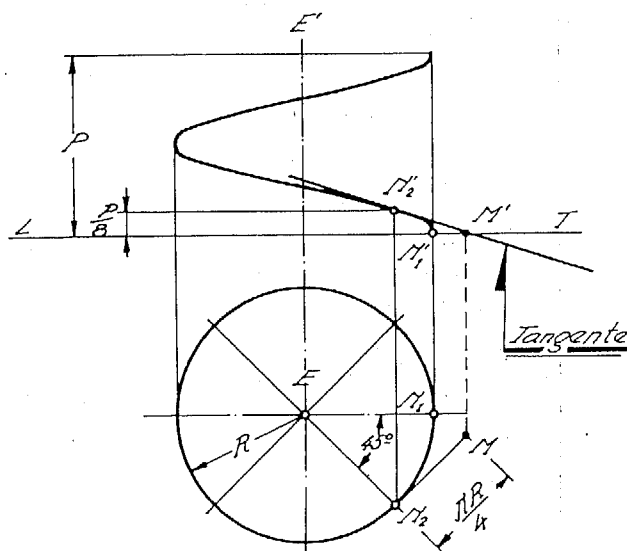


Figura 166

Nota. A hélice, neste caso, teria início no eixo horizontal a partir de N_1 , embora o procedimento para traçá-la seja o mesmo que os anteriores.

Curvas cicloidais

Estas curvas são as geradas pelo movimento de giro de um círculo sobre outro ou sobre uma reta, sem resvalar.

A esta família de curvas correspondem as curvas, *cicloide*, *pericicloide*, *hipocicloide* e *envolvente de círculo*.

Traçado da *ciclóide normal* (fig. 167). O ponto gerador é o ponto P de contato da circunferência de centro O com a base, sendo neste caso a reta P .

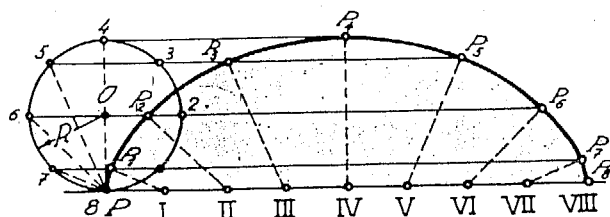


Figura 167

P_8 . Para fazer o traçado da ciclóide divide-se a circunferência com certo número de partes iguais (oito, por exemplo) e numeram-se com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 os pontos de divisão.

A partir do ponto gerador P , traça-se sobre a reta base o desenvolvimento da circunferência de centro O ($= 2\pi R$); este comprimento é dividido em oito partes iguais neste caso, chamando de I, II, III, IV, V, VI, VII e VIII os pontos de divisão.

Desde os pontos 1, 2, 3, etc. da circunferência, traçam-se paralelas indefinidas à reta base e, desde os pontos I, II, III, etc., traçam-se arcos de raios iguais às respectivas cordas P_1 , P_2 , P_3 , etc. da circunferência, cortando as paralelas anteriores da mesma origem nos pontos P_1 , P_2 , P_3 , etc. que, unidos por meio de uma curva contínua, permitem determinar a ciclóide.

Observação. Os arcos anteriores, de igual modo como nas cordas da parte direita da circunferência, não foram desenhados para que se pudesse ver com maior clareza a representação da ciclóide.

Comprimento e superfície da ciclóide. O comprimento da curva P , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 , P_7 e P_8 é igual a oito vezes o raio R da circunferência ($L = 8R$).

A superfície S do segmento compreendido entre a ciclóide e a base é $S = 3\pi R^2$.

Tangente da cicloide (fig. 168). Se for preciso traçar uma tangente à cicloide em um ponto qualquer desta, como por exemplo, no ponto *A*, basta traçar desde este ponto uma paralela à base até cortar a circunferência em *A*₁; depois se traça o comprimento do arco 8-*A*₁ sobre a base a partir do ponto *VIII*, determinando assim o ponto *A*₂ que se

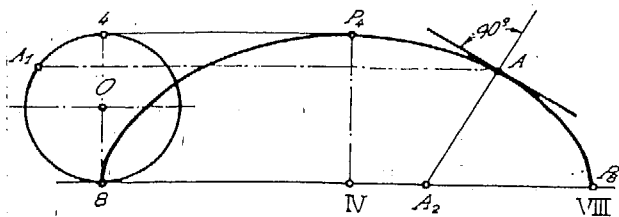


Figura 168

une por meio de uma reta com o ponto *A* da cicloide. Desde esse ponto se traça uma perpendicular à reta *A*₂-*A*, sendo esta a tangente desejada.

Traçado da pericicloide normal (fig. 169). O ponto gerador *P* é o ponto de contato da circunferência de centro *O* com a base, sendo esta a circunferência de centro *Q*. Neste caso, o círculo de centro *O* roda sobre o outro por seu contorno externo.

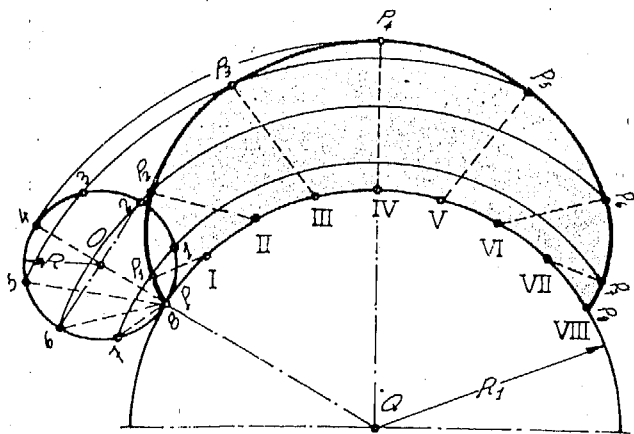


Figura 169

O traçado da pericicloide é feito dividindo a circunferência de centro *O* em certo número de partes iguais (oito, por exemplo) e numeram-se com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 os pontos de divisão.

A partir do ponto gerador *P*, traça-se sobre a base o desenvolvimento da circunferência de centro *O* ($= 2\pi R$), dividindo este comprimento em oito partes iguais, neste caso, chamando de I, II, III, IV, V, VI, VII e VIII os pontos de divisão.

Fazendo centro no ponto *Q*, descrevem-se arcos indefinidos que partem dos pontos 1, 2, 3, etc. da

circunferência de centro *O* e desde os pontos I, II, III, etc., traçam-se arcos de raios iguais às cordas *P*₁, *P*₂, *P*₃, etc. da circunferência de centro *O*, determinando sobre os arcos anteriores da mesma origem os pontos *P*₁, *P*₂, *P*₃, etc. pertencentes à pericicloide. Os pontos *P*, *P*₁, *P*₂, *P*₃, etc. se unem por meio de uma curva contínua, obtendo-se assim a pericicloide desejada.

Nota. Também neste caso não foram desenhados os arcos anteriores que partem dos pontos, I, II, III, etc., nem as cordas da circunferência de centro *O* para que fosse demonstrada com mais clareza a pericicloide.

Comprimento e superfície da pericicloide. O comprimento da curva *P*, *P*₁, *P*₂, *P*₃, *P*₄, *P*₅, *P*₆, *P*₇ e *P*₈ se acha pela seguinte fórmula:

$$L = 8R \frac{R + R_1}{R_1}$$

A superfície *S* do segmento compreendido entre a pericicloide e a base é:

$$S = \frac{\pi R^2 (2R + 3R_1)}{R_1}$$

Tangente da pericicloide (fig. 170). Conhecido o ponto *A* pelo qual a tangente tem que passar,

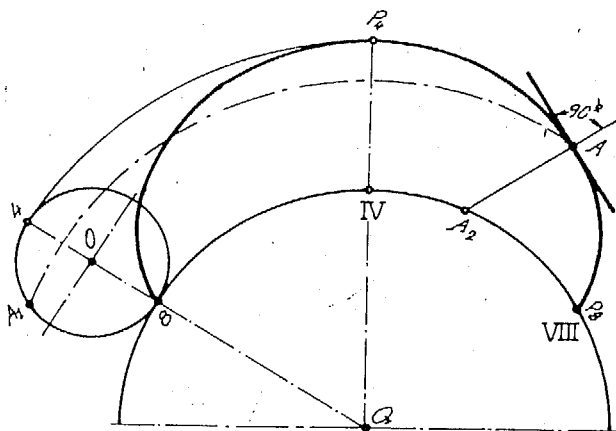


Figura 170

traça-se um arco de centro *Q* e que parte desde esse ponto até cortar a circunferência de centro *O* no ponto *A*₁; depois traça-se o comprimento do arco 8-*A*₁ sobre a base a partir do ponto *VIII*, determinando assim o ponto *A*₂ que se une por meio de uma reta com o ponto *A*. Neste ponto se traça uma perpendicular em ambas as partes da reta *A*₂-*A*, representando assim a tangente em questão.

Traçado da hipocicloide (fig. 171). Esta curva não se diferencia essencialmente da anterior por-

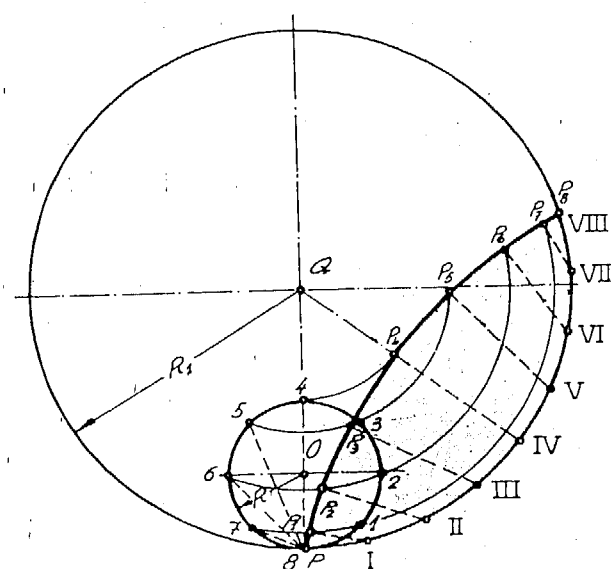


Figura 171

que existe somente uma mudança no sentido da rotação já que a anterior era por fora da base e, esta, por dentro. O traçado desta curva (fig. 171), assim como o de uma tangente (fig. 172), é feito de forma análoga ao da periciclóide.

Comprimento e superfície da hipociclóide. O comprimento da curva $P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$

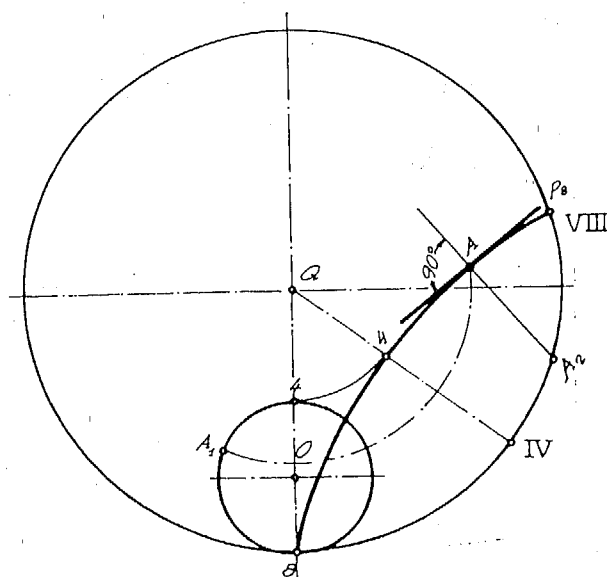


Figura 172

e P_8 é determinado com a seguinte fórmula:

$$L = 8R \frac{R_1 - R}{R_1}$$

A superfície S do segmento compreendido entre a hipociclóide e a base se acha com a seguinte fórmula:

$$S = \frac{\pi R^2 (3R_1 - 2R)}{R_1}$$

Traçado da evolvente de círculo (fig. 173). O traçado da curva formada pelo ponto gerador P ao girar a tangente T sobre o círculo de centro O é feito da seguinte maneira:

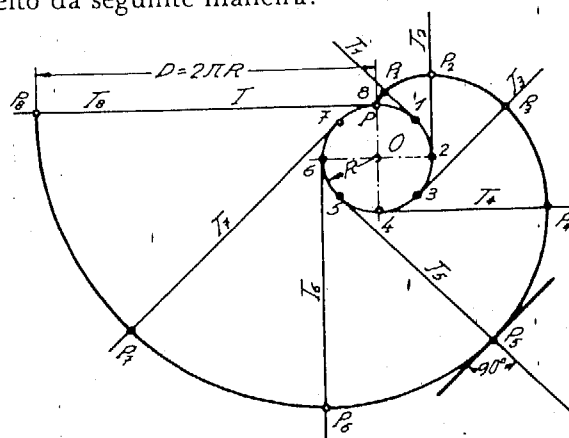


Figura 173

Divide-se a circunferência em certo número de partes iguais (oito, por exemplo) e pelos pontos de divisão 1, 2, 3, etc., traçam-se as tangentes T_1, T_2, T_3 , etc. A partir dos pontos 1, 2, 3, etc. traçam-se sobre as respectivas tangentes as distâncias $1/8, 2/8, 3/8$, etc. do desenvolvimento da circunferência, determinando assim os pontos P_1, P_2, P_3 , etc., unidos com o ponto P , ficando representada a evolvente de círculo. Como se pode observar, a tangente T coincide com a tangente T_8 , depois de ter girado sobre todo o círculo o ponto gerador P , sendo a distância $\overline{P-P_8}$ igual a $2\pi R$.

Comprimento da evolvente de círculo. O comprimento da evolvente de círculo se acha com a seguinte fórmula:

$$L = \frac{D^2}{2R} \quad \text{e} \quad D = 2\pi R.$$

SEGUNDA PARTE

**NOÇÕES DE TRIGONOMETRIA
RETILÍNEA E FÓRMULAS
GEOMÉTRICAS**



Objeto da trigonometria. Todo triângulo consta de seis elementos: três lados e três ângulos, os quais, dados alguns de seus elementos, permitem obter graficamente o resto. Como com este procedimento os resultados obtidos são de exatidão limitada, substituem-se tais construções por métodos de cálculo nos casos em que se requer maior precisão; este é, pois o objeto da *trigonometria* que, como o nome indica, ocupa-se do cálculo de triângulos dados por certos elementos.

Funções trigonométricas. Dois triângulos retângulos são semelhantes quando seus ângulos agudos forem iguais. Isto ocorre com os triângulos $A-B-C$ e $A-D-E$ (fig. 1) por ser o ângulo agudo a o mesmo para os dois triângulos. Portanto, as razões existentes entre os lados de um destes triângulos são as mesmas que existem entre os lados homólogos do outro triângulo. Estas razões variam ao variar o ângulo a ; logo, podemos dizer que as referidas razões são funções do ângulo a que recebem os seguintes nomes:

$$\begin{aligned}\frac{CB}{AC} &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \text{sen } a \\ \frac{AB}{AC} &= \frac{\text{cateto contíguo}}{\text{hipotenusa}} = \text{cos } a \\ \frac{CB}{AB} &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto contíguo}} = \text{tg } a \\ \frac{AC}{CB} &= \frac{1}{\text{sen } a} = \text{cosec } a \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{1}{\text{cos } a} = \text{sec } a \\ \frac{AB}{CB} &= \frac{1}{\text{tg } a} = \text{cot } a\end{aligned}$$

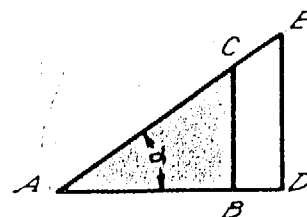


Figura 1

Os símbolos sen, cos, tg lêem-se seno, co-seno e tangente, respectivamente, e os símbolos cosec, sec e cot lêem-se co-secante, secante e co-tangente. As três primeiras funções são, respectivamente, inversas das últimas, de tal modo que a multiplicação de um número qualquer por uma co-secante, secante ou co-tangente equivale a dividir esse número entre um seno, co-seno ou tangente, respectivamente.

Funções de ângulos complementares (fig. 2). A seguir aplicaremos as definições antes mencionadas ao outro ângulo agudo β do triângulo retângulo:

$$\text{ângulo } \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{sen } \beta = \frac{AB}{AC} = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{CB}{AC} = \text{sen } \alpha$$

$$\text{tg } \beta = \frac{AB}{CB} = \cot \alpha$$

$$\sec \beta = \frac{AC}{CB} = \text{cosec } \alpha.$$

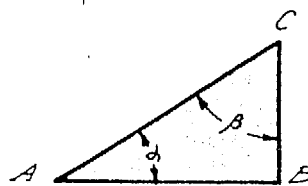


Figura 2

Disto se deduz que o seno, co-seno, tangente e secante de um ângulo agudo são respectivamente iguais ao co-seno, seno, co-tângente e co-secante do ângulo complementar.

Interpretação das funções circulares das razões trigonométricas (fig. 3). Traça-se um quadrante de circunferência $A-B$ de raio qualquer e de centro O . Desde O se traça uma reta indefinida e em qualquer posição que corte o arco no ponto M , determinando o ângulo agudo α entre a reta anterior e o lado de origem fixo $O-A$. Se o ponto M mudar de posição em um sistema coordenado cartesiano, cujos semi-eixos positivos OX e OY passam pelas extremidades A e B do quadrante, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{\text{ordenada}}{\text{raio}}$$

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{\text{abscissa}}{\text{raio}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{\text{raio}} = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscissa}}$$

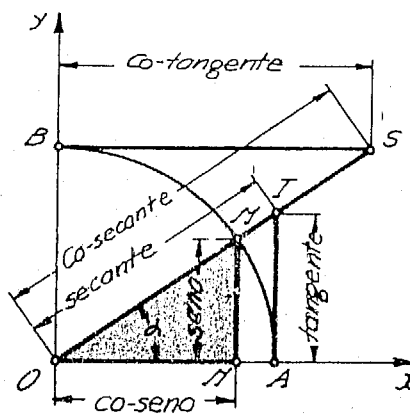


Figura 3

O $\text{sen } \alpha$, $\cos \alpha$ e $\text{tg } \alpha$ são medidas dos segmentos que foram indicados na figura 3, tomando o raio como a unidade.

A secante, co-secante e co-tangente têm a seguinte interpretação:

$$\sec \alpha = \frac{OM}{ON} = \frac{OT}{\text{raio}}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{OM}{MN} = \frac{OS}{\text{raio}}$$

$$\cot \alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{BS}{\text{raio}}$$

Uso das tabelas naturais. As tabelas trigonométricas dão os valores naturais do seno, co-seno, tangente e co-tangente, cujo conhecimento é de grande utilidade. Os valores da secante e co-secante não foram dados porque praticamente não se usam. A leitura de uma função trigonométrica é feita tomando os graus na parte superior da coluna quando se tratar de ângulos de 0 a 45° e os minutos podem ser lidos na primeira coluna à esquerda numerada de 0 a $60'$. Quando o ângulo tiver mais de 45° lêem-se os graus na parte inferior da coluna e os minutos na última fila que está à direita na coluna numerada também de 0 a $60'$.

30°					
	Senos	Cosenos	Tangentes	Cotangentes	
0	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
1	0,50025	0,86588	0,57774	1,73089	59
2	0,50050	0,86573	0,57813	1,72973	58
3	0,50076	0,86559	0,57851	1,72857	57
4	0,50101	0,86544	0,57890	1,72741	56
5	0,50126	0,86530	0,57929	1,72625	55
6	0,50151	0,86515	0,58968	1,72509	54
7	0,50176	0,86501	0,58007	1,72393	53
8	0,50201	0,86486	0,58046	1,72278	52
9	0,50227	0,86471	0,58085	1,72163	51
10	0,50252	0,86457	0,58124	1,72047	50
11	0,50277	0,86442	0,58162	1,71932	49
12	0,50302	0,86427	0,58201	1,71817	48
13	0,50327	0,86413	0,58240	1,71702	47
14	0,50352	0,86398	0,58279	1,71588	46
15	0,50377	0,86384	0,58318	1,71473	45
56	0,51404	0,85777	0,59928	1,66867	4
57	0,51429	0,85762	0,59967	1,66757	3
58	0,51454	0,85747	0,60007	1,66647	2
59	0,51479	0,85732	0,60046	1,66538	1
60	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	0
	Cosenos	Senos	Cotangentes	Tangentes	
59°					

No fragmento copiado das tabelas, lemos, por exemplo; $\text{sen } 30^\circ 14' = 0,50352$ (correspondente ao ângulo $30^\circ 14'$).

Este valor coincide com o valor do co-seno de $59^\circ 46'$ do ângulo complementar que, como foi dito anteriormente, permite ler os graus na parte inferior e os minutos na última fila da coluna, parte direita.

Interpolação linear. Para os problemas com que nos deparamos na oficina de caldeiraria é suficiente a aproximação da assim chamada *interpolação linear* que consiste em supor linear a variação da função entre cada dois valores consecutivos das tabelas; isto quer dizer que a determinação dos segundos que não estão tabelados podem ser achados proporcionalmente.

Exemplo. Achar o seno de um ângulo de $30^\circ 12' 16''$:

$$\begin{array}{rcl} \text{sen } 30^\circ 13' & = & 0,50327 \\ \text{sen } 30^\circ 12' & = & 0,50302 \\ \hline \text{diferença} & = & 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} 60'' \text{ ————— } 25 \\ 16'' \text{ ————— } x \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 60'' \\ 16'' \end{array}} \right\} x = \frac{25 \times 16}{60} = 6.$$

$$\begin{array}{rcl} \text{sen } 30^\circ 12' & = & 0,50302 \\ \text{diferença proporcional} & = & +6 \end{array}$$

$$\text{total} = 0,50308 = \text{sen } 30^\circ 12' 16''.$$

Sempre que se tomar um ângulo maior para tirar a diferença proporcional, como foi feito no caso anterior, deve-se aumentar a diferença proporcional só do seno e da tangente, já que estas duas razões aumentam ao aumentar o ângulo, ocorrendo o contrário com o co-seno e com a co-tangente, pois quando aumenta o ângulo, estes diminuem de medida. Portanto, desconta-se deles a diferença proporcional.

Exemplo. Achar a co-tangente de um ângulo de $59^{\circ} 35' 20''$:

$$\begin{array}{rcl} \cot 59^{\circ} 36' & = & 0,58670 \\ \cot 59^{\circ} 35' & = & 0,58709 \\ \hline \text{diferença} & = & 39 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 60'' \text{ ————— } 39 \\ 20'' \text{ ————— } x \end{array} \right\} x = \frac{39 \times 20}{60} = 13.$$

$$\begin{array}{rcl} \cot 59^{\circ} 35' & = & 0,58709 \\ \text{menos diferença proporcional} & = & -13 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Total} = 0,58696 = \cot 59^{\circ} 35' 20''.$$

Da mesma forma que se determinou a função circular de um ângulo, o valor de um ângulo pode ser determinado conhecendo sua função circular.

Exemplo. Tangente de $a = 5,68967$.

Olha-se nas tabelas, na coluna das tangentes, o número mais próximo ao número 5,68967; sendo o número 5,69064 correspondente ao ângulo de $80^{\circ} 2'$, logo:

$$\begin{array}{rcl} \text{tg } 80^{\circ} 2' & = & 5,69064 \\ \text{tg } 80^{\circ} 1' & = & 5,68094 \\ \hline \text{Diferença}_1 & = & 970 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{tg } a = 5,68967 \\ \text{tg } 80^{\circ} 1' = 5,68094 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 970 \text{ ————— } 60'' \\ 873 \text{ ————— } x \end{array} \quad x = \frac{60 \times 873}{970} = 54''.$$

$$\text{logo, } a = 80^{\circ} 1' + 54'' = 80^{\circ} 1' 54''.$$

Relações importantes existentes entre as linhas trigonométricas (fig. 4). Existem relações muito importantes entre as linhas trigonométricas de um ângulo:

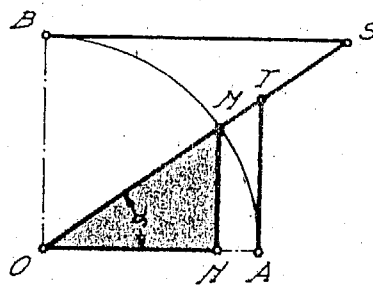


Figura 4

Primeira relação. Do triângulo retângulo $O-M-N$, segundo o *teorema de Pitágoras*, temos:

$$MN^2 + ON^2 = OM^2, \text{ ou seja, } \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Segunda relação. Dos triângulos semelhantes $O-T-A$ e $O-M-N$ se deduz o seguinte:

$$\begin{array}{l} 1. \frac{TA}{OA} = \frac{MN}{ON}, \text{ ou seja, } \frac{\text{tg } a}{1} = \frac{\sin a}{\cos a}; \text{ logo, } \text{tg } a = \frac{\sin a}{\cos a}. \\ 2. \frac{OT}{OA} = \frac{OM}{ON}, \text{ ou seja, } \frac{\sec a}{1} = \frac{1}{\cos a}; \text{ logo, } \sec a = \frac{1}{\cos a}. \end{array}$$

Terceira relação. Da semelhança dos triângulos retângulos $S-O-B$ e $O-M-N$ se deduz:

$$1. \frac{SB}{OB} = \frac{ON}{MN}, \text{ ou seja, } \frac{\cot a}{1} = \frac{\cos a}{\sin a}; \text{ logo, } \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

Pelo valor da co-tangente que é o inverso da tangente, temos:

$$\cot a = \frac{1}{\text{tg } a}.$$

$$2. \frac{OS}{OB} = \frac{OM}{MN}, \text{ ou seja, } \frac{\text{cosec } a}{1} = \frac{1}{\sin a}; \text{ logo, } \text{cosec } a = \frac{1}{\sin a}.$$

Valores particulares importantes (fig. 5). Se a for o semi-ângulo central de qualquer polígono regular inscrito em uma circunferência, temos $a = \frac{360^\circ}{2n}$ (n = ao número de lados do polígono). O seno é a razão do semilado ao raio, o co-seno é a razão da apotema ao raio e a tangente é a razão do semilado do polígono circunscrito ao raio.

Uma vez que se achou o seno MN e a tangente TA , multiplica-se por 2, determinando assim os lados inscritos e circunscritos de um polígono regular qualquer em uma circunferência.

Quando se procurar a corda e a flecha de um arco qualquer de raio unidade, sendo neste caso o arco MAM' da mesma figura, temos:

$$\text{corda } MM' = 2 \operatorname{sen} a \text{ e flecha } NA = 1 - \cos a$$

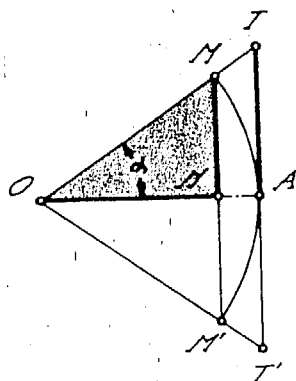


Figura 5

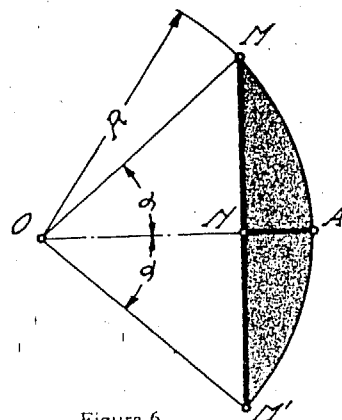


Figura 6

Quando geralmente temos que determinar a corda e a flecha de um arco e o raio deste não for igual à unidade, devemos proceder como se explica a seguir:

Exemplo. Achar a corda e a flecha de um arco MAM' (fig. 6), cujo raio é 698 e o semiângulo $a = 42^\circ$.

$$\text{Corda } MM' = 2R \times \operatorname{sen} 42^\circ = 2 \times 698 \times 0,66913 = 934,1.$$

$$\text{Flecha } NA = R(1 - \cos 42^\circ) = 698(1 - 0,74314) = 179,28.$$

Sinais das linhas trigonométricas (fig. 7). Traça-se uma circunferência de raio unidade e centro O , formando quadrantes por meio dos diâmetros vertical e horizontal que se numeram no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio, tal como se vê na figura (primeiro e segundo quadrante sobre o eixo horizontal e terceiro e quarto quadrante sob o eixo horizontal).

No quadro abaixo são dados os sinais das linhas trigonométricas nos quatro quadrantes. Portanto, o seno de um ângulo a será positivo quando se encontrar sobre o diâmetro horizontal e negativo, quando se achar sob o mesmo eixo.

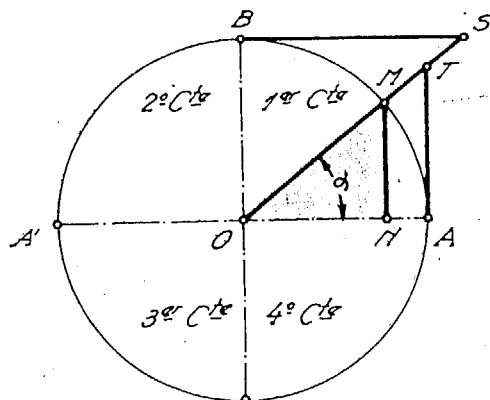


Figura 7

Sinais das linhas trigonométricas				
Razão	1º Cx	2º Cx	3º Cx	4º Cx
Sen	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tg	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	-	+
Cosec	+	+	-	-

O co-seno de um ângulo a é positivo quando se acha à direita do eixo vertical e negativo, quando está à esquerda deste.

A tangente de um ângulo a é positivo quando prolongado o raio OM que determina o valor da tangente sobre o eixo horizontal, sendo negativa quando determinada sob este eixo.

A co-tangente tem o mesmo sinal que a tangente.

A secante tem os mesmos sinais que o co-seno.

A co-secante depende do sinal que terá o seno.

Gráficos cartesianos das funções circulares. Podemos representar graficamente as funções circulares, tomando eixos retangulares e levando ao eixo X valores do ângulo que se expressam e se medem comumente em *radianos*, isto é, em vez de se escrever 360° , mede-se e escreve-se 2π .

No sistema linear considera-se o *radiano* como unidade que corresponde ao ângulo que tem um arco igual ao raio.

$$2\pi \text{ radianos} = 360^\circ$$

$$1 \text{ radiano} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',8$$

Resumindo, traça-se uma circunferência de raio unidade (fig. 8) e se divide em certo número de partes iguais (doze, por exemplo), numerando os pontos de divisão da mesma forma que se vê na figura, ou seja, o número 3 coincide com o ponto B . Depois leva-se sobre o eixo X a distância $2\pi = 6,2832$ e se divide

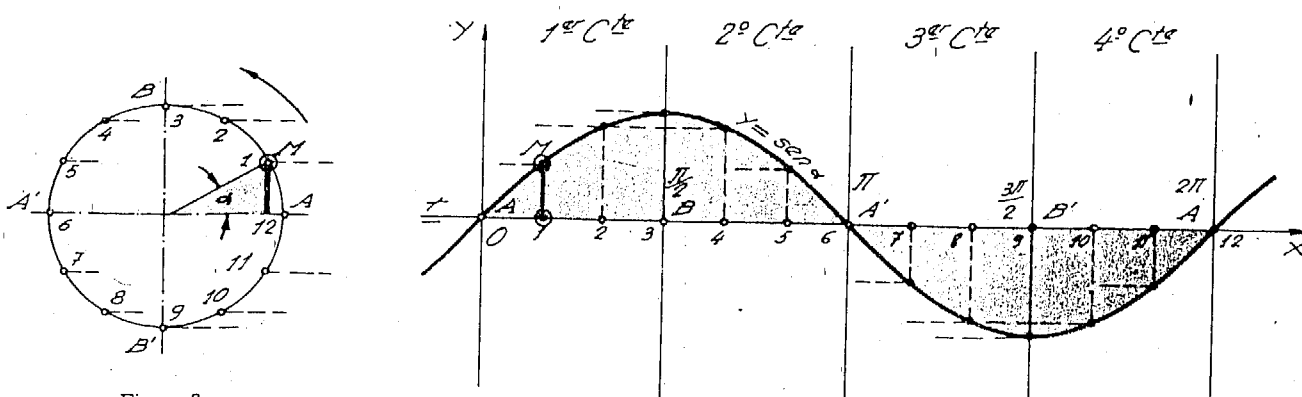


Figura 8

com o mesmo número de partes que na circunferência auxiliar, traçando perpendiculares ao eixo X desde os pontos de divisão 1-2-3-4, etc., traçando as ordenadas 1-2-3-4, etc. da circunferência, ficando assim determinada a curva representativa de $Y = \sin a$, chamada de *sinusóide*.

Toda a porção de onda que se encontrar acima do eixo X tem sinal positivo e o que se encontrar abaixo deste, terá sinal negativo. A distância 2π foi dividida em quatro partes iguais, sendo estes os quatro quadrantes representados, numerados da esquerda para a direita no primeiro quadrante, segundo quadrante, terceiro quadrante e quarto quadrante.

Da mesma forma que se constrói a curva representativa do co-seno, $Y = \cos a$ (fig. 9), chamada de co-

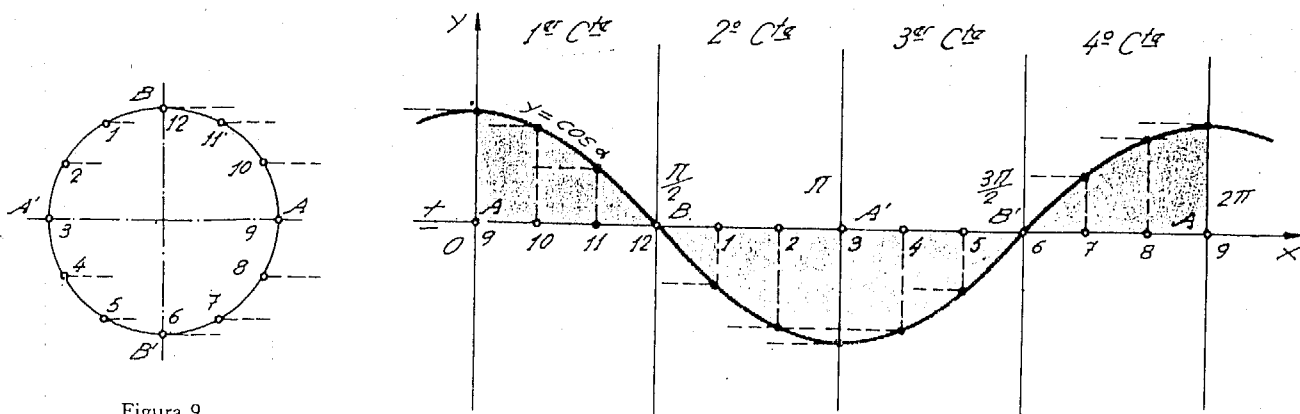


Figura 9

sinusóide, bastando girar 90° a numeração dos pontos de divisão na circunferência auxiliar da construção. A *co-sinusóide* é a mesma curva *sinusóide* que se traslada à esquerda de $\pi/2$: para estas duas curvas basta desenhar uma só onda, sendo esta a porção entre 0 e 2π , já que as mesmas ordenadas se repetem nos intervalos seguintes: 2π a 4π , 4π a 6π , 6π a 8π , etc., e nos anteriores 2π a 0, -4π a -2π , -6π a -4π , etc.

A *tangentóide* é a curva $Y = \operatorname{tg} a$ e se constrói de forma análoga (fig. 10), observando-se que os valores da tangente se repetem a partir da abscissa π .

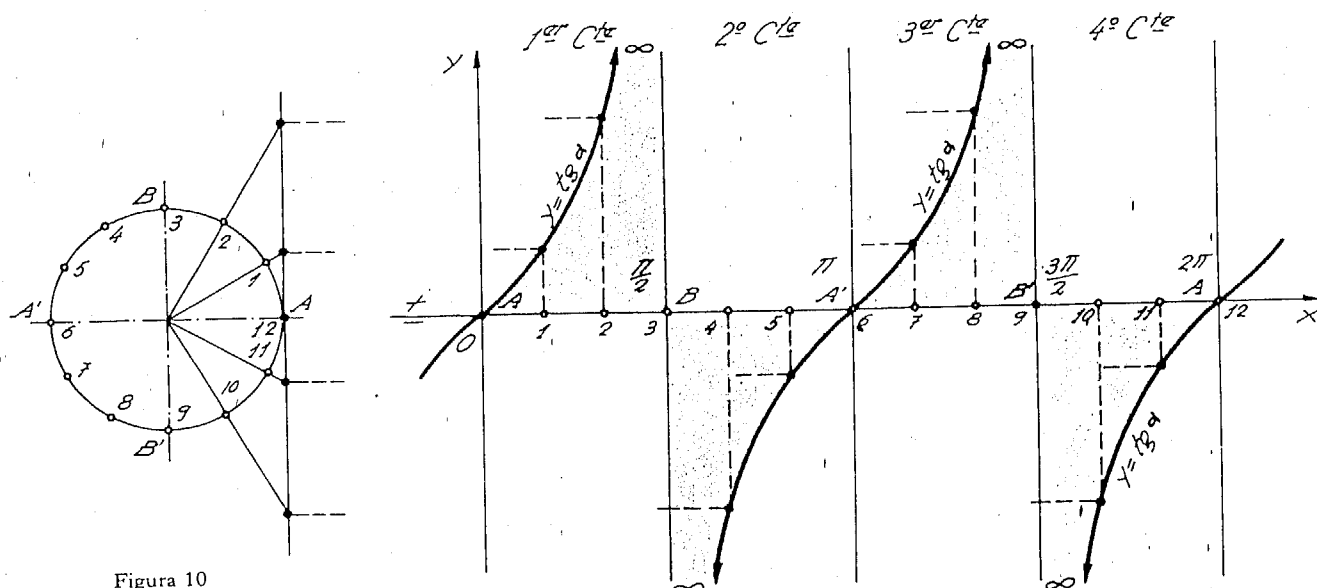


Figura 10

Os valores de $\pi/2$, $3\pi/2$, etc. não têm ordenada, já que nestas posições a curva se afasta infinitamente do eixo X por ser infinito o valor da tangente quando o ângulo a é igual a 90° , 270° , etc. Esta curva se aproxima das retas verticais que partem dos pontos $\pi/2$, $3\pi/2$, etc., sem chegar a alcançá-los.

Os gráficos das funções $\cot a$, $\sec a$ e $\operatorname{cosec} a$ das figuras 11, 12 e 13, respectivamente, constroem-se de forma análoga.

Variações do seno. Como se pode ver na figura 8, o ponto M percorre os 360° da circunferência no sentido contrário aos ponteiros do relógio. O valor de seno é 0 quando $a = 0^\circ$, ou seja, quando o ponto M se encontra sobre A. O valor do seno vai aumentando quando o ponto M percorre o arco $\widehat{A-B}$; quando o ponto M chegar em B, o valor do seno será igual à unidade e ao seu ângulo $a = 90^\circ$. O valor do seno vai

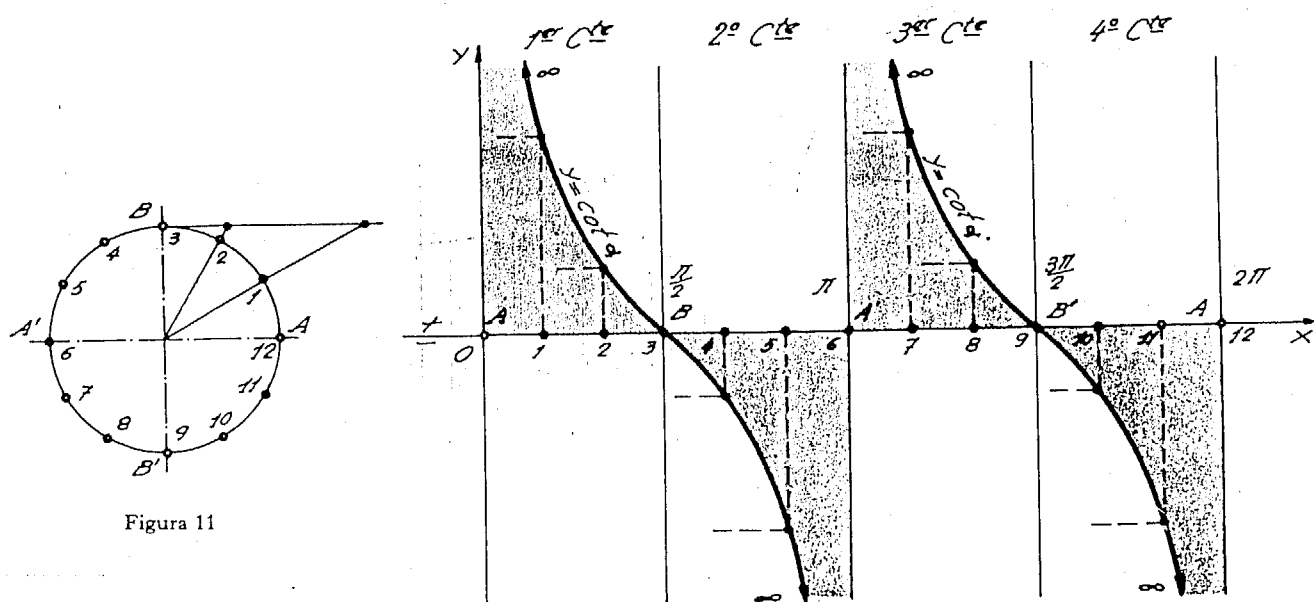


Figura 11

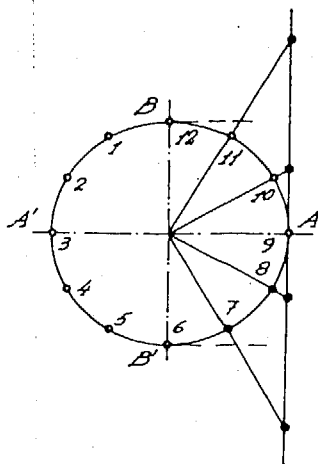


Figura 12

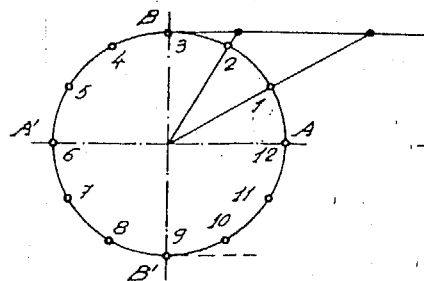
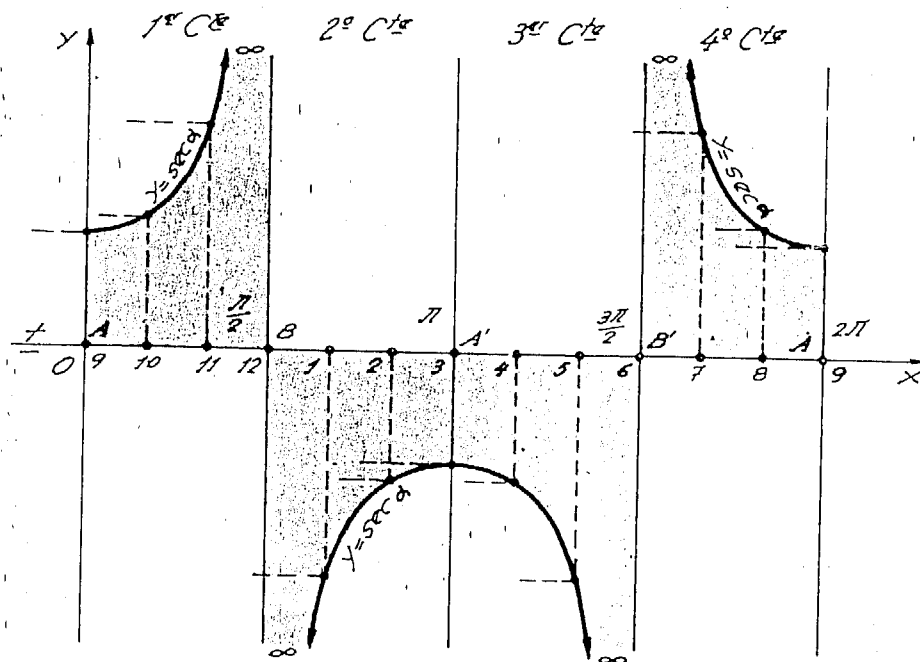
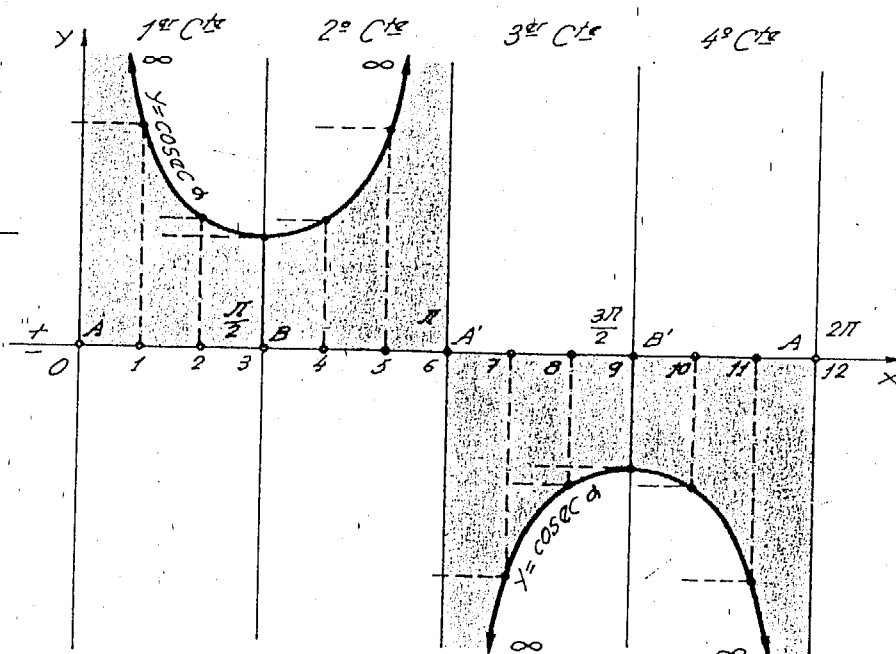


Figura 13



diminuindo a partir do ponto B , até o ponto M chegar a A' , sendo seu valor zero e seu ângulo $\alpha = 180^\circ$. O seno, enquanto passa pelo ponto A' , muda de sinal, ficando negativo, e seu valor aumenta quando chega em B' que tem um valor igual à unidade e o seu ângulo $\alpha = 270^\circ$; passando deste ponto, volta a diminuir até chegar em A , sendo seu valor zero. Disto se deduz que o seno pode variar entre ± 1 .

Tudo isto que foi explicado pôde ser visto claramente no gráfico do seno, pois se tomou como exemplo o ponto M da circunferência que coincide com 1 e que, logicamente, tem que coincidir com o seno representado na curva *sinusóide*.

São vistas de forma análoga as variações que têm o co-seno, a tangente, co-tangente e secante, sendo estas as seguintes variações:

O co-seno entre ± 1 , a tangente entre $\pm \infty$, a co-tangente entre $\pm \infty$, a secante e a co-secante entre $\pm \infty$ ($\infty = \text{infinito}$) sem tomar nenhum dos valores compreendidos entre ± 1 .

Resolução de triângulos retângulos. Já falamos nas definições das lições anteriores que dar tabelas trigonométricas é dar as relações existentes entre os lados de um triângulo retângulo que têm os ângulos agudos expostos nestas tabelas; portanto, se ocorrerem os seguintes dados:

Primeiro caso (fig. 14). Conhecendo o cateto a e o ângulo agudo A , acha-se primeiro o outro ângulo agudo $C = 90^\circ - A$. Procurando nas tabelas o valor de $\text{sen } A (= a/b)$ e da $\text{tg } C (= c/a)$, teremos:

$$\text{hipotenusa } b = \frac{\text{cateto } a}{\text{sen } A} \text{ e cateto } c = \frac{\text{cateto } a}{\text{tg } C}$$

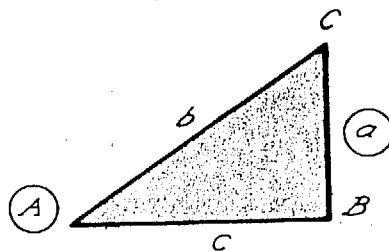


Figura 14

Segundo caso (fig. 15). Conhecendo o cateto a e a hipotenusa b , o resto dos dados seriam determinados assim:

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto } a}{\text{hipotenusa } b}$$

Pode-se ler nas tabelas o valor do ângulo A dado por seu seno e acharemos o outro ângulo agudo $C = 90^\circ - A$. Em seguida acharemos o outro cateto c , aplicando o *teorema de Pitágoras*.

$$\text{cateto } c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

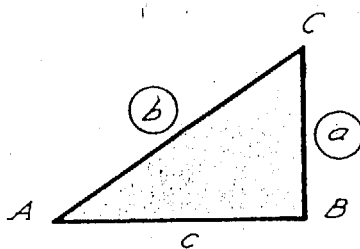


Figura 15.

Terceiro caso (fig. 16). Neste caso conhecemos o ângulo A e a hipotenusa b . Procura-se nas tabelas o $\text{sen } A (= a/b)$ e $\text{cos } A (= c/b)$, obtendo-se:

$$\text{cateto } a = b \times \text{sen } A \text{ e cateto } c = b \times \text{cos } A$$

O outro ângulo agudo será o complemento do ângulo A . Logo, $C = 90^\circ - A$.

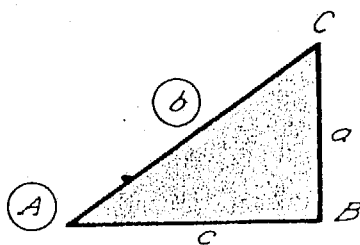


Figura 16

Quarto caso (fig. 17). Conhecendo os dois catetos a e c , teremos:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{cateto } a}{\text{cateto } c}.$$

Lê-se nas tabelas o valor do ângulo A dado por sua tangente e acharemos o outro ângulo agudo:

$$C = 90^\circ - A$$

Em seguida acharemos a hipotenusa b aplicando o *teorema de Pitágoras*

$$\text{hipotenusa } b = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

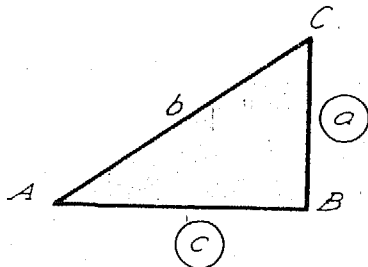


Figura 17

Como se observou, basta recordar as razões trigonométricas e dispor de algumas tabelas trigonométricas para resolver qualquer triângulo retângulo, embora mais adiante serão dadas todas as fórmulas tabeladas.

Resolução de triângulos isósceles (fig. 18). Chama-se triângulo isósceles $A-B-C$ o que tem dois lados iguais AC e BC . Basta traçar a altura do triângulo para que fique dividido em dois triângulos retângulos iguais de modo que, resolvido um deles, fica resolvido o outro. Estes podem ser resolvidos de forma análoga à que foi explicada na resolução de triângulos retângulos.

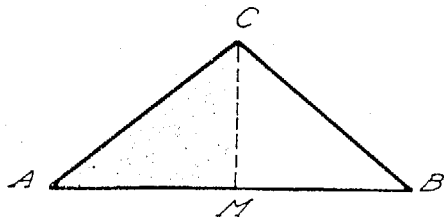


Figura 18

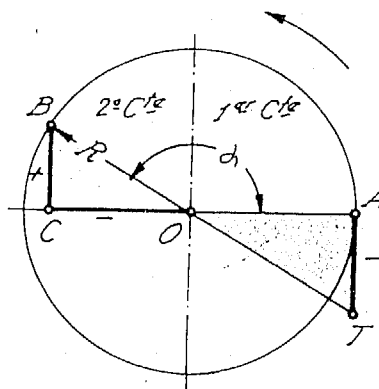


Figura 19

Funções circulares de ângulos obtusos (fig. 19). Traça-se uma circunferência de raio unidade e centro O , formando quadrantes por meio de diâmetros horizontal e vertical que se numeram no sentido contrário aos ponteiros do relógio (primeiro quadrante, segundo quadrante, etc.).

O ângulo a determina um arco de origem A e sua extremidade B ; desde B se traça uma perpendicular ao diâmetro horizontal, determinando o ponto C .

Chamaremos seno do ângulo a a razão da ordenada BC ao raio R ($\operatorname{sen} a = BC/R$); chamaremos co-seno do ângulo a a razão da abscissa OC ao raio R ($\operatorname{cos} a = OC/R$) e por último, chamaremos tangente do ângulo a a razão da ordenada BC à abscissa OC ($\operatorname{tg} a = BC/OC \pm \operatorname{sen} a/\operatorname{cos} a$).

A representação da tangente é feita prolongando o raio R até cortar a tangente de origem A no ponto T . Como se pode observar, o seno de um ângulo obtuso é positivo como o agudo; o co-seno é negativo e a tangente também é negativa.

Funções circulares de ângulos suplementares (fig. 20). Traça-se uma circunferência análoga à da figura 19 e dois ângulos suplementares a partir do ponto de origem A . Com uma simples observação da figura pode-se ver que os senos de dois ângulos suplementares são iguais; os co-senos são iguais em valor mas diferentes no sinal e as tangentes são também iguais com sinal diferente.

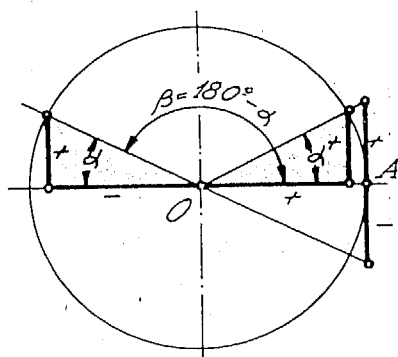


Figura 20

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - \alpha \\ \text{sen } \beta &= \text{sen } \alpha \\ \cos \beta &= -\cos \alpha \\ \text{tg } \beta &= -\text{tg } \alpha.\end{aligned}$$

Se o ângulo β for obtuso, seu suplemento será um ângulo α agudo; logo, basta olhar nas tabelas o valor deste e mudar o sinal do co-seno e da tangente. A seguir, um exemplo:

Se o ângulo obtuso β mede 162° , o suplemento α medirá $180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$. Depois lê-se nas tabelas o valor do seno, co-seno e da tangente de ângulo $\alpha = 18^\circ$ e teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}\text{sen } 18^\circ &= 0,30902; \text{ logo, } \text{sen } 162^\circ = 0,30902 \\ \cos 18^\circ &= 0,95106; \text{ logo, } \cos 162^\circ = -0,95106 \\ \text{tg } 18^\circ &= 0,32492; \text{ logo, } \text{tg } 162^\circ = -0,32492\end{aligned}$$

Quando precisamos calcular o ângulo de um triângulo qualquer, tendo o valor do co-seno ou da tangente, saberemos se esse ângulo é obtuso ou agudo, conforme o sinal que tiver. Se o valor que nos for dado do co-seno ou da tangente tiver sinal positivo, o ângulo será agudo mas, se o sinal for negativo, o ângulo será obtuso.

Exemplo. Achar o ângulo β se o valor da tangente for igual a $-0,16465$. Olha-se nas tabelas o número mais próximo a $0,16465$ na coluna das tangentes e teremos $9^\circ 21'$. Logo:

$$\beta = 179^\circ 60' - 9^\circ 21' = 170^\circ 39'$$

Resolução de triângulos aplicando o teorema dos senos. Teorema: os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Das relações que resultam ao se igualar as duas expressões de cada altura, teremos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

Este teorema permite resolver com grande facilidade qualquer triângulo, caso conheçamos um lado, seu ângulo oposto e outro ângulo de um triângulo qualquer.

Primeiro caso (fig. 21). Conhecendo o lado a e os dois ângulos A e B , achar os restantes dados.

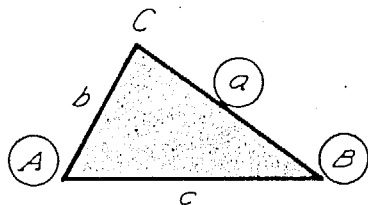


Figura 21

$$\begin{aligned}C &= 180^\circ - (A + B) \\ b &= \frac{a \times \text{sen } B}{\text{sen } A} \\ c &= \frac{a \times \text{sen } C}{\text{sen } A}\end{aligned}$$

Segundo caso (fig. 22). Achar o lado c e os ângulos B e C se forem conhecidos o ângulo A e os lados a e b

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \times \operatorname{sen} A}{a}$$

O resto dos dados são resolvidos como no caso anterior.

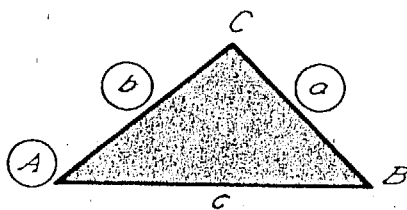


Figura 22

Nota. A determinação de B por seu seno precisa de um esclarecimento devido a que o seno de todo ângulo é menor ou igual à unidade. Para que o problema tenha solução, tem-se:

$$\frac{b \times \operatorname{sen} A}{a} \leq 1, \text{ isto é, } b \times \operatorname{sen} A \leq a.$$

Se $b \times \operatorname{sen} A = a$, o seno B seria igual à unidade e mediria 90° , sendo então um triângulo retângulo.

Se $b \times \operatorname{sen} A < a$, existem duas soluções, já que pode haver dois ângulos com o mesmo seno, embora um seja agudo e o outro obtuso. (Isto já foi estudado quando nos referimos a ângulos obtusos e a ângulos suplementares).

Na figura 23 representa-se o triângulo em questão que pode ter duas soluções: uma é a do triângulo $A-B_1-C$ e a outra é a do triângulo $A-B_2-C$.

Exemplo. Dados: $a = 40$, $b = 60$ e $A = 30^\circ$.

Chamaremos B o ângulo comum ao agudo e obtuso, já que, como foi dito anteriormente, têm o mesmo seno.

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \times \operatorname{sen} A}{a} = \frac{60 \times \operatorname{sen} 30^\circ}{40} = 0,75000$$

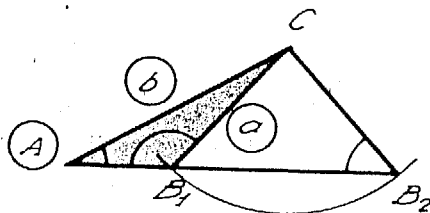


Figura 23

Olha-se nas tabelas o número mais próximo a 0,75000 na coluna dos senos e teremos 0,74992 correspondente a $48^\circ 35'$. Como o valor do seno de B não coincide com o de $48^\circ 35'$, determinaremos por interpolação, os segundos que correspondem entre as diferenças do valor do seno B e o valor do seno de $48^\circ 35'$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 48^\circ 36' &= 0,75011 \\ \operatorname{sen} 48^\circ 35' &= 0,74992 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= 0,75000 \\ \operatorname{sen} 48^\circ 35' &= 0,74992 \end{aligned}$$

$$\text{Diferença} = 19$$

$$\text{Diferença} = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} 19 \text{ ————— } 60'' \\ 8 \text{ ————— } x \end{array} \right\} x = \frac{60 \times 8}{19} = 25''$$

$$\text{logo } B = 48^\circ 35' + 25'' = 48^\circ 35' 25''.$$

$$\text{primeira solução: } B_1 = 131^\circ 24' 35''.$$

$$\text{segunda solução: } B_2 = 48^\circ 35' 25''.$$

Projeção ortogonal de um segmento (fig. 24). A projeção ortogonal $a-b$ de um segmento $A-B$ é igual ao produto do comprimento do segmento pelo co-seno do ângulo a formado pela reta no espaço com o plano de projeção. A projeção ortogonal $a-b$ é determinada da mesma forma que se explicou na "Geometria descritiva". Concretamente, a reta EF da figura 15,

$$a-b = A-B \times \cos a$$

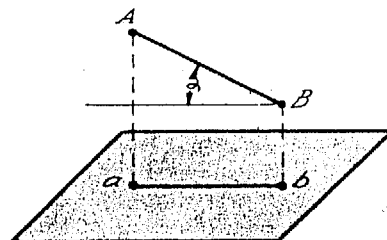


Figura 24

Traçado de ângulos pelo método da tangente. O método da tangente para calcular ângulos é de grande utilidade na *oficina de caldeiraria* porque constantemente temos que traçar ângulos e se os medirmos com *transferidor*, sempre se comete algum erro por mais atenção que tenhamos, sendo o erro maior quanto maior forem os lados do ângulo que temos que traçar.

Este erro é cometido com frequência, por exemplo, quando traçamos algum cotovelo cilíndrico, se o raio-eixo deste for muito grande, já que, como no caso do cotovelo, temos que fazê-lo em vários elementos, dos quais só achamos um que sirva de padrão ou gabarito para marcar os demais; portanto, se este elemento padrão tiver algum erro de medida por ter sido mal traçado o ângulo correspondente, a medição com o *transferidor* repercute logicamente no resto dos elementos e, se o cotovelo tiver que ter, por exemplo, 120° depois de construído, seria preciso uni-lo ou recortá-lo até deixá-lo na medida. Por isto é que se usa um transferidor relativamente pequeno para um ângulo cujos lados são bastante grandes neste caso.

Se queremos traçar apenas um ângulo (fig. 25), dado o valor do mesmo (exemplo: $a = 38^\circ$), os lados do ângulo podem ter qualquer medida; traça-se uma horizontal OX , mantendo a partir de O uma distância $M = 1000$ mm, determinando assim o ponto A (sempre que for possível consideraremos $M = 1000$ mm). No ponto A traçamos uma perpendicular de comprimento $N = M \times \operatorname{tg} a = 1000 \times \operatorname{tg} 38^\circ = 781,29$ mm, determinando assim o ponto B , unido com O , com o que ficaria traçado o ângulo $a = 38^\circ$.

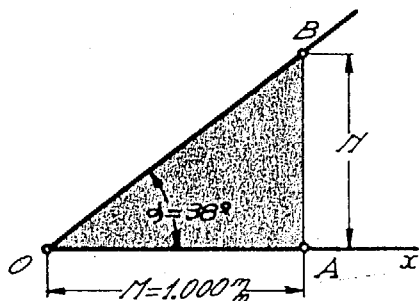


Figura 25

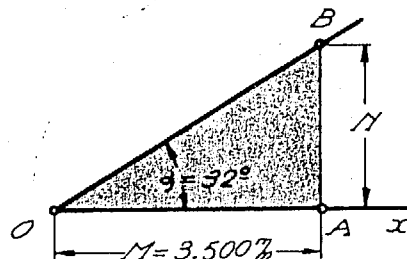


Figura 26

Quando a medida $M = 3500$ mm do lado OA (fig. 26) e o lado OB tiver que ser desenhado por exigências do trabalho, operaremos da seguinte maneira:

Se $a = 32^\circ$, temos

$$N = M \times \operatorname{tg} a = 3500 \times \operatorname{tg} 32^\circ = 2187,04 \text{ mm}$$

Nós operaremos de acordo com o valor de a , como se explica a seguir:

Primeiro caso. Quando o valor do ângulo a for compreendido entre 0° e 45° , acharemos tal ângulo, como se vê na figura 27, sendo igual ao explicado anteriormente:

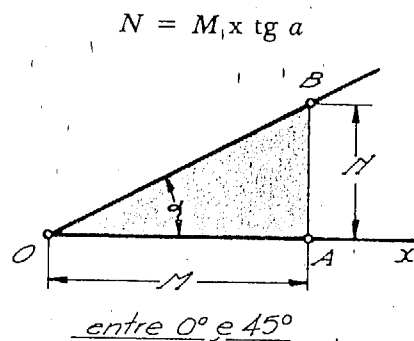


Figura 27

Segundo caso. Se o valor do ângulo a é compreendido entre 45° e 90° , a construção do ângulo a será feita conforme a figura 28:

$$\beta = 90^\circ - a \text{ e } N = M \times \operatorname{tg} \beta$$

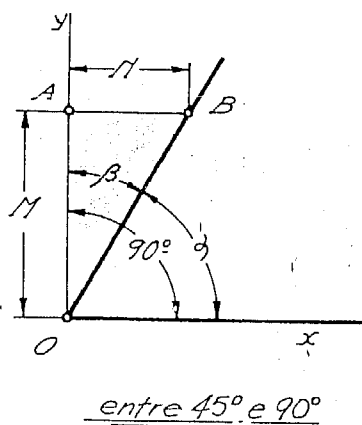


Figura 28

Terceiro caso. Resolve-se o caso da figura 29 de forma análoga, quando o ângulo é compreendido entre 90° e 135° :

$$\beta = a - 90^\circ \text{ e } N = M \times \operatorname{tg} \beta$$

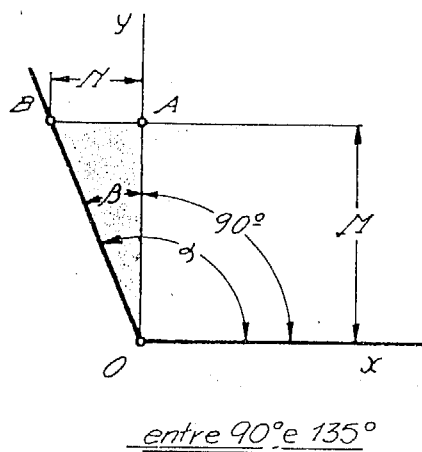


Figura 29

Quarto caso. Por último, quando o ângulo estiver entre 180° e 135° , operar-se-á como se vê na figura 30:

$$\beta = 180^\circ - \alpha \text{ e } N = M \times \operatorname{tg} \beta$$

Recordemos que a grandeza M pode ser qualquer uma, com a recomendação de que $M = 1000 \text{ mm}$, sempre que tal medida não for dada.

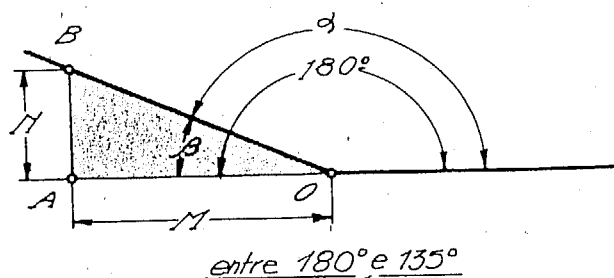


Figura 30

Sistema de coordenadas cartesianas (fig. 31). Como este sistema foi mencionado nas lições anteriores, acreditamos que seja conveniente dar uma idéia de seu funcionamento. Sobre um plano de desenho traçam-se dois eixos fixos Ox , Oy , perpendiculares entre si no ponto O que se chama *origem de coordenadas*. Conhece-se a linha vertical pelo eixo y e a linha horizontal, pelo eixo x . Qualquer ponto P do plano será determinado por suas projeções P' e P'' sobre os eixos Ox e Oy .

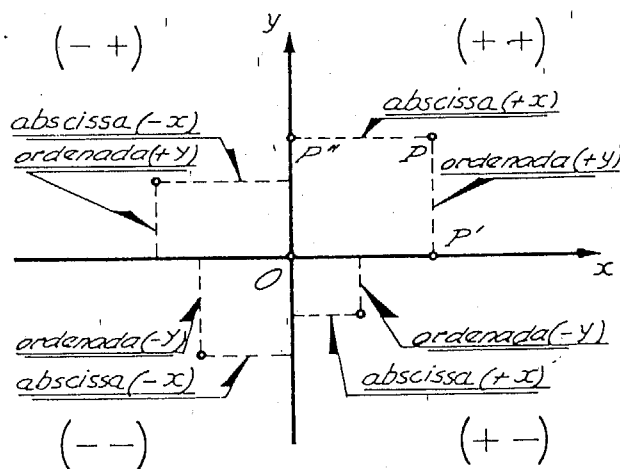


Figura 31

As projeções P' e P'' serão determinadas pelas medidas dos segmentos OP' e OP'' e com seus sinais; estas medidas chamam-se respectivamente *abscissa* x e *ordenada* y , ambas *coordenadas* do ponto P com respeito aos eixos $x-y$.

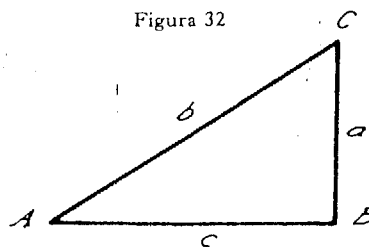
Os sinais das *coordenadas* indicam o quadrante em que está situado o ponto P com respeito aos eixos $x-y$.

Estes sinais estão representados na figura 31.

Resolução de triângulos retângulos por trigonometria

Conhecido	Achar	Fórmula
Ângulo A	Ângulo C	Ângulo $C = 90^\circ - A$
Ângulo C	Ângulo A	Ângulo $A = 90^\circ - C$
Ângulo A e lado a	Lado c	Lado $c = a \times \cot A$
	Lado b	Lado $b = \frac{a}{\sin A}$
Ângulo A e lado c	Lado a	Lado $a = c \times \tan A$
	Lado b	Lado $b = \frac{c}{\cos A}$
Ângulo A e lado b	Lado a	Lado $a = b \times \sin A$
	Lado c	Lado $c = b \times \cos A$
Lados a e c	Lado b	Lado $b = \sqrt{a^2 + c^2}$
	$\tan A$	$\tan A = \frac{a}{c}$
Lados b e c	Lado a	Lado $a = \sqrt{b^2 - c^2}$
	$\cos A$	$\cos A = \frac{c}{b}$
Lados a e b	Lado c	Lado $c = \sqrt{b^2 - a^2}$
	$\sin A$	$\sin A = \frac{a}{b}$

Figura 32



Exemplos para o uso das fórmulas

Primeiro exemplo. A quantos graus, com respeito ao plano horizontal de projeção, será preciso orientar o ventilador da figura 33 e que comprimento deverá ter o tubo que queremos unir à boca deste ventilador se sabemos que as medidas respectivas a e c são 5 e 4 m?

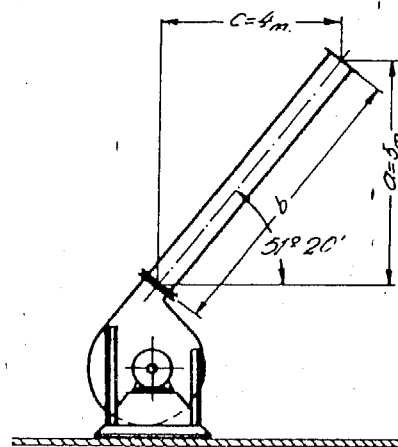


Figura 33

$$b = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6,403 \text{ m}; \quad \tan A = \frac{a}{c} = \frac{5}{4} = 1,25000$$

Olha-se nas tabelas trigonométricas o número mais aproximado de 1,25000 na coluna das tangentes e teremos 1,24969 correspondente ao ângulo de $51^\circ 20'$, sendo estes os graus que temos para fazer o ventilador girar com respeito ao plano horizontal de projeção.

Segundo exemplo. Deseja-se instalar uma escora em uma talha (fig. 34), de tal modo que o ângulo formado pela escora e pela viga I, que serve de trilho, seja de 30° e sua fixação com a viga I seja de 4000 mm de distância com respeito à parede. A que distância a faremos o orifício de ancoragem na parede para fixar a outra extremidade da escora e que comprimento b deverá ter esta escora?

$$a = c \times \tan A = 4000 \times \tan 30^\circ = 2309,4 \text{ mm}$$

$$b = \frac{c}{\cos A} = \frac{4000}{\cos 30^\circ} = 4618,8 \text{ mm}$$

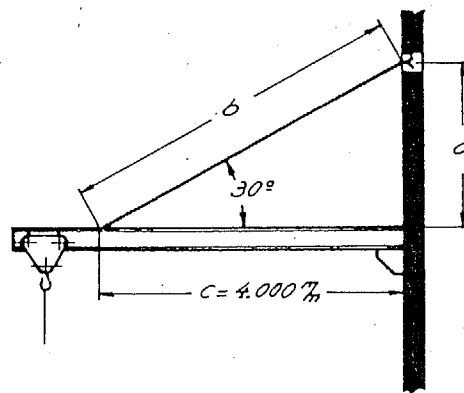


Figura 34

Ângulo formado por uma reta em suas projeções

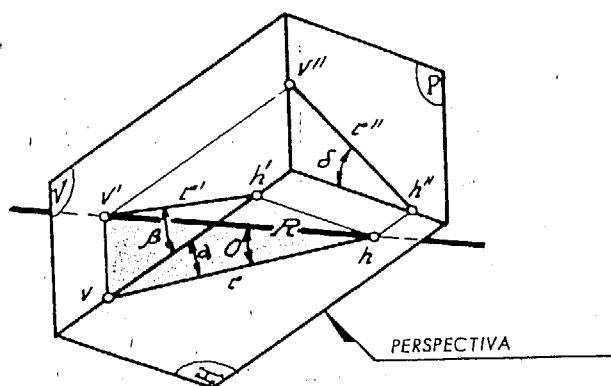
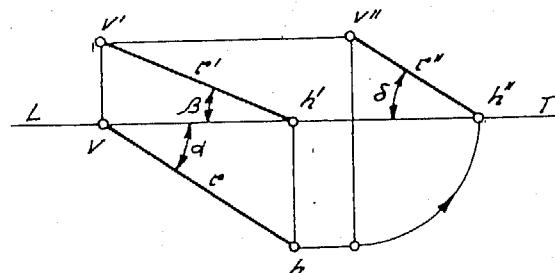


Figura 35



O = ângulo real

a = ângulo visto em planta

β = ângulo visto em elevação

δ = ângulo visto de perfil

Conhecido	Achar	Fórmula
Ângulos β e δ	$\cot O$	$\cot O = \sqrt{\cot^2 \beta + \cot^2 \delta}$
	$\tg a$	$\tg a = \frac{\cot \delta}{\cot \beta}$
Ângulos a e β	$\tg O$	$\tg O = \cos a \times \tg \beta$
	$\tg \delta$	$\tg \delta = \frac{\tg \beta}{\tg a}$
Ângulos a e δ	$\tg O$	$\tg O = \sen a \times \tg \delta$
	$\tg \beta$	$\tg \beta = \frac{\tg \delta}{\cot a}$
Ângulos O e β	$\cos a$	$\cos a = \frac{\tg O}{\tg \beta}$
	$\cot \delta$	$\cot \delta = \sqrt{\cot^2 O - \cot^2 \beta}$
Ângulos O e δ	$\sen a$	$\sen a = \frac{\tg O}{\tg \delta}$
	$\cot \beta$	$\cot \beta = \sqrt{\cot^2 O - \cot^2 \delta}$
Ângulos O e a	$\tg \beta$	$\tg \beta = \frac{\tg O}{\cos a}$
	$\tg \delta$	$\tg \delta = \frac{\tg O}{\sen a}$

Exemplo. Que ângulo O seria formado pelo eixo da boca circular de um transformador (fig. 38) com respeito ao plano horizontal de projeção se a vista em elevação (fig. 36) forma o ângulo $\beta = 32^\circ$ e se a vista em perfil (fig. 37) forma o ângulo $\delta = 50^\circ$?

$$\begin{aligned} \cot O &= \sqrt{\cot^2 \beta + \cot^2 \delta} = \\ &= \sqrt{\cot^2 32^\circ + \cot^2 50^\circ} = \\ &= 1,80697. \end{aligned}$$

Olha-se nas tabelas o 'número mais próximo a 1,80697 na coluna das co-tangentes e leremos 1,80653 correspondente ao ângulo de $28^\circ 58'$. Logo:

Ângulo $O = 28^\circ 58'$, aproximadamente:

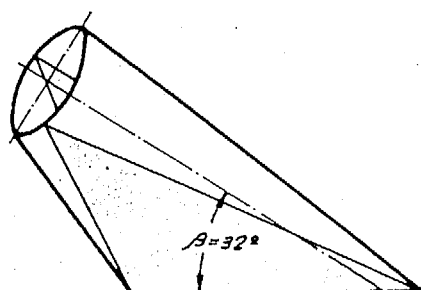


Figura 36

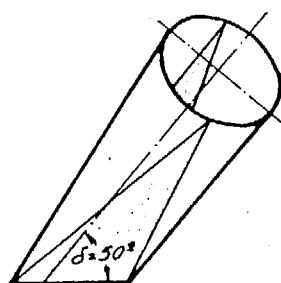


Figura 37

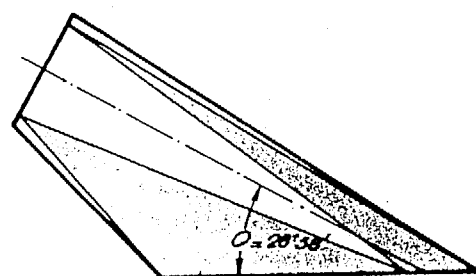


Figura 38

Resolução de triângulos retângulos

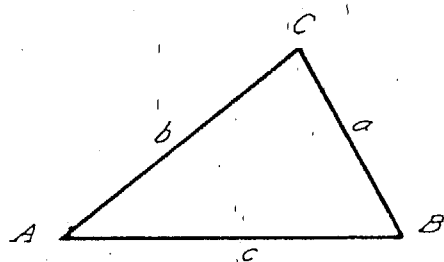


Figura 39

P = semiperímetro

S = superfície

Conhecendo	Achar	Fórmula	Conhecendo	Achar	Fórmula
$A \text{ e } B$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$a, b \text{ e } C$	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - (2a \times b \times \cos C)}$
$A \text{ e } C$	B	$B = 180^\circ - (A + C)$		$\text{tg } A$	$\text{tg } A = \frac{a \times \text{sen } C}{b - (a \times \cos C)}$
$B \text{ e } C$	A	$A = 180^\circ - (B + C)$		$\text{tg } B$	$\text{tg } B = \frac{b \times \text{sen } C}{a - (b \times \cos C)}$
$a, b \text{ e } c$	P	$P = \frac{a + b + c}{2}$		S	$S = \frac{a \times b \times \text{sen } C}{2}$
	S	$S = \sqrt{P \times (P - a) \times (P - b) \times (P - c)}$	$a, A \text{ e } B$	b	$b = \frac{a \times \text{sen } B}{\text{sen } A}$
	$\cos A$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b \times c}$	$a, A \text{ e } C$	c	$c = \frac{a \times \text{sen } C}{\text{sen } A}$
	$\cos B$	$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a \times c}$	$b, B \text{ e } A$	a	$a = \frac{b \times \text{sen } A}{\text{sen } B}$
	$\cos C$	$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a \times b}$	$b, B \text{ e } C$	c	$c = \frac{b \times \text{sen } C}{\text{sen } B}$
$a, c \text{ e } B$	b	$b = \sqrt{a^2 + c^2 - (2a \times c \times \cos B)}$	$c, C \text{ e } A$	a	$a = \frac{c \times \text{sen } A}{\text{sen } C}$
	$\text{tg } A$	$\text{tg } A = \frac{a \times \text{sen } B}{c - (a \times \cos B)}$	$c, C \text{ e } B$	b	$b = \frac{c \times \text{sen } B}{\text{sen } C}$
	$\text{tg } C$	$\text{tg } C = \frac{a \times \text{sen } B}{a - (c \times \cos B)}$	$a, c \text{ e } A$	$\text{sen } C$	$\text{sen } C = \frac{c \times \text{sen } A}{a}$
	S	$S = \frac{a \times c \times \text{sen } B}{2}$	$a, c \text{ e } C$	$\text{sen } A$	$\text{sen } A = \frac{a \times \text{sen } C}{c}$
$b, c \text{ e } A$	a	$a = \sqrt{b^2 + c^2 - (2b \times c \times \cos A)}$	$a, b \text{ e } A$	$\text{sen } B$	$\text{sen } B = \frac{b \times \text{sen } A}{a}$
	$\text{tg } B$	$\text{tg } B = \frac{b \times \text{sen } A}{c - (b \times \cos A)}$	$a, b \text{ e } B$	$\text{sen } A$	$\text{sen } A = \frac{a \times \text{sen } B}{b}$
	$\text{tg } C$	$\text{tg } C = \frac{c \times \text{sen } A}{b - (c \times \cos A)}$	$c, b \text{ e } C$	$\text{sen } B$	$\text{sen } B = \frac{b \times \text{sen } C}{c}$
	S	$S = \frac{b \times c \times \text{sen } A}{2}$	$c, b \text{ e } B$	$\text{sen } C$	$\text{sen } C = \frac{c \times \text{sen } B}{b}$

Resolução de triângulos obtusângulos

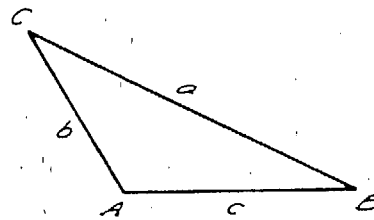


Figura 40

$$P = \frac{a + b + c}{2}$$

Conhecendo	Achar	Fórmulas		
$a, A \text{ e } B$	$C, b \text{ e } c$	$C = 180^\circ - (A + B)$	$b = \frac{a \times \text{sen } B}{\text{sen } A}$	$c = \frac{a \times \text{sen } (A + B)}{\text{sen } A}$
$a, B \text{ e } C$	$A, b \text{ e } c$	$A = 180^\circ - (B + C)$	$b = \frac{a \times \text{sen } B}{\text{sen } A}$	$c = \frac{a \times \text{sen } C}{\text{sen } A}$
$a, b \text{ e } A$	$B, C \text{ e } c$	$\text{sen } B = \frac{b \times \text{sen } A}{a}$	$C = 180^\circ - (A + B)$	$c = \frac{a \times \text{sen } C}{\text{sen } A}$
$a, b \text{ e } C$	$A, B \text{ e } c$	$\text{tg } \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \times \cot \frac{C}{2}$		$c = \frac{a \times \text{sen } C}{\text{sen } A}$
$a, b \text{ e } c$	$A, B \text{ e } C$	$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{P \times (P - a)}{b \times c}}$	$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{P \times (P - b)}{a \times c}}$	$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{P \times (P - c)}{a \times b}}$
	Superfície	$\text{Superfície} = \sqrt{P \times (P - a) \times (P - b) \times (P - c)}$		

Exemplo. Achar o ângulo A e B do triângulo obtusângulo A , B e C da figura 41 se o ângulo C vale 31° e os lados a e b medem 400 e 250 mm respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{tg } \frac{A - B}{2} &= \frac{a - b}{a + b} \times \cot \frac{C}{2} = \frac{400 - 250}{400 + 250} \times \cot \frac{31^\circ}{2} = \\ &= \frac{150}{650} \times 3,60588 = 0,83212 = 39^\circ 46' \end{aligned}$$

$$A + B = 180^\circ - C = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$$

$$B = \frac{149^\circ - (2 \times 39^\circ 46')}{2} = 34^\circ 44'$$

$$A = 149^\circ - B = 149^\circ - 34^\circ 44' = 114^\circ 16'$$

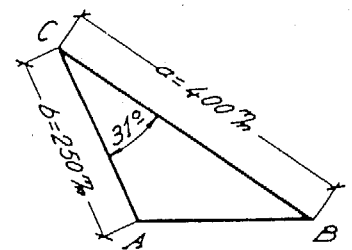
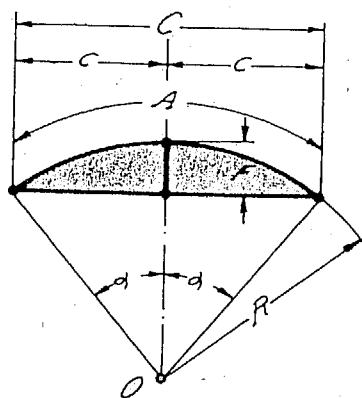


Figura 41

Raio, corda, flecha e ângulo central de um arco de círculo



R = raio
 C = corda
 c = semicorda
 A = arco
 F = flecha
 α = semi-ângulo

Figura 42

Achar	Conhecendo	Fórmula
R	c e α	$R = \frac{c}{\sin \alpha}$
	c e F	$R = \frac{c^2 + F^2}{2F}$
C	F e R	$C = 2 \sqrt{F \times (2R - F)}$
	R e α	$C = 2R \times \sin \alpha$
F	R e α	$F = R - (R \times \cos \alpha)$
	R e c	$F = R - \sqrt{R^2 - c^2}$
A	R e α	$A = \frac{2\alpha \times \pi \times R}{180}$
α	A e R	$\alpha = \frac{180 \times A}{\pi \times R}$
$\operatorname{tg} \alpha$	c, F e R	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{R - F}$
$\sin \alpha$	c e R	$\sin \alpha = \frac{c}{R}$
$\cos \alpha$	R e F	$\cos \alpha = \frac{R - F}{R}$

Exemplo. Conhecendo o raio $R = 400$ mm e a flecha $F = 60$ mm, achar o arco A , a corda C e o semi-ângulo α :

$$\cos \alpha = \frac{R - F}{R} = \frac{400 - 60}{400} = 0,85000 = 31^\circ 48' \text{ aproximadamente, conforme as tabelas.}$$

$$C = 2R \times \sin \alpha = 2 \times 400 \times 0,52696 = 421,56$$

Os 48' do ângulo α são traduzidos em centesimais, assim:

$$\frac{48 \times 100}{60} = 80; \text{ logo } \alpha = 31,80 \text{ graus}$$

$$A = \frac{2\alpha \times \pi \times R}{180} = \frac{2 \times 31,80 \times 3,1416 \times 400}{180} = 444,01 \text{ mm}$$

Desenvolvimento do tronco de cone reto

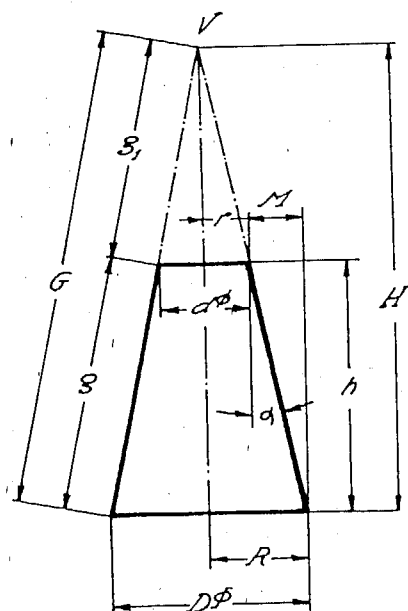
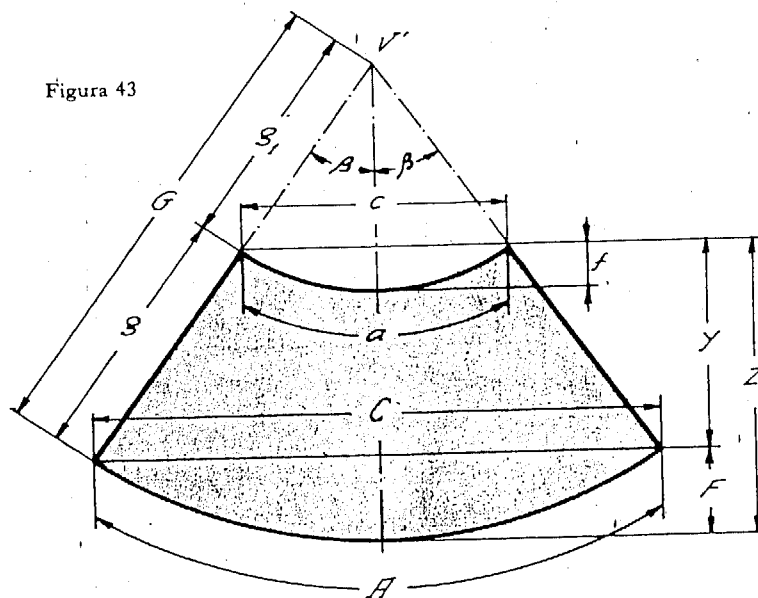


Figura 43



$$R = \frac{D\phi}{2}$$

$$r = \frac{d\phi}{2}$$

$$M = R - r$$

$$g = \sqrt{h^2 + M^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{g}$$

$$G = \frac{R \times g}{M} = \frac{R}{\sin \alpha} = g + g_1$$

$$g_1 = G - g = \frac{g \times r}{M} = \frac{r}{\sin \alpha}$$

$$H = \sqrt{G^2 - R^2} = \frac{R}{\tan \alpha}$$

$$A = \pi \times D\phi = 2\pi \times R$$

$$a = \pi \times d\phi = 2\pi \times r$$

$$\beta = \frac{180 \times R}{G} = \frac{180 \times r}{g_1} = \frac{90 \times A}{\pi \times G} = \frac{180 \times M}{g} = \frac{90 \times a}{\pi \times g_1}$$

$$C = 2G \times \sin \beta = 2 \sqrt{F \times (2G - F)}$$

$$c = 2g_1 \times \sin \beta = 2 \sqrt{f \times (2g_1 - f)}$$

$$F = G - (G \times \cos \beta) = G - \sqrt{G^2 - \left(\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$f = g_1 - (g_1 \times \cos \beta) = g_1 - \sqrt{g_1^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$Y = G + f - F = Z - F$$

$$Z = Y + F = g + f$$

Observação. Estando a circunferência dividida em 360 graus, cada um desses graus em 60 minutos e um minuto em 60 segundos, acontece que os ângulos são representados por um número complexo e se dirá um ângulo de 79 graus, 45 minutos e 7 segundos, escrevendo-se $79^\circ 45' 7''$.

Chamam-se números complexos todos os números formados por vários números de unidades diferentes, cuja subdivisão não é decimal.

Como dentro dos cálculos se verifica não raramente que é necessário transformar números decimais em complexos ou complexos em decimais, o processo de redução deve ser o seguinte:

Primeiro caso. Transformar o número decimal $26,2475^\circ$ em número complexo de minutos e de segundos.

$$\text{Solução: } 1^\circ = 60' \text{ logo } 0,2475^\circ = 0,2475 \times 60 = 14,85'$$

$$1' = 60'', \text{ logo } 0,85' = 0,85 \times 60 = 51''$$

$$\text{Portanto: } 26,2475^\circ = 26^\circ 14' 51''$$

Segundo caso. Transformar o número complexo $14^\circ 15' 21''$ em número decimal em que a parte inteira é 14° .

$$\text{Solução: } 14^\circ = 14 \times 60' = 840', \text{ logo } 14^\circ 15' = 840' + 15' = 855' = 855' \times 60'' = 51\,300'';$$

$$\text{portanto, } 14^\circ 15' 21'' = 51\,300'' + 21'' = 51\,321''.$$

$$\text{Se } 1^\circ = 60' \times 60'' = 3600''; 1'' \text{ é, por conseguinte, } \frac{1}{3600} \text{ de grau e } 51\,321'' = \frac{51\,321}{3600}$$

$$\text{de grau, ou então } 51\,321 : 3600 = 14,255833^\circ.$$

Linhas proporcionais

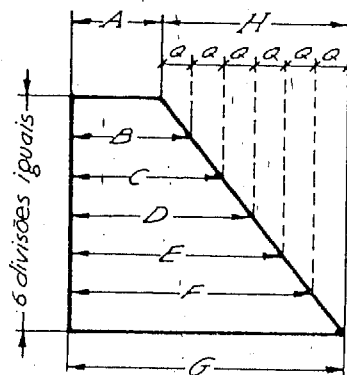


Figura 44

$$\begin{aligned} H &= G - A; Q = \frac{H}{6} \\ B &= A + Q = A + Q \\ C &= A + 2Q = B + Q \\ D &= A + 3Q = C + Q \\ E &= A + 4Q = D + Q \\ F &= A + 5Q = E + Q \\ G &= A + 6Q = F + Q \end{aligned}$$

Cálculo dos diâmetros e das geratrizes de um cone reto ao ser seccionado perpendicularmente ao eixo por vários planos

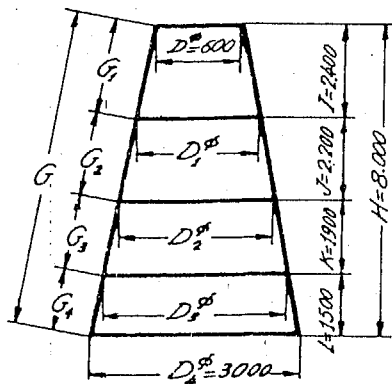


Figura 45

Exemplo. Se, por exigências do trabalho, temos que construir um tronco de cone de vários subconjuntos desiguais (quatro, por exemplo) com seus diâmetros $D^o = 600$ mm e $D_4^o = 3000$ mm; sua altura total $H = 8000$ mm e as alturas $I = 2400$ mm, $J = 2200$ mm, $K = 1900$ mm e $L = 1500$ mm; acham-se os diâmetros e as geratrizes dos correspondentes subconjuntos da seguinte maneira:

Primeiro calcula-se o coeficiente Q :

$$Q = \frac{D_4^o - D^o}{H} = \frac{3000 - 600}{8000} = 0,3$$

$$D_1^o = D^o + (Q \times I) = 600 + (0,3 \times 2400) = 1320 \text{ mm}$$

$$D_2^o = D_1^o + (Q \times J) = 1320 + (0,3 \times 2200) = 1980 \text{ mm}$$

$$D_3^o = D_2^o + (Q \times K) = 1980 + (0,3 \times 1900) = 2550 \text{ mm}$$

Depois calcula-se o coeficiente P :

$$M = \frac{D_4^o - D^o}{2} = \frac{3000 - 600}{2} = 1200$$

$$G = \sqrt{M^2 + H^2} = \sqrt{1200^2 + 8000^2} = 8089,4 \text{ mm}$$

$$P = \frac{G}{H} = \frac{8089,4}{8000} = 1,01116$$

$$G_1 = P \times I = 1,01117 \times 2400 = 2426,80 \text{ mm}$$

$$G_2 = P \times J = 1,01117 \times 2200 = 2224,57 \text{ mm}$$

$$G_3 = P \times K = 1,01117 \times 1900 = 1921,22 \text{ mm}$$

$$G = P \times L = 1,01117 \times 1500 = 1516,75 \text{ mm}$$

Cálculo das ordenadas de um arco de círculo, dividido em certo número de partes iguais (três, por exemplo)

São conhecidas a flecha F e a semicorda C :

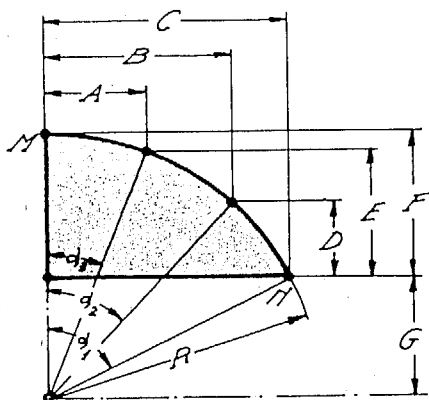


Figura 46

$$R = \frac{C^2 + F^2}{2F}$$

$$G = R - F$$

$$\text{sen } \alpha_1 = \frac{C}{R}$$

$$\text{sen } \alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{3}$$

$$\text{sen } \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{3}$$

$$\text{arco } MN = \frac{\alpha \times \pi \times R}{180}$$

$$\begin{aligned} A &= R \times \text{sen } \alpha_3 & \text{ou também } \sqrt{R^2 - (G + E)^2} \\ B &= R \times \text{sen } \alpha_2 & \text{ou também } \sqrt{R^2 - (G + D)^2} \\ D &= (R - \cos \alpha_2) - G & \text{ou também } (\sqrt{R^2 - B^2}) - G \\ E &= (R \times \cos \alpha_3) - G & \text{ou também } (\sqrt{R^2 - A^2}) - G \end{aligned}$$

Cálculo das ordenadas de um arco de círculo, dividindo a semicorda em certo número de partes iguais ou desiguais (três, por exemplo).

São conhecidas a flecha F e a semicorda C :

$$R = \frac{C^2 + F^2}{2F}$$

$$G = R - F$$

$$D = (\sqrt{R^2 - B^2}) - G$$

$$E = (\sqrt{R^2 - A^2}) - G$$

$$\text{sen } \alpha_1 = \frac{C}{R}$$

$$\text{sen } \alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{3}$$

$$\text{sen } \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{3}$$

$$\text{arco } MN = \frac{\alpha \times \pi \times R}{180}$$

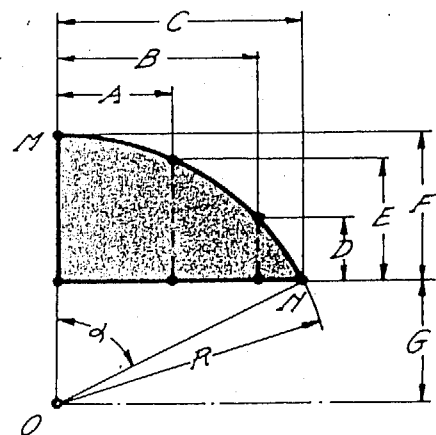


Figura 47

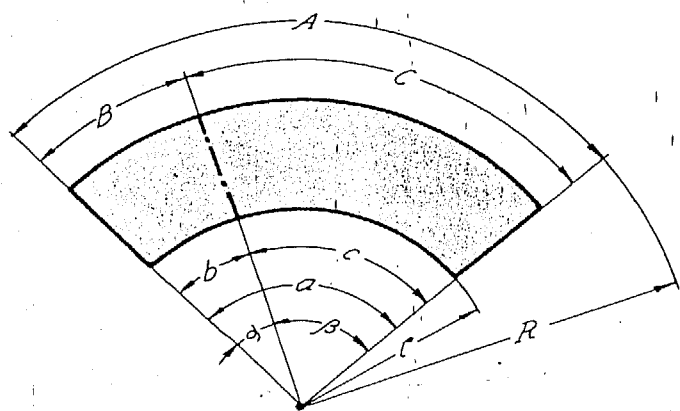


Figura 48

Igualdades

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

$$\frac{A}{R} = \frac{a}{r}$$

$$\frac{B}{R} = \frac{b}{r}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$$

$$\frac{B}{a} = \frac{C}{\beta}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{\beta}$$

Achar	Conhecendo	Fórmula	Achar	Conhecendo	Fórmula
A	a, b e B	$A = \frac{a \times B}{b}$	a	b, B e A	$a = \frac{b \times A}{B}$
	a, c e C	$A = \frac{a \times C}{c}$		a, C e A	$a = \frac{c \times A}{C}$
	R, r e a	$A = \frac{R \times a}{r}$		r, R e A	$a = \frac{r \times A}{R}$
B	b, a e A	$B = \frac{b \times A}{a}$	b	a, A e B	$b = \frac{a \times B}{A}$
	b, c e C	$B = \frac{b \times C}{c}$		c, C e B	$b = \frac{c \times B}{C}$
	R, r e b	$B = \frac{R \times b}{r}$		r, R e B	$b = \frac{r \times B}{R}$
	a, β e C	$B = \frac{a \times C}{\beta}$		a, β e c	$b = \frac{a \times c}{\beta}$
C	c, a e A	$C = \frac{c \times A}{a}$	c	a, A e C	$c = \frac{a \times C}{A}$
	c, b e B	$C = \frac{c \times B}{b}$		b, B e C	$c = \frac{b \times C}{B}$
	R, r e c	$C = \frac{R \times c}{r}$		r, R e C	$c = \frac{r \times C}{R}$
	β, a e B	$C = \frac{\beta \times B}{a}$		β, a e b	$c = \frac{\beta \times b}{a}$
R	r, a e A	$R = \frac{r \times A}{a}$	r	R, A e a	$r = \frac{R \times a}{A}$
	r, b e B	$R = \frac{r \times B}{b}$		R, B e b	$r = \frac{R \times b}{B}$
	r, c e C	$R = \frac{r \times C}{c}$		R, C e c	$r = \frac{R \times c}{C}$
a	β, C e B	$a = \frac{\beta \times B}{C}$	β	a, B e C	$\beta = \frac{a \times C}{B}$
	β, c e b	$a = \frac{\beta \times b}{c}$		a, b e c	$\beta = \frac{a \times c}{b}$

Exemplo. Achar o ângulo α , sabendo que β é igual a $32^\circ 15'$ e b e c 12 e 30, respectivamente. Primeiramente se traduzem em centesimais os 15 minutos do ângulo β :

$$\frac{15 \times 100}{60} = 25; \text{ logo, } \beta = 32,25^\circ$$
$$\alpha = \frac{\beta \times b}{c} = \frac{32,25 \times 12}{30} = 12,90.$$

Os 90 centésimos de grau se traduzem em minutos, assim:

$$\frac{90 \times 60}{100} = 54'; \text{ logo } \alpha = 12^\circ 54'$$

Triângulos semelhantes

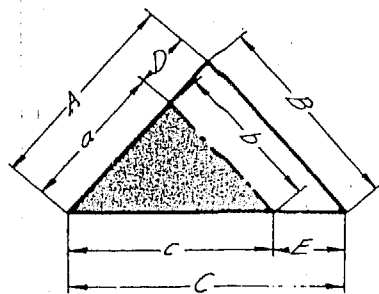


Figura 49

P = semiperímetro

S = superfície

$$P = \frac{A + B + C}{2}$$

$$S = \sqrt{P \times (P-A) \times (P-B) \times (P-C)}$$

Igualdades

$$\frac{A}{a} = \frac{C}{c}$$

$$\frac{A}{D} = \frac{C}{E}$$

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

$$\frac{C}{c} = \frac{B}{b}$$

$$\frac{a}{D} = \frac{c}{E}$$

$$A = \frac{a \times C}{c} = \frac{D \times C}{E} = \frac{a \times B}{b}$$

$$B = \frac{b \times A}{a} = \frac{b \times C}{c}$$

$$C = \frac{c \times A}{a} = \frac{E \times A}{D} = \frac{c \times B}{b}$$

$$a = \frac{A \times c}{C} = \frac{A \times b}{B} = \frac{D \times c}{E}$$

$$b = \frac{B \times a}{A} = \frac{B \times c}{C}$$

$$c = \frac{a \times C}{A} = \frac{C \times b}{B} = \frac{a \times E}{D}$$

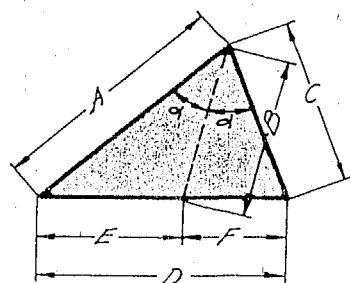


Figura 50

$$E = \frac{A \times D}{A + C} = \frac{(A \times C) - B^2}{F}$$

$$= \frac{A \times F}{C}$$

$$F = \frac{C \times D}{A + C} = \frac{(A \times C) - B^2}{E}$$

$$= \frac{C \times E}{A}$$

$$B = \sqrt{(A \times C) - (E \times F)}$$

$$A = \frac{C \times E}{F} = \frac{B^2 + (E \times F)}{C}$$

$$C = \frac{A \times F}{E} = \frac{B^2 + (E \times F)}{A}$$

$$D = \frac{E \times (A + C)}{A}$$

$$= \frac{F \times (A + C)}{C}$$

Mediana

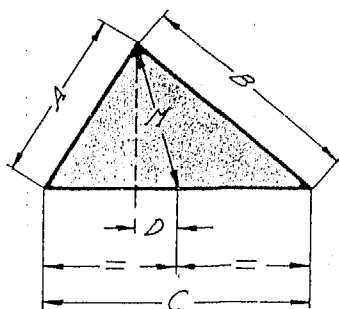


Figura 51

$$A^2 + B^2 = \left[2 \left(\frac{C^2}{4} \right) + M^2 \right]$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{A^2 + B^2}{2} \right) - \left(\frac{C^2}{4} \right)}$$

$$A = \sqrt{\left[2 \left(\frac{C^2}{4} \right) + M^2 \right] - B^2}$$

$$B = \sqrt{\left[2 \left(\frac{C^2}{4} \right) + M^2 \right] - A^2}$$

$$2C \times D = B^2 - A^2$$

$$A = \sqrt{B^2 - (2C \times D)}$$

$$B = \sqrt{A^2 + (2C \times D)}$$

$$C = \frac{B^2 - A^2}{2D}$$

$$D = \frac{B^2 - A^2}{2C}$$

Intersecção dos lados de um triângulo qualquer

Primeiro caso. Quando os dois ângulos são agudos:

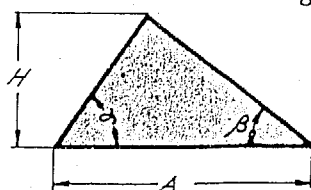


Figura 52

$$H = \frac{A}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$A = H \times (\cot \alpha + \cot \beta)$$

Segundo caso. Quando um dos ângulos é obtuso:

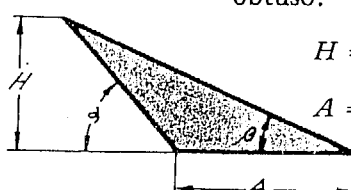


Figura 53

$$H = \frac{A}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

$$A = H \times (\cot \beta - \cot \alpha)$$

Ordenadas e abscissas do ponto de intersecção das diagonais de um trapézio

Se ec é paralela a ad , ae será igual a cd ; logo, os polígonos $ebcd$ e $abOf$ são semelhantes por serem compostos de triângulos também semelhantes; portanto, teremos as seguintes proporções:

$$\frac{A+B}{B} = \frac{A}{X}; \text{ logo, } X = \frac{A \times B}{A+B}$$

$$\frac{A+B}{H} = \frac{A}{Y}; \text{ portanto, } Y = \frac{H \times A}{A+B}$$

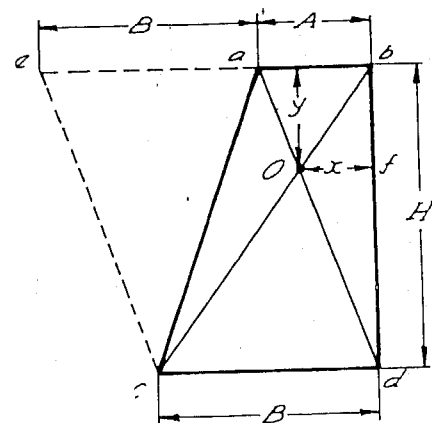


Figura 54

Ponto de intersecção das diagonais do trapézio

Se AE é paralela a BC , EC será igual a AB , e os dois triângulos ADE e ODC serão semelhantes, dando lugar à seguinte proporção:

$$\frac{AD}{OD} = \frac{CD + AB}{CD}; \text{ logo } OD = \frac{AD \times CD}{CD + AB}$$

Se BF for paralela a AD , DF será igual a AB , e os dois triângulos BCF e OCD serão semelhantes, dando a seguinte proporção:

$$\frac{BC}{OC} = \frac{CD + AB}{CD}; \text{ portanto, } OC = \frac{BC \times CD}{CD + AB}$$

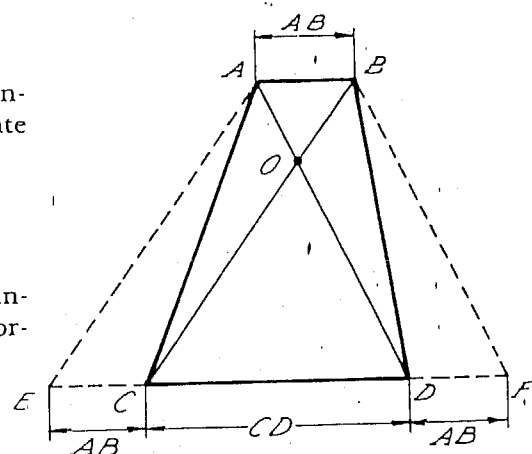


Figura 55

Diagonais do trapézio

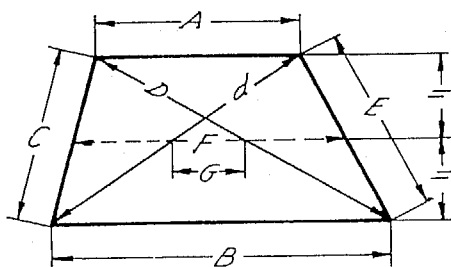


Figura 56

$$F = \frac{A+B}{2}$$

$$G = \frac{B-A}{2}$$

$$C^2 + E^2 = d^2 + D^2 - (2A \times B)$$

$$D = \sqrt{C^2 + E^2 + (2A \times B - d^2)}$$

$$d = \sqrt{C^2 + E^2 + (2A \times B - D^2)}$$

$$C = \sqrt{d^2 + D^2 - (2A \times B - E^2)}$$

$$E = \sqrt{D^2 + d^2 - (2A \times B - C^2)}$$

$$A = \frac{D^2 + d^2 - C^2 - E^2}{2B}$$

$$B = \frac{D^2 + d^2 - C^2 - E^2}{2A}$$

Se F é paralela às bases A e B e passa pelos centros de C e E , temos:

$$F = \frac{A+B}{2} \text{ e } G = \frac{B-A}{2}$$

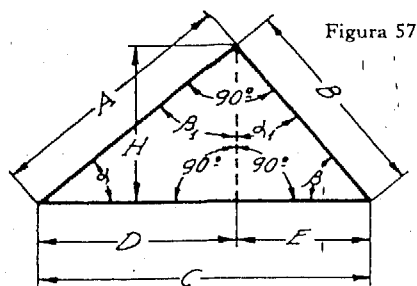


Figura 57

Triângulo retângulo

(D e E são as proporcionais de A e B, respectivamente)

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\alpha_1 = \alpha$$

$$\beta_1 = \beta$$

$$\text{Superfície} = \frac{A \times B}{2}$$

$$\text{Superfície} = \frac{C \times H}{2}$$

Achar	Conhecendo	Fórmula	Achar	Conhecendo	Fórmula
Lado A	C e B	$A = \sqrt{C^2 - B^2}$	Lado C	A e B	$C = \sqrt{A^2 + B^2}$
	C e D	$A = \sqrt{C \times D}$		H, A e B	$C = \frac{A \times B}{H}$
	B, D e E	$A = B \times \sqrt{\frac{E}{D}}$	D	A e C	$D = \frac{A^2}{C}$
	H, B e C	$A = \frac{H \times C}{B}$		A, B e E	$D = \frac{E \times A^2}{B^2}$
Lado B	C e A	$B = \sqrt{C^2 - A^2}$	E	B e C	$E = \frac{B^2}{C}$
	C e E	$B = \sqrt{C \times E}$		A, B e D	$E = \frac{D \times B^2}{A^2}$
	A, D e E	$B = A \times \sqrt{\frac{E}{D}}$	H	A, B e C	$H = \frac{A \times B}{C}$
	H, A e C	$B = \frac{H \times C}{A}$		D e E	$H = \sqrt{D \times E}$

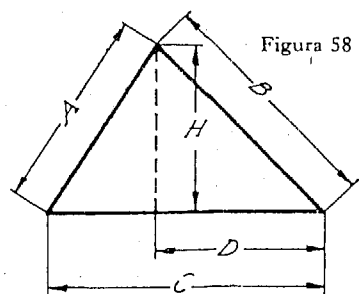


Figura 58

Triângulo acutângulo (D é a projeção de B)

$$P = \frac{A + B + C}{2}$$

$$S = \sqrt{P \times (P - A) \times (P - B) \times (P - C)}$$

$$S = \frac{C \times H}{2}$$

$$H = \frac{2S}{C}$$

$$C = \frac{2S}{H}$$

$$A^2 = B^2 + C^2 - (2C \times D)$$

$$D = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2C}$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 - (2C \times D)}$$

$$B = \sqrt{A^2 + (2C \times D) - C^2}$$

P = semiperímetro

S = superfície

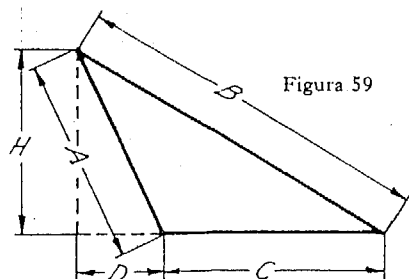


Figura 59

Triângulo obtusângulo (D é a projeção de A)

$$P = \frac{A + B + C}{2}$$

$$S = \sqrt{P \times (P - A) \times (P - B) \times (P - C)}$$

$$S = \frac{C \times H}{2}$$

$$H = \frac{2S}{C}$$

$$C = \frac{2S}{H}$$

$$B^2 = A^2 + C^2 + (2C \times D)$$

$$D = \frac{B^2 - A^2 - C^2}{2C}$$

$$A = \sqrt{B^2 - (2C \times D) - C^2}$$

$$B = \sqrt{A^2 + C^2 + (2C \times D)}$$

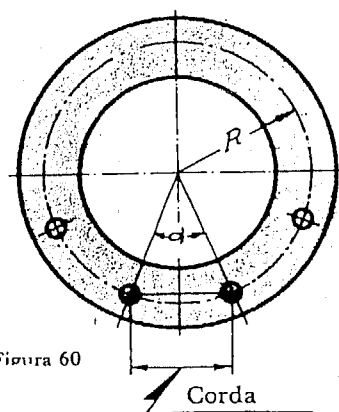
P = semiperímetro

S = superfície

Tabela de ângulos e cordas de uma circunferência de raio = 1 dividida em partes iguais (método para marcar orifícios em flanges).

Exemplo. Para dividir uma circunferência de raio 460 mm em treze partes iguais, multiplica-se por 460 o comprimento 0,4786 indicada na tabela para treze divisões.

Corda correspondente = $460 \times 0,4786 = 220,156$ mm.



Número de divisões	α = graus e minutos	Corda	Número de divisões	α = graus e minutos	Corda
3	120°	1,7321	52	6° 56'	0,1207
4	90°	1,4142	53	6° 47'	0,1184
5	72°	1,1756	54	6° 40'	0,1164
6	60°	1,0000	55	6° 32'	0,1143
7	51° 25'	0,8678	56	6° 25'	0,1122
8	45°	0,7654	57	6° 18'	0,1103
9	40°	0,6840	58	6° 12'	0,1084
10	36°	0,6180	59	6° 6'	0,1064
11	32° 43'	0,5635	60	6°	0,1047
12	30°	0,5176	61	5° 54'	0,1030
13	27° 41'	0,4786	62	5° 48'	0,1014
14	25° 42'	0,4460	63	5° 42'	0,0996
15	25°	0,4158	64	5° 37'	0,0982
16	22° 30'	0,3902	65	5° 32'	0,0967
17	21° 10'	0,3676	66	5° 27'	0,0951
18	20°	0,3473	67	5° 22'	0,0937
19	18° 56'	0,3292	68	5° 17'	0,0923
20	18°	0,3129	69	5° 13'	0,0911
21	17° 8'	0,2980	70	5° 8'	0,0897
22	16° 21'	0,2845	71	5° 4'	0,0884
23	15° 39'	0,2723	72	5°	0,0872
24	15°	0,2611	73	4° 55'	0,0860
25	14° 24'	0,2507	74	4° 51'	0,0848
26	13° 50'	0,2411	75	4° 48'	0,0837
27	13° 20'	0,2321	76	4° 44'	0,0827
28	12° 51'	0,2240	77	4° 40'	0,0816
29	12° 24'	0,2162	78	4° 36'	0,0806
30	12°	0,2091	79	4° 33'	0,0795
31	11° 36'	0,2023	80	4° 30'	0,0785
32	11° 15'	0,1961	81	4° 26'	0,0775
33	10° 54'	0,1901	82	4° 23'	0,0766
34	10° 35'	0,1846	83	4° 20'	0,0757
35	10° 17'	0,1793	84	4° 17'	0,0748
36	10°	0,1743	85	4° 14'	0,0740
37	9° 43'	0,1697	86	4° 11'	0,0731
38	9° 28'	0,1652	87	4° 8'	0,0722
39	9° 13'	0,1609	88	4° 5'	0,0714
40	9°	0,1569	89	4° 2'	0,0705
41	8° 46'	0,1531	90	4°	0,0698
42	8° 34'	0,1494	91	3° 57'	0,0691
43	8° 22'	0,1459	92	3° 54'	0,0684
44	8° 10'	0,1426	93	3° 52'	0,0675
45	8°	0,1395	94	3° 49'	0,0668
46	7° 49'	0,1365	95	3° 47'	0,0661
47	7° 39'	0,1336	96	3° 45'	0,0656
48	7° 30'	0,1308	97	3° 42'	0,0648
49	7° 20'	0,1282	98	3° 40'	0,0641
50	7° 12'	0,1256	99	3° 38'	0,0635
51	7° 3'	0,1231	100	3° 36'	0,0628

Perímetro da elipse

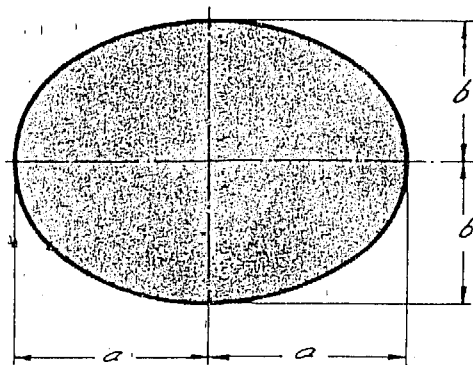


Figura 61

L = perímetro

Para obter o comprimento L do perímetro da elipse, multiplica-se o semi-eixo maior a por duas vezes o coeficiente π' da tabela, sendo este coeficiente variável conforme a relação existente entre os dois semi-eixos:

$$L = 2\pi' \times a$$

Exemplo. O perímetro de uma elipse, cujos semi-eixos a e b medem 400 e 200 mm, respectivamente, será o seguinte:

$$\frac{b}{a} = \frac{200}{400} = 0,5$$

Olha-se nas tabelas e veremos que para o número 0,5 o coeficiente π' é igual a 2,4221. Logo:

$$L = 2\pi' \times a = 2 \times 2,4221 \times 400 = 1937,68 \text{ mm}$$

Tabelas do coeficiente π'

$\frac{b}{a}$	π'	$\frac{b}{a}$	π'	$\frac{b}{a}$	π'	$\frac{b}{a}$	π'	$\frac{b}{a}$	π'
0,00	2,0000	0,21	2,1093	0,42	2,3246	0,63	2,5935	0,84	2,8958
0,01	2,0006	0,22	2,1178	0,43	2,3364	0,64	2,6073	0,85	2,9108
0,02	2,0019	0,23	2,1266	0,44	2,3483	0,65	2,6211	0,86	2,9258
0,03	2,0039	0,24	2,1355	0,45	2,3604	0,66	2,6350	0,87	2,9410
0,04	2,0066	0,25	2,1446	0,46	2,3725	0,67	2,6489	0,88	2,9561
0,05	2,0097	0,26	2,1539	0,47	2,3848	0,68	2,6630	0,89	2,9711
0,06	2,0134	0,27	2,1634	0,48	2,3971	0,69	2,6771	0,90	2,9866
0,07	2,0174	0,28	2,1731	0,49	2,4096	0,70	2,6912	0,91	3,0019
0,08	2,0219	0,29	2,1830	0,50	2,4221	0,71	2,7054	0,92	3,0173
0,09	2,0268	0,30	2,1930	0,51	2,4348	0,72	2,7197	0,93	3,0327
0,10	2,0320	0,31	2,2031	0,52	2,4475	0,73	2,7341	0,94	3,0481
0,11	2,0376	0,32	2,2135	0,53	2,4604	0,74	2,7485	0,95	3,0636
0,12	2,0435	0,33	2,2240	0,54	2,4733	0,75	2,7629	0,96	3,0791
0,13	2,0497	0,34	2,2346	0,55	2,4863	0,76	2,7775	0,97	3,0947
0,14	2,0563	0,35	2,2454	0,56	2,4994	0,77	2,7921	0,98	3,1103
0,15	2,0631	0,36	2,2563	0,57	2,5126	0,78	2,8067	0,99	3,1259
0,16	2,0702	0,37	2,2674	0,58	2,5259	0,79	2,8214	1,00	3,1416
0,17	2,0775	0,38	2,2786	0,59	2,5393	0,80	2,8362	—	—
0,18	2,0851	0,39	2,2899	0,60	2,5527	0,81	2,8510	—	—
0,19	2,0930	0,40	2,3013	0,61	2,5662	0,82	2,8659	—	—
0,20	2,1010	0,41	2,3129	0,62	2,5798	0,83	2,8808	—	—

Fórmulas geométricas

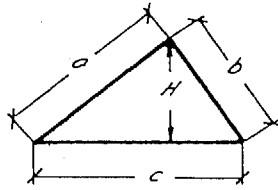


Figura 62

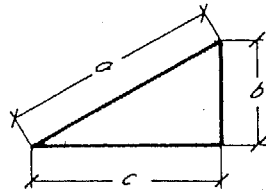


Figura 63

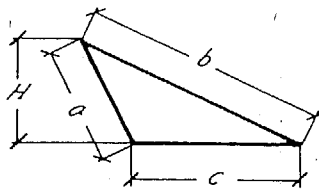


Figura 64

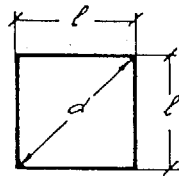


Figura 65

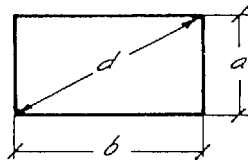


Figura 66

Triângulo acutângulo

$$A = \text{área} = \frac{c \times H}{2}$$

$$A = \frac{c}{2} \times \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2}$$

$$P = \text{semiperímetro} = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A = \sqrt{P \times (P - a) \times (P - b) \times (P - c)}$$

Triângulo retângulo

$$A = \text{área} = \frac{c \times b}{2}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Triângulo obtusângulo

$$A = \text{área} = \frac{c \times H}{2}$$

$$A = \frac{c}{2} \times \sqrt{a^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c} \right)^2}$$

$$P = \text{semiperímetro} = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A = \sqrt{P \times (P - a) \times (P - b) \times (P - c)}$$

Quadrado

$$A = \text{área} = l^2$$

$$l = 0,7071 \times d = \sqrt{A}$$

$$d = 1,4142 \times l$$

Retângulo

$$A = \text{área} = a \times b$$

$$A = a \times \sqrt{d^2 - a^2} = b \times \sqrt{d^2 - b^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{d^2 - b^2} = \frac{A}{b}$$

$$b = \sqrt{d^2 - a^2} = \frac{A}{a}$$

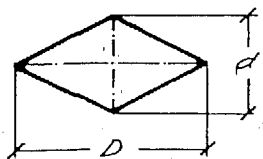


Figura 67

Rombo

$$A = \text{área} = \frac{D \times d}{2}$$

$$P = \text{perímetro} = 2 \sqrt{D^2 + d^2}$$

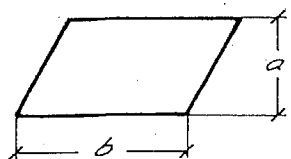


Figura 68

Paralelogramo

$$A = \text{área}$$

$$A = a \times b$$

$$a = \frac{A}{b}$$

$$b = \frac{A}{a}$$

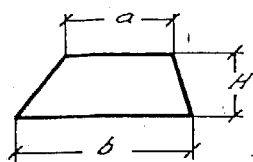


Figura 69

Trapézio

$$A = \text{área}$$

$$A = \frac{a + b}{2} \times H$$

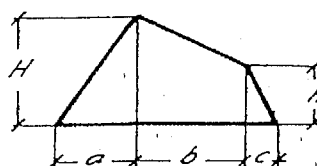


Figura 70

Trapezóide

$$A = \text{área}$$

$$A = \frac{(H + h) b + aH + ch}{2}$$

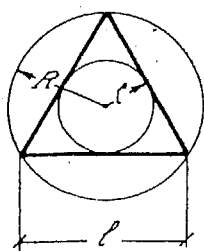


Figura 71

Triângulo equilátero inscrito

A soma dos três ângulos é igual a 180° , sendo 60° o valor de cada um:

$$r = 0,28867 \times l$$

$$R = 0,57735 \times l$$

$$l = 1,73206 \times R$$

$$l = 3,46412 \times r$$

$$A = 1,299 \times R^2 = 5,192 \times r^2 = 0,433 \times l^2$$

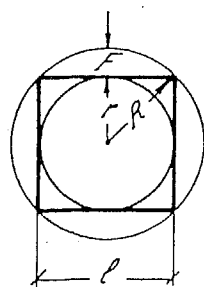


Figura 72

Quadrado inscrito

$$R = 0,7071 \times l$$

$$r = 0,5 \times l$$

$$l = 1,4142 \times R = 2r$$

$$A = l^2 = 2R^2 = 4r^2$$

$$F = R - r$$

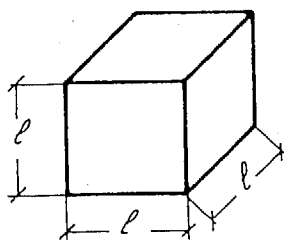


Figura 73

Cubo

$V = \text{volume}$

$$V = l^3 = l \times l \times l$$

$$l = \sqrt[3]{V}$$

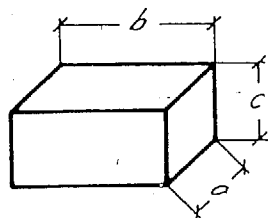


Figura 74

Paralelepípedo

$V = \text{volume}$

$$V = a \times b \times c$$

$$a = \frac{V}{b \times c}; b = \frac{V}{a \times c}; c = \frac{V}{a \times b}$$

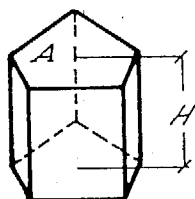


Figura 75

Prisma

$A = \text{área da base}$

$V = \text{volume}$

$$V = A \times H$$

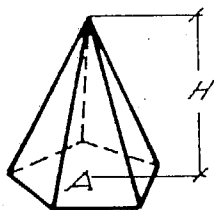


Figura 76

Pirâmide

$A = \text{área da base}$

$V = \text{volume}$

$$V = \frac{A \times H}{3}$$

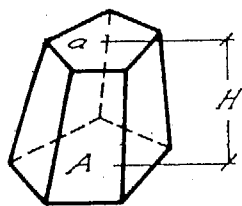


Figura 77

Pirâmide truncada

$A = \text{área da base maior}$

$a = \text{área da base menor}$

$V = \text{volume}$

$$V = \frac{H \times (A + a + \sqrt{A \times a})}{3}$$

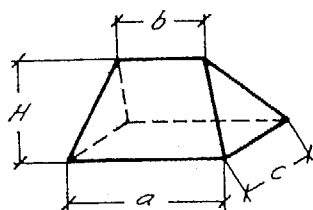


Figura 78

Cunha

$V = \text{volume}$

$$V = \frac{c \times H \times (2a + b)}{6}$$

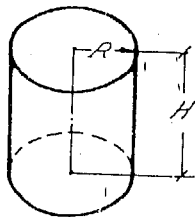


Figura 79

Cilindro reto

V = volume

S = superfície lateral do cilindro

A = área total do cilindro

$$V = \pi \times R^2 \times H$$

$$S = 2\pi \times R \times H$$

$$A = 2\pi \times R \times (R + H)$$

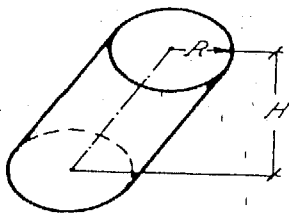


Figura 80

Cilindro oblquo

V = volume

S = superfície lateral do cilindro

A = área total do cilindro

$$V = \pi \times R^2 \times H$$

$$S = 2\pi \times R \times H$$

$$A = 2\pi \times R \times (R + H)$$

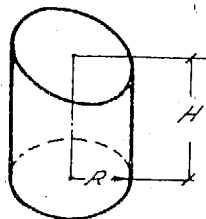


Figura 81

Cilindro truncado

S = superfície lateral do cilindro

V = volume

$$S = 2\pi \times R \times H$$

$$V = \pi \times R^2 \times H$$

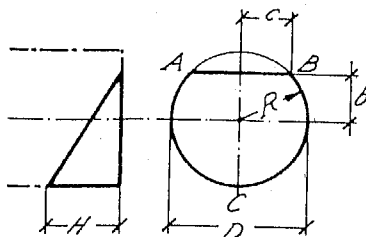


Figura 82

Cunha cilíndrica

A = área lateral

V = volume

$$A = (c \times D \pm b \times \text{comprimento do arco } ABC) \times \frac{H}{R \pm b}$$

$$V = (0,666 \times c^3 \pm b \times \text{área } ABC) + \frac{H}{R \pm b}$$

Nota. Usar o sinal mais (+) quando a superfície da base for maior que a metade do círculo e o sinal menos (-) em caso contrário.

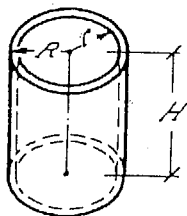


Figura 83

Cilindro ôco

V = volume

$$V = \pi \times H \times (R^2 - r^2)$$

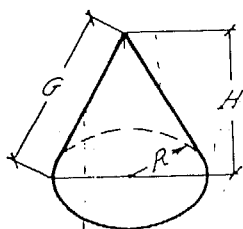


Figura 84

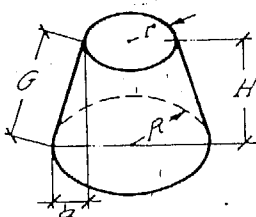


Figura 85

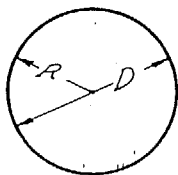


Figura 86



Figura 87

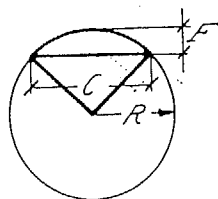


Figura 88

Cone

V = volume e G = geratriz

A = área da superfície cônica

$$V = \frac{\pi \times R^2 \times H}{3} = 1,0472 \times R^2 \times H$$

$$A = \pi \times R \times G$$

$$G = \sqrt{H^2 + R^2}$$

Cone truncado

A = área lateral do tronco de cone

V = volume e G = geratriz

$$V = \frac{\pi \times H}{3} \times (R^2 + Rr + r^2)$$

$$A = \pi \times G \times (R + r)$$

$$G = \sqrt{a^2 + H^2} = \sqrt{(R - r)^2 + H^2}$$

$$a = R - r$$

Esfera

V = volume

A = área ou superfície

$$A = 4\pi \times R^2 = \pi \times D^2$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0,6204 \times \sqrt[3]{V}$$

$$V = \frac{4\pi \times R^3}{3} = \frac{\pi \times D^3}{6}$$

Esfera ôca

V = volume

$$V = \frac{4\pi}{3} \times (R^3 - r^3)$$

Setor esférico

A = área total da superfície cônica e esférica

V = volume

$$A = \pi \times R \times \left(2F + \frac{C}{2} \right)$$

$$V = \frac{2\pi \times R^2 \times F}{3}$$

$$C = 2 \sqrt{F \times (2R - F)}$$

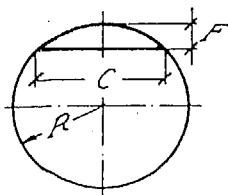


Figura 89

Calota esférica

A = área da superfície esférica

V = volume

$$A = 2\pi \times R \times F = 6,2832 \times R \times F = \pi \times \left(\frac{C^2}{4} + F^2 \right)$$

$$V = \pi \times F^2 \times \left(R - \frac{F}{3} \right) = \pi \times F \times \left(\frac{C^2}{8} + \frac{F^2}{6} \right)$$

$$C = 2 \sqrt{F \times (2R - F)}; F = R - \frac{\sqrt{4R^2 - C^2}}{2}$$

$$R = \frac{C^2 + 4F^2}{8F}$$

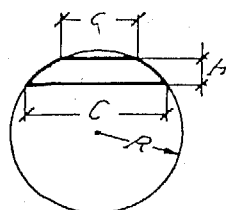


Figura 90

Zona esférica

A = área da superfície esférica

V = volume

$$A = 2\pi \times R \times H$$

$$V = \frac{\pi \times H}{6} \times \left(\frac{3C^2}{4} + \frac{3C^2}{4} \right) + H^2$$

$$R = \sqrt{\frac{C^2}{4} + \left(\frac{C^2 - C^2 - 4H^2}{8H} \right)^2}$$

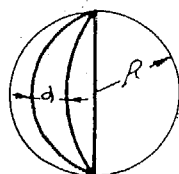


Figura 91

Cunha esférica

α = ângulo da cunha

A = área da superfície esférica

V = volume

$$A = \frac{\alpha}{360} \times 4\pi \times R^2 = 0,0349 \times \alpha \times R^2$$

$$V = \frac{\alpha}{360} \times \frac{4\pi \times R^3}{3} = 0,0116 \times \alpha \times R^3$$

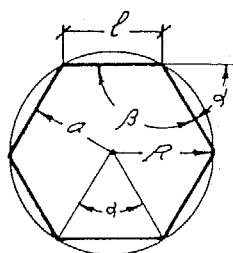


Figura 92

Polígonos regulares

a = apotema

A = área; n = número de lados

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}; \beta = 180^\circ - \alpha$$

$$A = \frac{n \times l \times a}{2} = \frac{n \times l}{2} \times \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$

$$R = \sqrt{a^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$a = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = R \times \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$l = 2 \sqrt{R^2 - a^2}$$

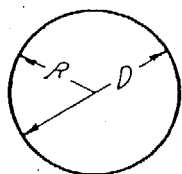


Figura 93

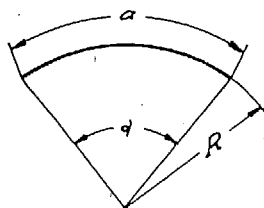


Figura 94

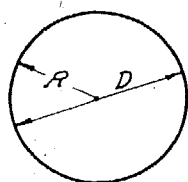


Figura 95

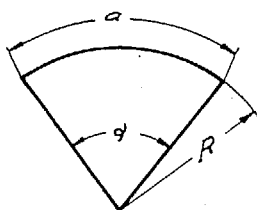


Figura 96

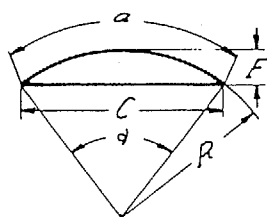


Figura 97

Circunferência

C = desenvolvimento da circunferência

$$C = 2\pi \times R = 6,2832 \times R$$

$$C = \pi \times D = 3,1416 \times D$$

$$R = \frac{C}{6,2832} \text{ y } D = \frac{C}{3,1416}$$

Comprimento de um arco

a = comprimento do arco

α = ângulo do arco

$$a = \pi \times R \times \frac{\alpha}{180} = 0,01745 \times \alpha \times R$$

$$a = \frac{57,296 \times \alpha}{R} = \frac{a}{R} \times \left(\frac{360}{2\pi} \right)$$

Círculo

A = área

$$A = \pi \times R^2 = 3,1416 \times R^2 = 0,7854 \times D^2$$

$$R = \sqrt{\frac{A}{3,1416}} = 0,564 \times \sqrt{A}$$

$$D = \sqrt{\frac{A}{0,7854}} = 1,128 \times \sqrt{A}$$

Setor circular

A = área; a = comprimento do arco

α = ângulo do setor

$$a = \frac{R \times \alpha \times 3,1416}{180} = 0,01745 \times \alpha \times R = \frac{2A}{R}$$

$$A = \frac{a \times R}{2} = 0,008727 \times \alpha \times R^2$$

$$a = \frac{57,296 \times \alpha}{R}; R = \frac{2A}{a} = \frac{57,296 \times a}{\alpha}$$

Segmento circular

A = área; a = comprimento do arco

α = ângulo do segmento

$$A = \frac{(R \times a) - C \times (R - F)}{2}$$

$$a = \frac{57,296 \times \alpha}{R} = \frac{a}{R} \times \left(\frac{360}{2\pi} \right)$$

$$a = \pi \times R \times \frac{\alpha}{180} = 0,01745 \times \alpha \times R$$

$$C = 2 \sqrt{F \times (2R - F)}$$

$$F = R - \frac{\sqrt{4R^2 - C^2}}{2}$$

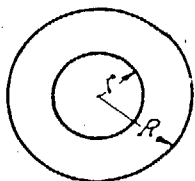


Figura 98

Coroa circular

A = área

$$A = \pi \times (R^2 - r^2) = 3,1416 \times (R^2 - r^2)$$

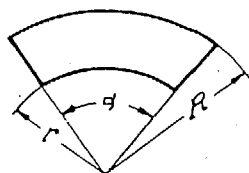


Figura 99

Setor de coroa circular ou trapézio circular

A = área

α = ângulo do setor

$$A = \frac{\alpha \times \pi}{360} \times (R^2 - r^2)$$

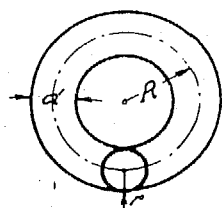


Figura 100

Toro

A = área; V = volume

$$A = 4\pi^2 \times R \times r = 39,478 \times R \times r$$

$$V = 2\pi^2 \times R \times r^2 = 19,739 \times R \times r^2$$

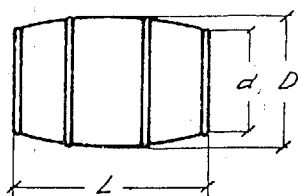


Figura 101

Barril

V = capacidade interna

$$V = \frac{\pi \times L}{12} \times (2D^2 + d^2) = 0,262 \times L \times (2D^2 + d^2)$$

quando as curvas são circulares

$$V = 0,21 \times L \times [(2D^2) + (D \times d) + (0,75 \times d^2)]$$

quando as curvas são parabólicas

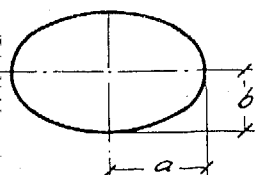


Figura 102

Elipse

A = área

L = perímetro

$$A = \pi \times a \times b$$

Fórmula aproximada para achar o perímetro

$$L = \pi \left[\frac{3(a+b)}{2} + \sqrt{a \times b} \right] \text{ quando } \frac{b}{a} \text{ for maior do que}$$

$$L = \pi \sqrt{2(a^2 + b^2) - \frac{(a-b)^2}{2,2}} \text{ quando } \frac{b}{a} \text{ for menor do que } 0,375$$

Nota. Para maior exatidão, acha-se o perímetro como se explica na figura 61.

Valor de $\pi = 3,141592653589793384626433832795028$, etc. Logo $\pi = 3,1416 \sim$

TERCEIRA PARTE

DESENVOLVIMENTO LATERAL DO CILINDRO

EXERCÍCIO

1

Nas figuras 1 e 2 representa-se o cilindro por suas projeções horizontal e vertical, respectivamente. Para determinar o desenvolvimento do cilindro (fig. 3), traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média ou do eixo neutro; depois, nas extremidades desta reta, traçam-se perpendiculares de comprimento igual à altura do cilindro, determinando novos pontos que são unidos por meio de uma reta, ficando determinado assim o desenvolvimento do cilindro.

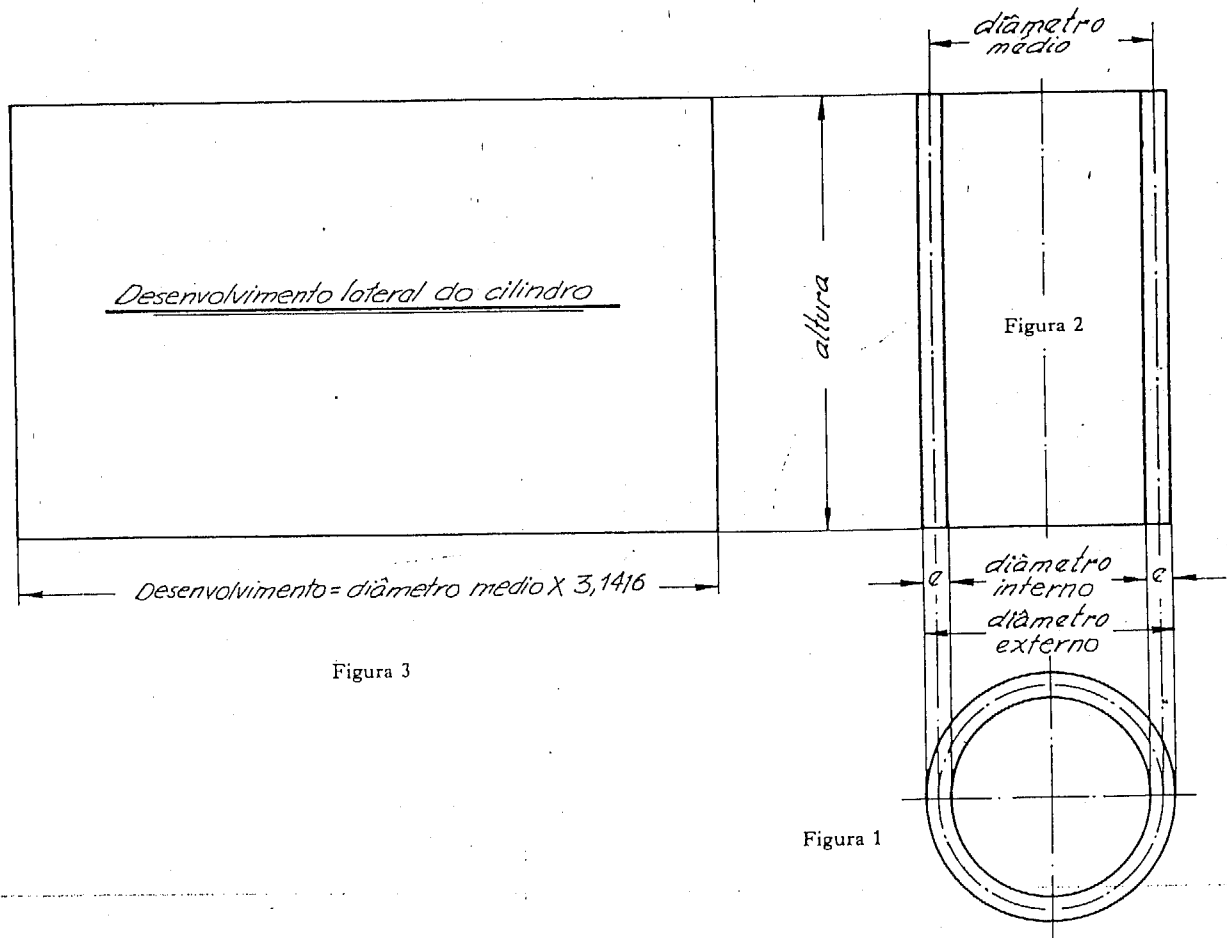
Circunferência média e diâmetro médio. Chama-se circunferência média a circunferência imaginária que passa pelo centro das espessuras, tal como se vê na figura 1 e chamaremos diâmetro médio e diâmetro desta circunferência.

As fibras externas das chapas dilatam-se ao serem curvadas, acontecendo o contrário com as fibras internas que se contraem. Por este motivo se opera com o diâmetro médio da circunferência média, já que esta é a fibra que não sofre alterações ao se curvar a chapa.

Exemplo. Se o diâmetro externo de um cilindro medir 620 mm e se a espessura da chapa for de 8 mm, o seu desenvolvimento será: = desenvolvimento $3,1416 (620 - 8) = 3,1416 \times 612 = 1922,6$ mm

Se o diâmetro interno de um cilindro medir, por exemplo, 870 mm e a espessura da chapa 10 mm, o seu desenvolvimento seria:

$$= \text{desenvolvimento } 3,1416 (870 + 10) = 3,1416 \times 880 = 2764,6 \text{ mm}$$



Virola cilíndrica truncada

Quando tivermos que desenvolver uma virola truncada, operaremos com o eixo neutro, sempre que a espessura da chapa relativamente pequena mas, quando a espessura for muito grande, operaremos da seguinte maneira:

Primeiro caso. Sobre o diâmetro da virola (fig. 1) descrevem-se dois quadrantes de circunferência, tal como se vê na figura, e se divide em certo número de partes iguais cada um dos quadrantes (dois, por exemplo). Desde os pontos de divisão a, b, c, d e e traçam-se paralelas ao eixo da virola, determinando sobre o seu diâmetro e sua seção os respectivos pontos a_1, b_1, c_1 , etc. e a_2, b_2, c_2 , etc.

Desenvolvimento lateral (fig. 2). Traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média $D_m^\circ + e$ (3,1416) e se divide em oito partes iguais. Desde os pontos de divisão a'_1, b'_1, c'_1 , etc. traçam-se perpendiculares à reta, dando os comprimentos a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 , etc. da figura 1, determinando os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc.,

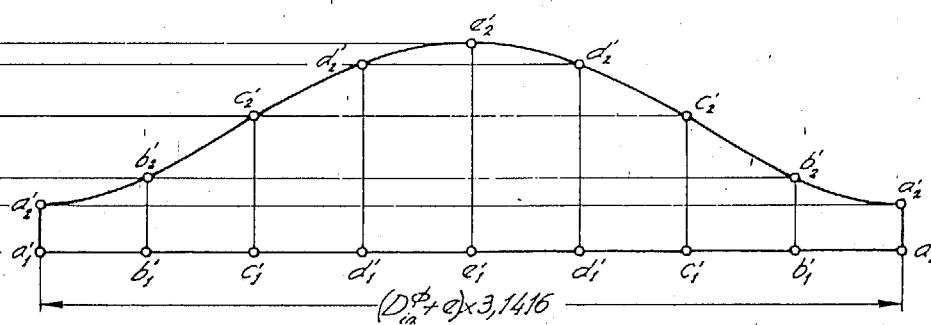
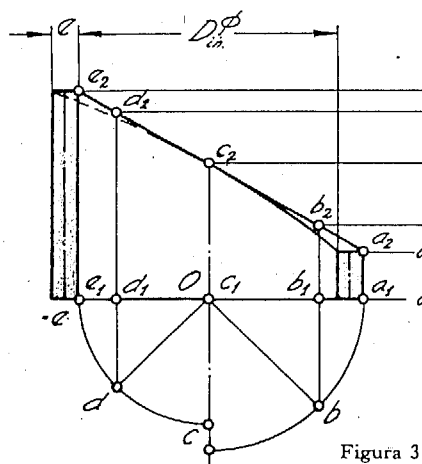
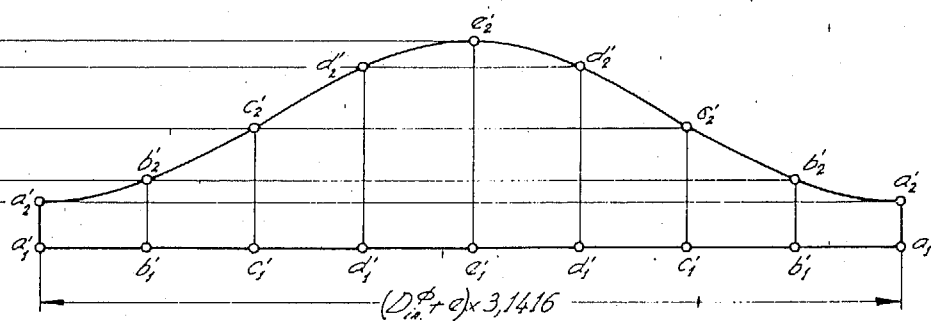
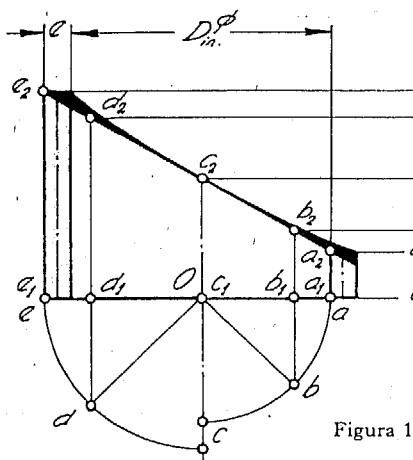
que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvida a virola truncada.

Uma vez truncada a virola, cinzela-se a parte desenhada em preto que se vê na seção.

Segundo caso. Neste caso (fig. 3) procura-se fazer com que um plano seccione obliquamente uma virola cilíndrica de tal maneira que corte todas as suas geratrizes, tanto internas como externas e que ao curvar a chapa não haja necessidade de cinzelar nada.

A determinação das geratrizes e o traçado do desenvolvimento se faz de forma análoga à do caso anterior com a variante de que os quadrantes de circunferência são ao inverso do primeiro caso.

Sempre que for para traçar o desenvolvimento de um cotovelo cilíndrico ou a união de duas virolas de espessura relativamente grande, operar-se-á como foi explicado neste segundo caso com exceção, porém, do caso em que as espessuras das chapas forem pequenas.



Seção de uma virola operando por seu eixo neutro

Nota preliminar. No exercício anterior vimos como se desenvolve uma virola truncada, quando as chapas são de grande espessura. A partir deste exercício operaremos quase sempre com o eixo neutro para facilitar ao leitor o entendimento das explicações dos exercícios que desde agora passarão a ser expostos. Para desenvolver qualquer peça, esta será dividida em um número adequado de partes iguais ou desiguais (conforme a peça) de tal maneira que o traçado não se torne complicado por excesso de divisões; mas não devem ser muito distantes também os pontos das curvas limítrofes dos desenvolvimentos. Nesta obra as peças serão divididas em oito partes e no máximo em doze para que se possa entender melhor os exercícios.

Determinação das geratrizes. Divide-se a circunferência da projeção horizontal (fig. 1) em um número adequado de partes iguais (oito, neste caso) e desde os pontos de divisão a, b, c , etc. traçam-se paralelas ao eixo vertical da virola, determinando sobre a base e a seção (fig. 2) os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc. e a_2, b_2, c_2 , etc., ficando assim representadas as geratrizes desejadas.

Traçado da seção plana. A seção plana (fig. 3) é uma elipse, já que todo plano que secciona obliquamente um cilindro, determina uma superfície elíptica. Tal superfície é determinada traçando perpendiculares à seção desde os pontos a_2, b_2, c_2 , etc. e traçando paralelas à mesma, tomando as suas separações A e B da figura 1, determinando assim os pontos de intersecção a'_2, b'_2, c'_2 , etc. que se unem por meio de uma curva contínua.

Na vista em perspectiva (fig. 6) se vê claramente a forma de determinar a elipse da seção.

Na figura 7 representou-se a mesma virola seccionada com duas esferas tangentes às geratrizes extremas e à seção plana e que nos determinam os pontos de tangência F e F' , sendo estes os focos da

elipse formada pelo plano secante. A representação desta elipse é dada na figura 8, traçada seguindo qualquer um dos procedimentos explicados em lições referentes às elipses.

Desenvolvimento lateral. Traça-se uma reta (fig. 5) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média da base ($d_m^o \times 3,1416$) e se divide no mesmo número de partes iguais à base (oito, neste caso). Nos pontos de divisão a_1, b_1, c_1 , etc. traçam-se perpendiculares à reta de comprimentos iguais aos das geratrizes da mesma origem a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 , etc., tomadas da figura 2, determinando os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc. que, unidos por meio de uma curva contínua, desenvolvem a virola truncada.

Neste caso colocou-se a união ou soldadura na geratriz menor para economizar mão-de-obra de soldadura, mas isto não quer dizer que sempre se deva colocar na geratriz menor, mas, sim onde o trabalho exigir.

Na figura 5 foram desenhadas outras duas curvas com linhas imaginárias para se ver a forma adotada de acordo com o posicionamento da soldadura.

A circunferência da figura 4 representa a tampa da base, sendo seu diâmetro o externo ou o interno, conforme nos foram indicados no plano de construção.

Aferição. Toma-se uma régua flexível e se flexiona até acoplá-la à curva da elipse (fig. 3), marcando os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc. Esta régua se acopla à curva do desenvolvimento (fig. 5) e se os pontos da régua coincidirem com os pontos da curva, significa que o desenvolvimento foi bem feito.

Se por acaso estes pontos não coincidirem será preciso refazer o traçado porque, como veremos, foi cometido algum erro.

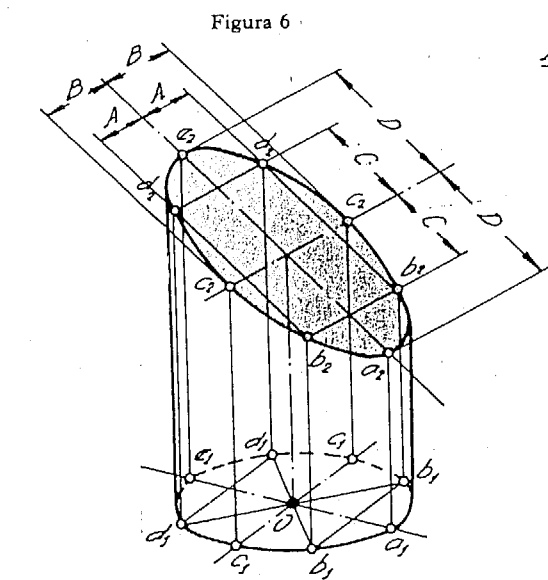
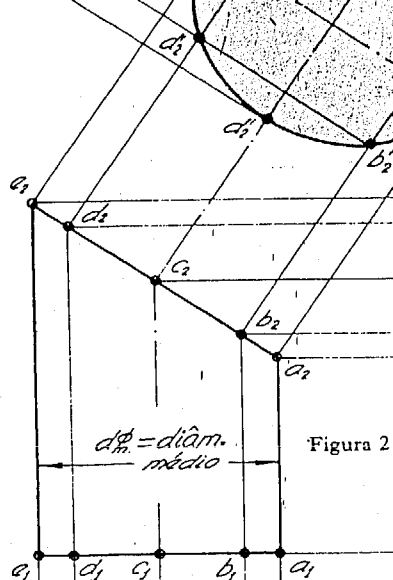
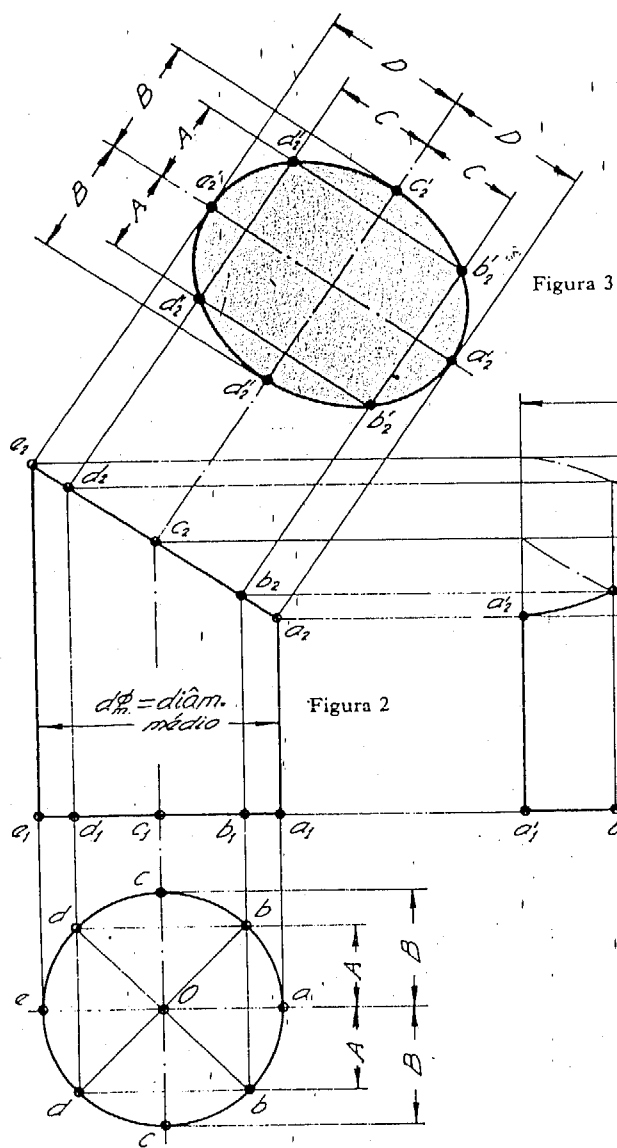


Figura 3

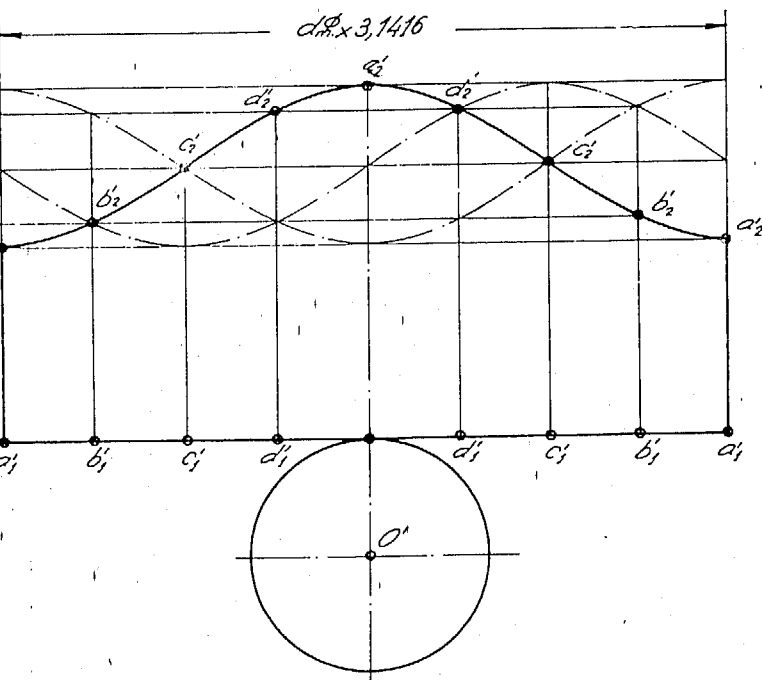


Figura 5

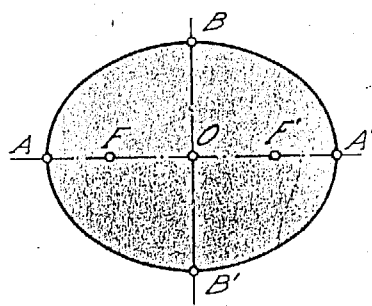
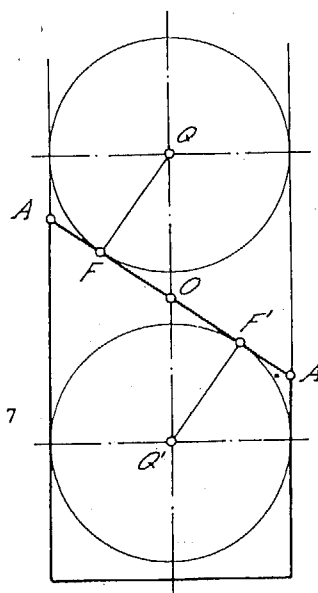


Figura 8



Seção mista de uma virola cilíndrica

Sobre o diâmetro do cilindro (fig. 1) descreve-se uma semicircunferência que se divide em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão a, b, c , etc. traçam-se paralelas ao eixo do cilindro, cortando a sua base e seção nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc. e a_2, b_2, c_2 , etc., respectivamente. Desde o ponto M também se traça uma paralela ao eixo, determinando sobre o diâmetro do cilindro o ponto de intersecção M_1 e, sobre a circunferência, o ponto M_2 .

Traçado da seção. Traça-se uma reta-eixo (fig. 2) e em ambas as partes desta traçam-se paralelas à mesma de distâncias A, B e C tomadas da figura 1. A uma distância qualquer destas paralelas traça-se outra paralela em que se marca um ponto que chamaremos M . A partir deste ponto e para a esquerda transportam-se as distâncias Md_2 e Me_2 tomadas da figura 1, determinando novos pontos que também chamaremos e_2 e d_2 . Depois, flexiona-se uma régua flexível até acoplá-la à curva da figura 1 e se marca na régua os pontos M, c_2, b_2 e

a_2 . Esta régua é posta sobre a paralela anterior (fig. 2), colocando o ponto M da régua sobre o ponto M da paralela, marcando-se nela os pontos c_2, b_2, a_2 ; desde estes pontos traçam-se perpendiculares à paralela, cortando as paralelas anteriores da mesma origem nos pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc. que são unidos por meio de uma curva contínua, determinando assim o desenvolvimento da seção. A parte sombreada é plana.

Desenvolvimento lateral. Traça-se uma reta (fig. 3) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média da virola ($2\pi R_m$) que é dividida em oito partes iguais neste caso, determinando os pontos a'_1, b'_1, c'_1 , etc. A partir de c'_1 e até d'_1 (em ambas as partes) se mede uma distância igual ao comprimento do arco cM_2 da semicircunferência média da figura 1, determinando assim dois novos pontos que chamaremos M'_1 . Desde os pontos a'_1, b'_1, c'_1, M'_1 , etc. traçam-se perpendiculares à reta, dando-lhes comprimentos iguais às respectivas geratrizes $a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, M_1M$, etc., determinando os pontos a'_2, b'_2, c'_2, M' , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvida a virola.

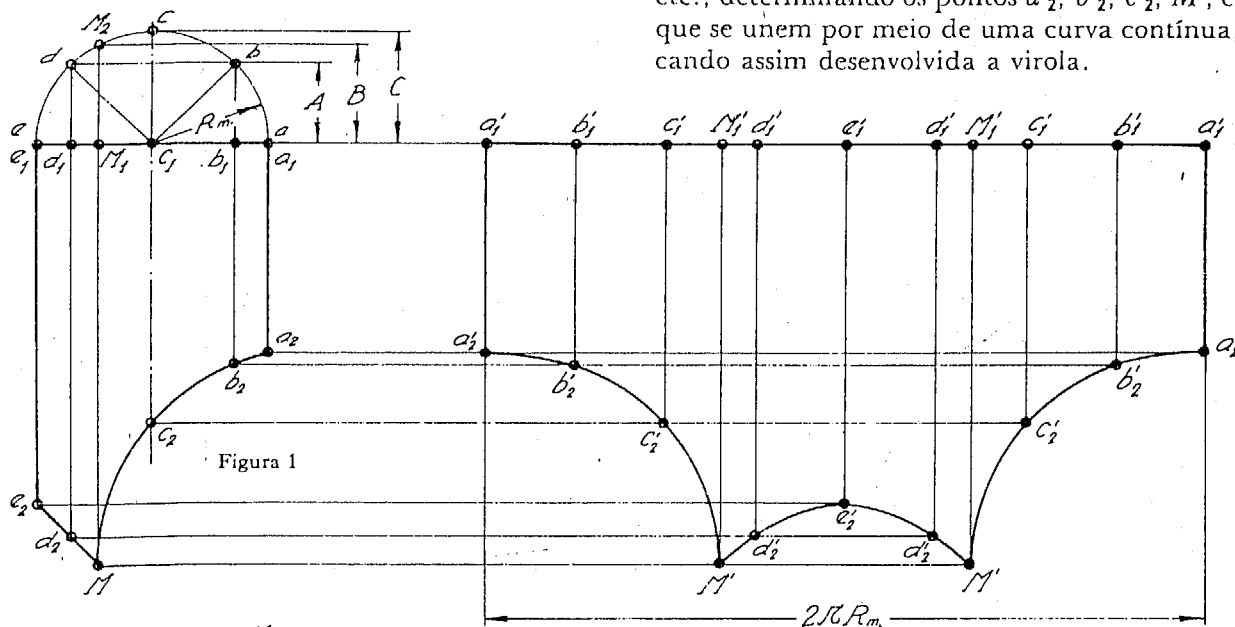


Figura 1

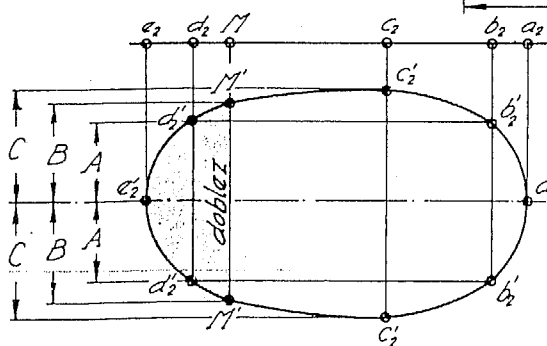


Figura 2

Figura 3

União de duas virolas cilíndricas

Linha de intersecção. A linha de intersecção (fig. 1) é determinada pela bissetriz do ângulo formado pelos eixos das virolas. Teoricamente pode-se calcular a cota C da seguinte forma:

$$C = d_m^o \times \cot \frac{\alpha}{2}$$

Traçado das geratrizes. Colocam-se os dois cilindros, tal como mostra a figura 2 e se descreve uma semicircunferência sobre o diâmetro médio das virolas; dividindo-a em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se paralelas ao eixo das virolas, cortando a base e a linha de intersecção nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., a_2, b_2, c_2 , etc., respectivamente, ficando assim determinadas as geratrizes desejadas.

Desenvolvimento lateral. Traça-se uma reta (fig. 3) de comprimento igual ao desenvolvimento

da circunferência média da virola que, neste caso, divide-se em oito partes iguais. Desde os pontos de divisão $c'_1, d'_1, e'_1, d'_1, c'_1$, etc., traçam-se perpendiculares à reta de comprimentos iguais às das geratrizes da mesma origem da figura 2 (pode-se ver claramente nas ilustrações o processo a seguir, levando em conta que as geratrizes devem ficar de fora do cilindro depois de curvar para facilitar o trabalho na hora de armá-las entre si). Desta forma determinaríamos os pontos $c'_2, d'_2, e'_2, d'_2, c'_2$, etc., que são unidos por meio de uma curva contínua. As soldaduras das virolas não devem coincidir nunca; portanto, desenvolveremos sempre as virolas da mesma forma que se vê na figura 3, podendo mudar de forma se o trabalho o exigir.

Nota. Quando as virolas forem de espessura muito grande, faremos o desenvolvimento como se explica no exercício 2, figura 3.

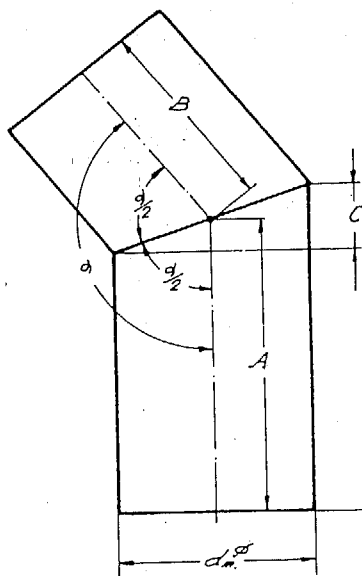


Figura 1

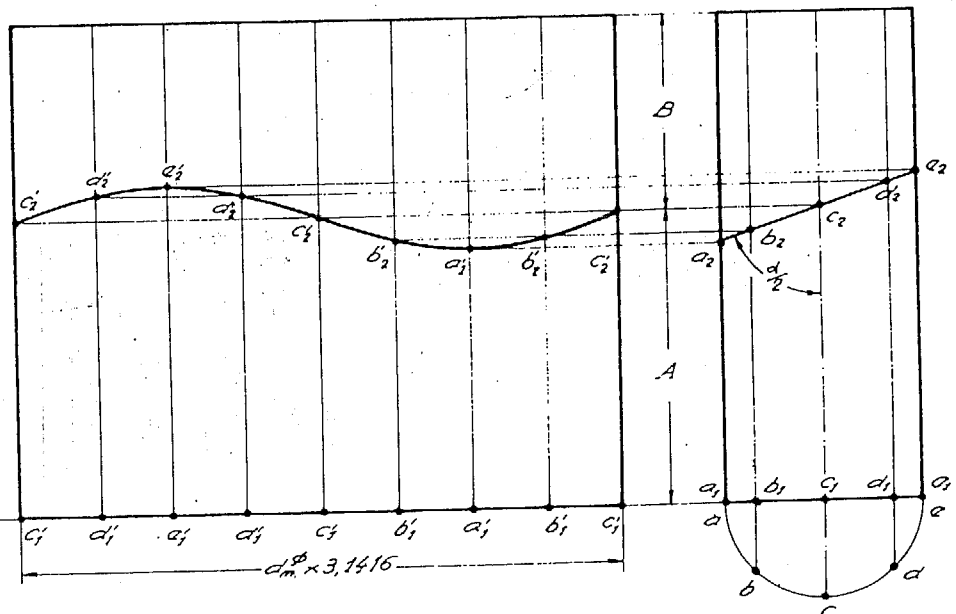


Figura 3

Figura 2

Peças de união para três virolas cilíndricas do mesmo diâmetro

As peças de união servem para ligar entre si várias tubulações de igual ou diferente diâmetro e de formas diferentes. (Neste caso trataremos de peças de união para virolas cilíndricas do mesmo diâmetro).

Estas peças são formadas por várias virolas cilíndricas unidas entre si de diversas maneiras, já que estas variam segundo a posição que tiverem as tubulações cilíndricas que quisermos unir. Qualquer peça de união deste tipo será desenvolvida de forma análoga à que passaremos a expor.

Linhas de intersecção. As linhas de intersecção são determinadas pelas bissetrizes dos ângulos formados pelos eixos das virolas entre si. Na figura 1 se vê claramente como são determinadas.

Traçado das geratrizes. Coloca-se uma virola da parte inferior, outra central e a superior, tal como ilustra a figura 2. Depois traça-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da virola e se di-

vide em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão a, b, c , etc. traçam-se paralelas ao eixo das virolas, cortando o diâmetro em a_1, b_1, c_1 , etc. e as linhas de intersecção em a_2, b_2, c_2 , etc., a_3, b_3, c_3 , etc. e a_4, b_4, c_4 , etc., ficando assim determinadas as geratrizes desejadas.

Desenvolvimento lateral. Traça-se uma reta (fig. 3) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média da virola cilíndrica e, neste caso, divide-se em oito partes iguais. Desde os pontos de divisão a', b' , etc., traçam-se perpendiculares à reta, projetando-se horizontalmente os pontos a_2, b_2 , etc., a_3, b_3 , etc., a_4, b_4 , etc. e as bases da figura 2, determinando os pontos de intersecção a'_2, b'_2 , etc., a'_3, b'_3 , etc. e a'_4, b'_4 , etc. que se unem ordenadamente por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvidas a virola superior, uma do centro e outra da base, servindo de gabarito estas duas últimas para marcar as do lado contrário.

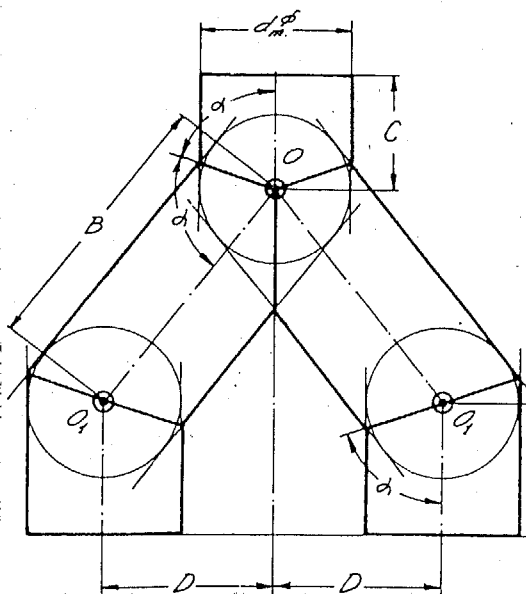


Figura 1

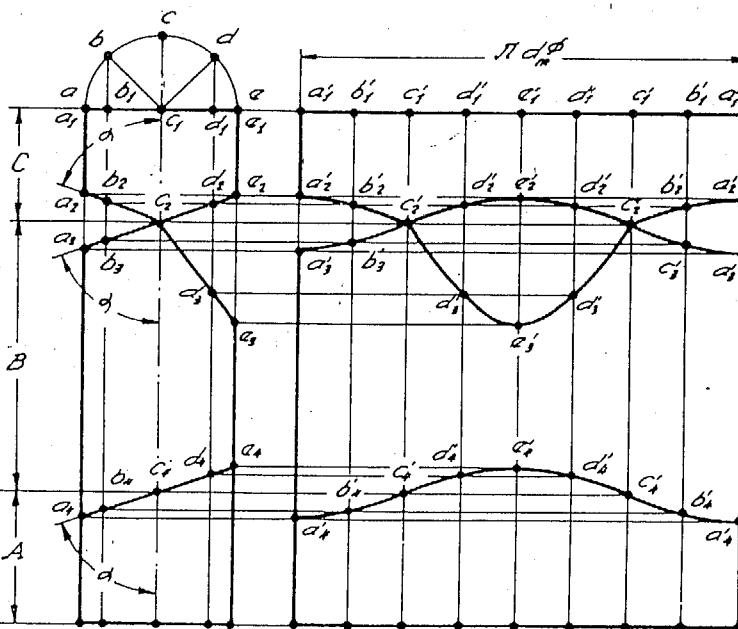


Figura 2

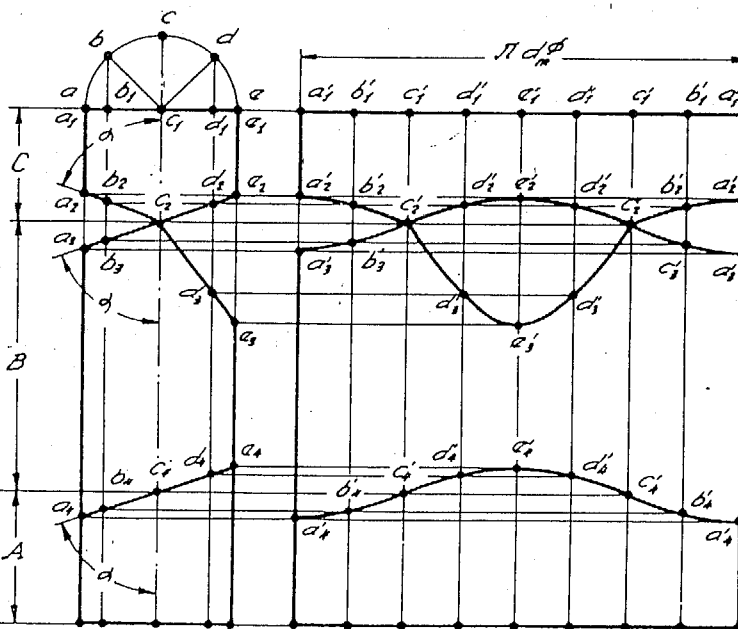


Figura 3

Cotovelo cilíndrico

O valor do ângulo β do cotovelo pode variar entre 0 e 360° . Seguiremos, para qualquer um dos casos, o mesmo procedimento que é exposto a seguir.

Determinação dos elementos que compõem o cotovelo. Podemos construir o cotovelo dividindo-o em certo número adequado de elementos, considerando que quanto maior for o número de divisões mais uniforme será o cotovelo, mas também mais cara será a mão-de-obra. O número de elementos que compõem o cotovelo está em função de seu raio-eixo, pois, quanto maior for o raio-eixo, maior será o número de elementos que compõem esse cotovelo.

Neste caso, vamos desenvolver um cotovelo de 90° de raio-eixo, relativamente pequeno, e cremos que o número adequado de elementos que compõem o cotovelo seriam dois centrais B-C e dois extremos A-D.

Divide-se o arco-eixo em seis partes iguais (fig. 1) e pelos pontos ímpares de divisão 1-3-5-7 traçam-se tangentes ao arco, determinando assim a posição dos eixos das virolas ou os elementos que compõem o cotovelo. Depois traçam-se paralelas a estes eixos separadas entre si a uma distância igual à do diâmetro médio do cotovelo. Desde o ponto O traçam-se retas que passam pelos pontos pares 2-4-6 até cortar as geratrizes extremas do cotovelo, determinando assim as linhas de intersecção dos elementos que compõem o cotovelo.

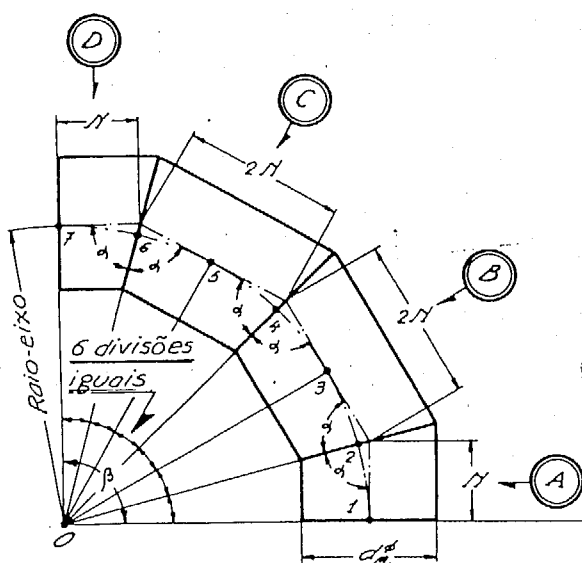


Figura 1

Traçado das geratrizes. Colocam-se os elementos que compõem o cotovelo um sobre o outro, tal como se vê na figura 2, e descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro superior, dividindo-a em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão a, b, c, etc. traçam-se paralelas ao eixo, determinando sobre o diâmetro e as linhas de intersecção os respectivos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., a_2, b_2, c_2 , etc., a_3, b_3, c_3 , etc., a_4, b_4, c_4 , etc., ficando assim determinadas as geratrizes necessárias para desenvolver os elementos que compõem o cotovelo.

Desenvolvimento lateral. Traça-se uma reta (fig. 3) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média das virolas ($= \pi d_m^0$) e se divide em oito partes iguais, neste caso. Desde os pontos de divisão $c'_1, d'_1, e'_1, d'_1, c'_1, b'_1, a'_1, b'_1$ e c'_1 traçam-se perpendiculares à reta e projetam-se perpendicularmente à mesma todos os pontos das linhas de intersecção e a base da figura 1, determinando novos pontos que serão unidos ordenadamente por meio de curvas contínuas, tal como mostra a figura 3, ficando desenvolvidos todos os elementos que compõem o cotovelo.

Nota Quando as chapas das virolas que compõem o cotovelo forem muito espessas, aplicaremos o método do exercício 2, figura 3, em vez do eixo médio.

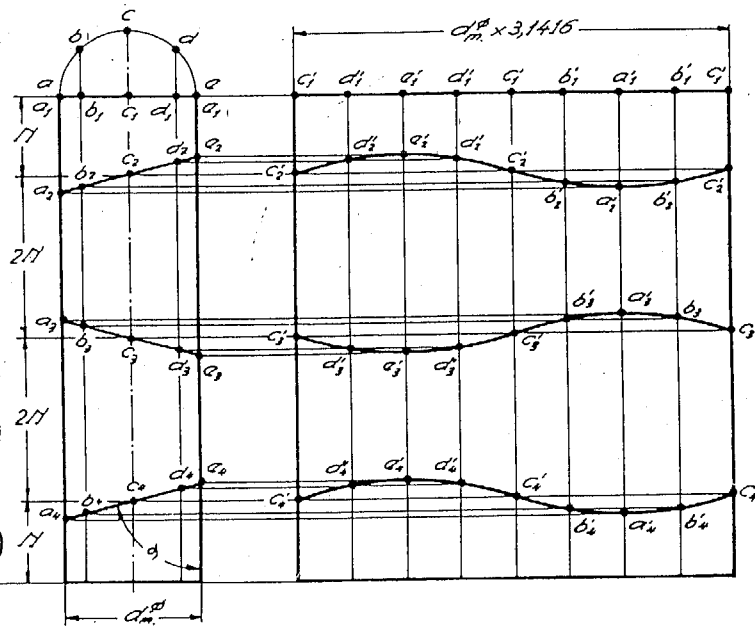


Figura 2

Figura 3

União de virolas cilíndricas cujos eixos não são contidos no mesmo plano

Determinação do ângulo α de deslocamento. Para determinar o ângulo α de deslocamento (fig. 3) formado pelo eixo da virola A com o plano que passa pelos eixos das virolas B e C , visto no sentido da direção da flecha, traça-se uma reta $M-M$ (fig. 2) perpendicularmente ao eixo da virola B (esta reta é um plano secante visto de canto) e a uma distância qualquer se traça uma paralela $N-N$ à reta $M-M$ (fig. 3), cortando as projeções dos pontos O_1 e Q_1 nos respectivos pontos O_2 e Q_2 . A projetante Q_1-Q_2 se prolonga e, a partir de Q_2 , dá-se-lhe a distância D , tomada da vista em planta (fig. 1), determinando um novo ponto que chamaremos Q_3 e que o uniremos com o ponto O_2 , achando-se assim o ângulo α de deslocamento. Tomando como centro O_2 , descreve-se uma circunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio das virolas, determinando os pontos de intersecção F e F_1 sobre os lados do ângulo α .

Traçado das geratrizes. Tomando como centro o ponto de intersecção determinado pela reta $M-M$ e o eixo da virola B (fig. 2), descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio da virola e se divide em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão traçam-se paralelas ao eixo da virola B , determinando sobre a reta $M-M$ os pontos a , b , c , etc. e sobre a linha de intersecção das virolas B e C os pontos a_1 , b_1 , c_1 , etc., ficando assim determinados os elementos necessários para desenvolver a virola C e parte da B . Na figura 4 se vê claramente o procedimento seguido para desenvolver a virola C .

A uma distância qualquer (fig. 5) do eixo da virola B da figura 2 traça-se uma paralela a este, projetando-se os pontos O_1 e Q_1 , determinando os pontos O_3 e Q_4 (este último determinado sobre a projetante à distância E da paralela, tomando esta distância da figura 3). Unindo os pontos O_3 e Q_4 , determinaríamos o eixo da virola A em sua verdadeira grandeza. Portanto, a linha de intersecção das virolas A e B , as geratrizes da primeira e as geratrizes da parte superior da virola B são determinadas tal como se vê na figura 5.

Desenvolvimento lateral da virola A (fig. 6).

Traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média da dita virola ($= d_m^o \times 3,1416$) e, neste caso, divide-se em oito partes iguais. Desde os pontos de divisão e'_4 , d'_4 , c'_4 , etc. e d''_4 (este último ponto é determinado transportando sobre a reta a distância $e'_4d''_4$ igual a $e'_4d'_4$), traçam-se perpendiculares à reta e se estabelecem os respectivos comprimentos das geratrizes e_4e_3 , d_4d_3 , c_4c_3 , etc. da figura 5, determinando os pontos e'_3 , d'_3 , c'_3 , etc. e d''_3 , os quais se unem por meio de uma curva contínua ($d''_4d''_3 = d'_4d'_3$).

Depois traça-se uma paralela à geratriz $e'_3e'_4$ a uma distância igual ao comprimento do arco $F-F_1$ da figura 3. A partir desta paralela se traça outra à distância igual a $d_m^o \times 3,1416$, ficando assim desenvolvida a virola A .

Desenvolvimento lateral da virola B (fig. 7). Sobre a reta $M'-M'$ transporta-se um comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média da virola e, neste caso, divide-se em oito partes iguais, determinando os pontos a'_2 , b'_2 , c'_2 , etc. A partir do ponto a'_2 da direita faz-se outra divisão, determinando um novo ponto que chamaremos b''_2 . Desde os pontos a'_2 , b'_2 , c'_2 , etc. e b''_2 , traçam-se perpendiculares à reta $M'-M'$ de comprimentos iguais às geratrizes da mesma origem a_2a_3 , b_2b_3 , c_2c_3 , etc., tomadas da figura 5, determinando os pontos a'_3 , b'_3 , c'_3 , etc. e b''_3 que são unidos por meio de uma curva contínua ($b''_2b''_3 = b'_2b'_3$).

A partir da geratriz $a'_2-a'_3$ e na direção da geratriz $b''_2b''_3$ traça-se uma paralela a ambas a uma distância da primeira igual ao comprimento do arco $F-F_1$ da figura 3. Paralelamente a esta, traça-se outra à distância $d_m^o \times 3,1416$. Esta distância é dividida em oito partes iguais que na reta $M'-M'$ são representadas pelos pontos a' , b' , c' , etc. A partir destes pontos traçam-se perpendiculares à reta $M'-M'$ de comprimentos iguais às geratrizes da mesma origem aa_1 , bb_1 , cc_1 , etc. da figura 2, determinando os pontos a'_1 , b'_1 , c'_1 , etc. que se unem por meio de uma curva contínua. A geratriz a'_1a' da parte esquerda se prolonga até cortar a curva de intersecção da parte superior, ficando assim desenvolvida a virola B .

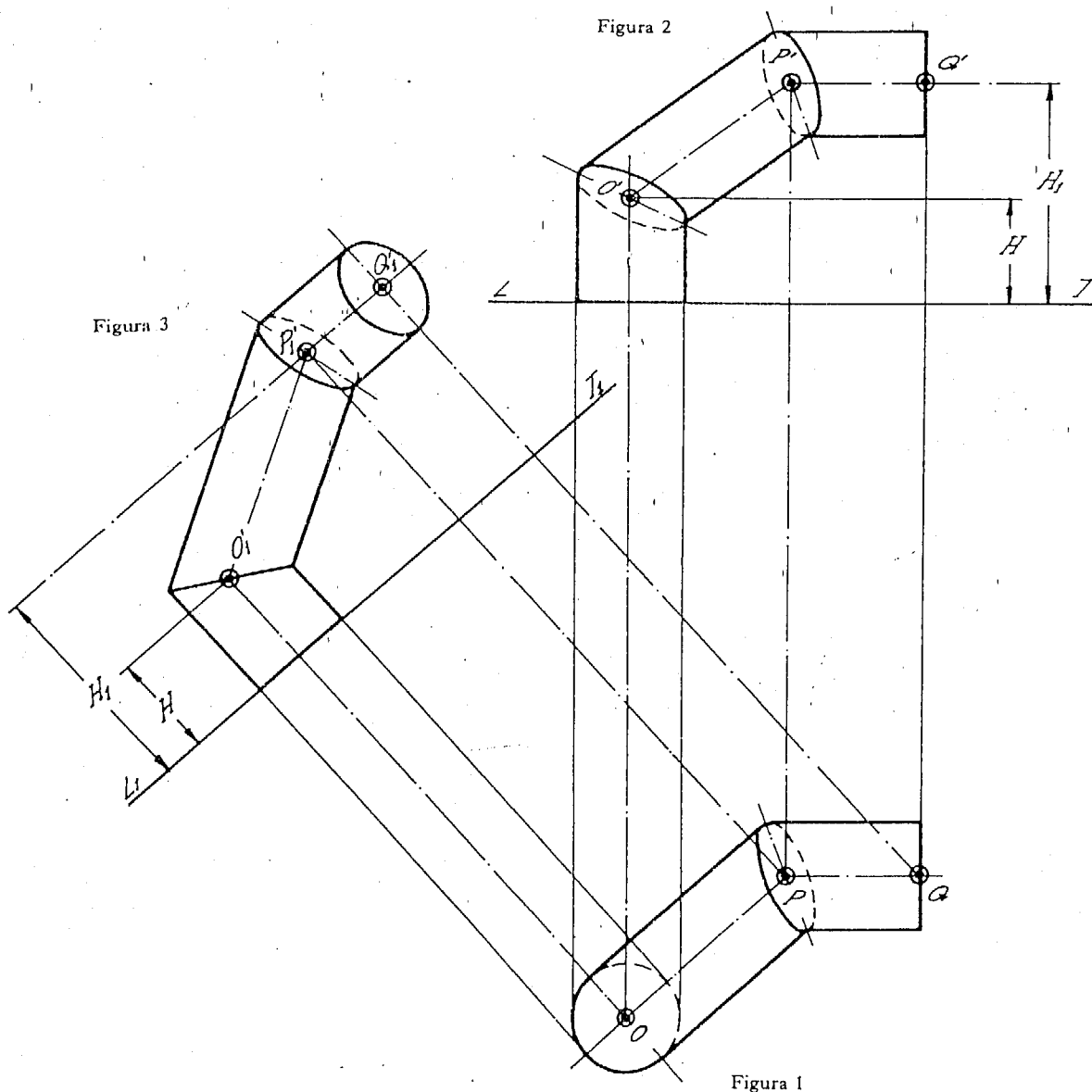
União de três virolas cilíndricas, estando dois de seus eixos em um plano projetante horizontal e o outro paralelo à L-T

Trata-se aqui de um caso semelhante ao anterior, com a variedade de que os eixos de duas virolas estão situados em um plano projetante horizontal, sendo o outro paralelo à linha de terra (figs. 1 e 2).

Para situar estas virolas em uma posição correta, como no caso anterior, recorreremos a uma mu-

dança de plano vertical (fig. 3), paralelo aos eixos das virolas situados no plano projetante vertical.

Os elementos necessários para desenvolver as virolas serão determinados da mesma forma que no caso anterior, operando, pois, com as figuras 1 e 3.



Cotovelo cilíndrico cujo arco-eixo situa-se em um plano projetante horizontal

Este cotovelo serve para unir uma virola vertical com outra horizontal inclinada com respeito a outra que passa por baixo desta. Nas figuras 1 e 2 se vê claramente a posição deste cotovelo e sua utilidade.

Como nas vistas em planta e elevação (figs. 3 e 4) o cotovelo não está em uma posição correta para tomar os dados necessários para o seu desenvolvimento, recorre-se a uma mudança de plano vertical, tal como se vê na figura 5.

Ao se fazer a mudança de plano podem-se desenvolver as virolas que compõem o cotovelo de forma análoga à dos casos estudados anteriormente.

Para determinar as virolas que compõem o cotovelo, o arco-eixo da projeção vertical (fig. 4) foi dividido seguindo o mesmo procedimento dos cotovelos normais.

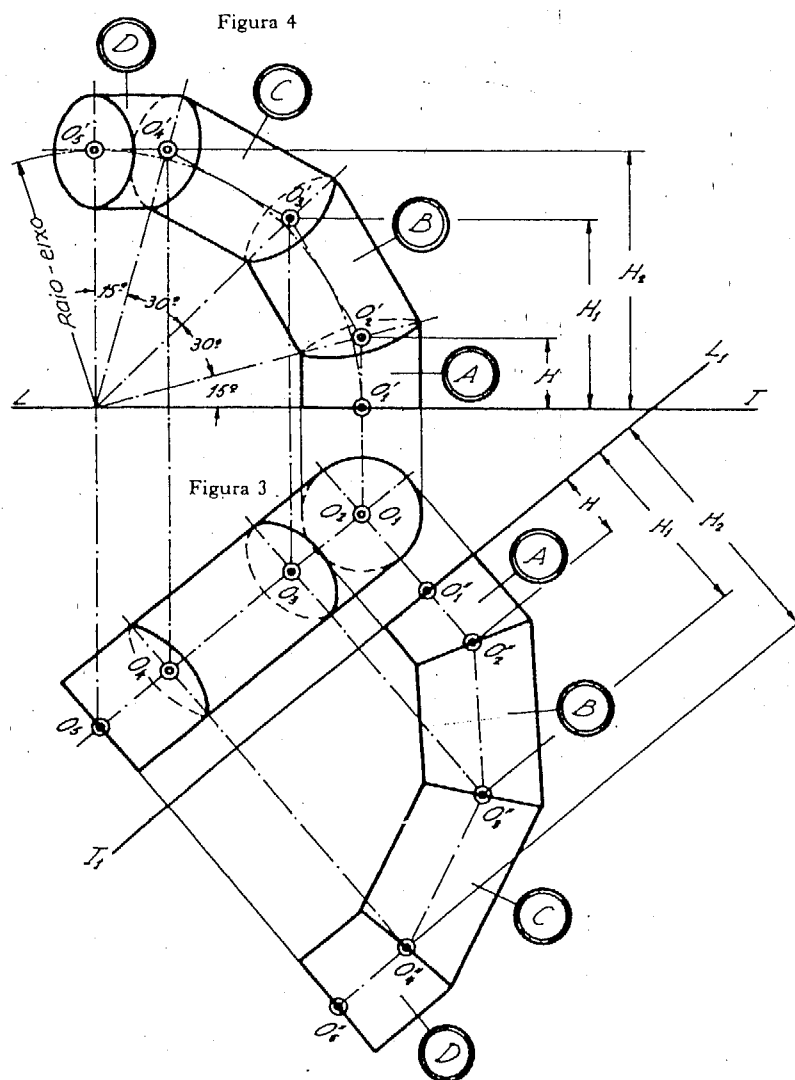


Figura 5

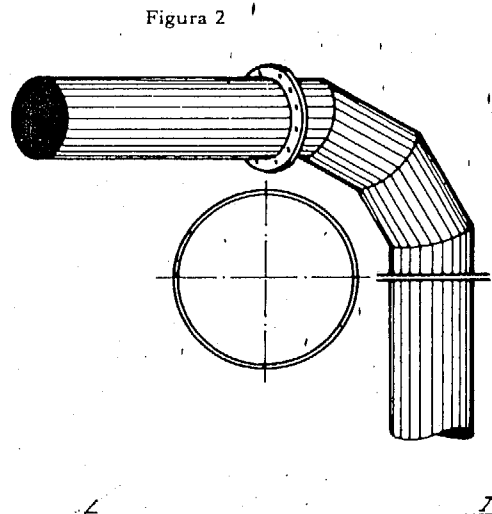


Figura 2

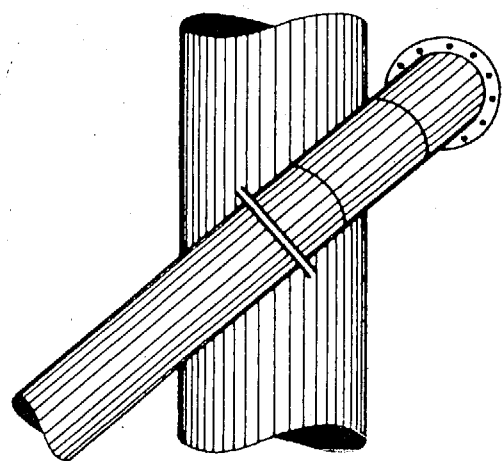


Figura 1

VIROLAS OBLÍQUAS DE BOCAS CIRCULARES

EXERCÍCIO

11

Pode haver dois casos de virolas oblíquas de bocas circulares, embora o procedimento a seguir para desenvolvê-las seja o mesmo.

O primeiro caso se diferencia do segundo pela posição das bocas, já que o primeiro as têm paralelas entre si (fig. 1) e no segundo são inclinadas, sendo seu ângulo α de inclinação o mesmo para ambas (fig. 3).

Primeiro caso (fig. 1). Sobre o diâmetro médio de uma das bocas descreve-se uma semicircunferência e se divide em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e, desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc. Desde estes pontos traçam-se paralelas ao eixo da virola até cortar o outro diâmetro nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. Em uma posição qualquer da virola traça-se uma perpendicular ao eixo que corta todas as geratrizes desta nos pontos a_3, b_3, c_3 , etc., transportando em ambas as partes desta reta e sobre as geratrizes da mesma origem, as distâncias A e B tomadas da boca, determinando assim os pontos a_4, b_4, c_4 , etc. que são unidos por meio de uma curva contínua que determina uma elipse. Esta elipse é a que determinaria um plano secante ao seccionar a virola perpendicularmente ao seu eixo.

Desenvolvimento lateral (fig. 2). Flexiona-se uma régua flexível que é acoplada à curva da elipse, marcando

do-se os pontos a_4, b_4, c_4 , etc., pontos esses que são colocados sobre uma reta qualquer (neste caso sobre o prolongamento da reta que corta perpendicularmente a virola), determinando os pontos a'_3, b'_3, c'_3 , etc., pelos quais são traçadas perpendiculares a ambas as partes da reta. Depois se projetam sobre estas perpendiculares os pontos a_1, b_1, c_1 , etc. e a_2, b_2, c_2 , etc., determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos a'_1, b'_1, c'_1 , etc. e a'_2, b'_2, c'_2 , etc., que são unidos por meio de uma curva contínua, determinando assim o desenvolvimento lateral da virola.

Gabarito para curvar a virola. Caso queiramos fazer um gabarito para ir aferindo a curvatura interna da virola, traçaríamos uma paralela pelo interior da elipse da figura 1 a uma distância igual a meia espessura da chapa. Se o gabarito for para aferir a curvatura externa, a paralela seria externa à elipse, separada à mesma distância. O gabarito será colocado sempre perpendicular às geratrizes e sobre as da mesma origem.

Segundo caso (figs. 3 e 4). Para desenvolver esta virola procede-se da mesma forma como no caso anterior.

Nota. A aferição do desenvolvimento é feita medindo a curva a'_1, b'_1, c'_1 , etc. (fig. 2) e aferindo se o comprimento desta é igual a $D_m \times 3,1416$, já que em caso de não serem iguais, o traçado foi mal feito e é necessário repeti-lo. Os pontos a'_1, b'_1, c'_1 , etc., dividem a curva em partes iguais.

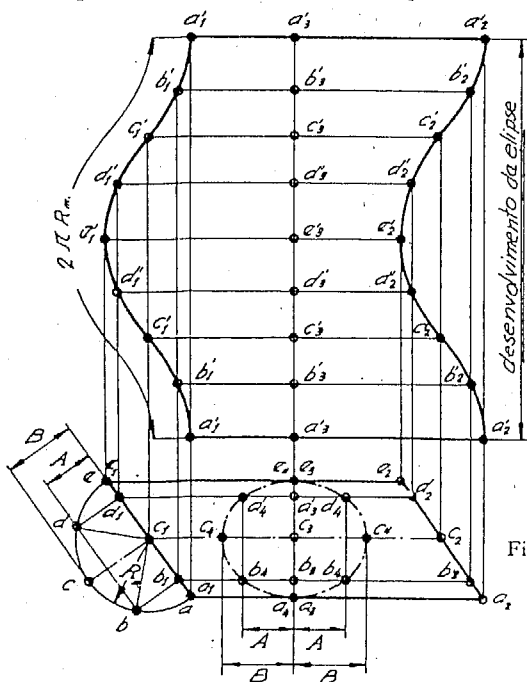
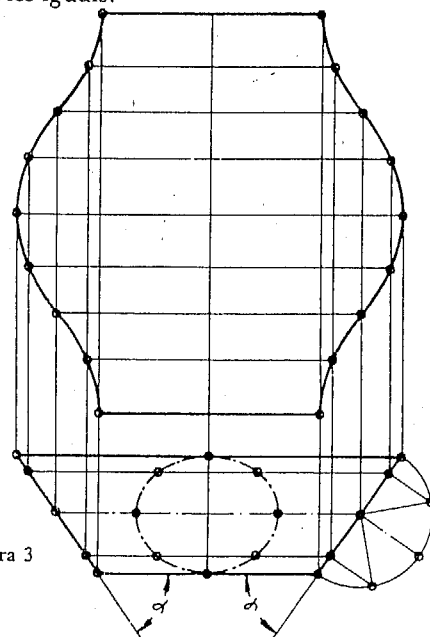


Figura 1

Figura 2

Figura 4

Figura 3



Cotovelo formado por várias virolas oblíquas

Este cotovelo, do mesmo modo que o cotovelo formado por virolas cilíndricas, compõe-se de vários elementos, ou seja, de várias virolas oblíquas unidas entre si e que ao mesmo tempo são iguais.

O arco-eixo (fig. 1) divide-se em um número adequado de partes iguais e são traçadas retas partindo de O e passando pelos pontos de divisão, determinando assim os elementos que irão constituir o cotovelo. Na ilustração da figura 1 só foi realçado um elemento, desenhado com linhas grossas, já que não é necessário desenhar os restantes por serem todos iguais.

Traçado das geratrizes (fig. 1). Sobre o diâmetro médio de uma das bocas descreve-se uma semicircunferência que é dividida em certo número de partes iguais (quatro, neste caso) e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando os pontos a_1, b_1, c_1 , etc. Desde estes pontos traçam-se paralelas ao eixo da virola, cortando o outro diâmetro nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc., ficando assim traçadas as geratrizes que precisamos para o desenvolvimento.

Desenvolvimento lateral (fig. 2). Marca-se em uma régua flexível o desenvolvimento da circunfe-

rência média da boca da virola ($\pi \times d_m^{\phi}$) que, neste caso, é dividida em oito partes, iguais.

Depois se traçam desde os pontos a_1, b_1, c_1 , etc. e a_2, b_2, c_2 , etc. perpendiculares às geratrizes de comprimentos indefinidos. Em uma posição qualquer da projetante que parte de a_1 , marca-se um ponto que chamaremos a'_1 e se coloca o primeiro ponto de divisão da régua flexível antes mencionada sobre este ponto e se flexiona a régua até os pontos de divisão coincidirem com o resto das projetantes, determinando assim novos pontos que chamaremos b'_1, c'_1 , etc. A curva formada pela régua flexível para determinar estes pontos é marcada sobre o desenvolvimento enquanto são determinados.

Desde os pontos a'_1, b'_1, c'_1 , etc. traçam-se perpendiculares às projetantes cortando as de idêntica origem nos pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc. e unindo-se por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido um dos elementos que compõe o cotovelo, servindo de gabarito para o resto.

Nota. Apesar de termos, neste caso, desenvolvido um cotovelo de 90° , o mesmo procedimento será adotado para qualquer cotovelo que tiver mais ou menos graus. Também podem ser desenvolvidos como foi explicado no exercício anterior.

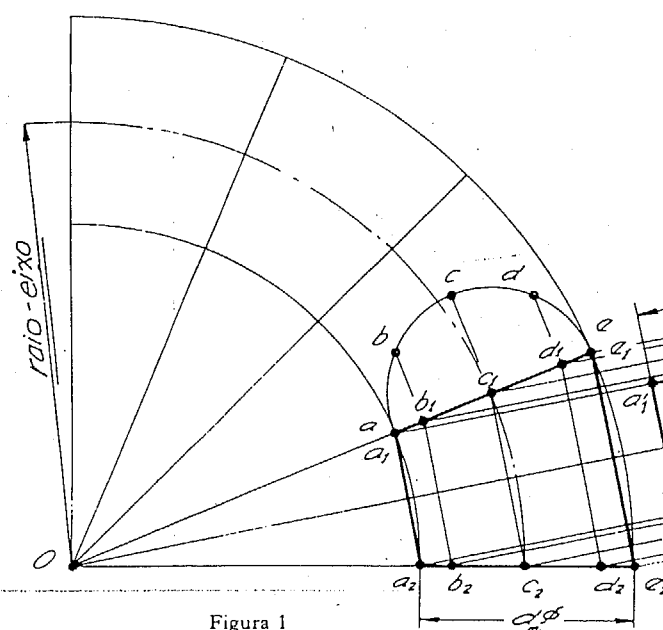


Figura 1

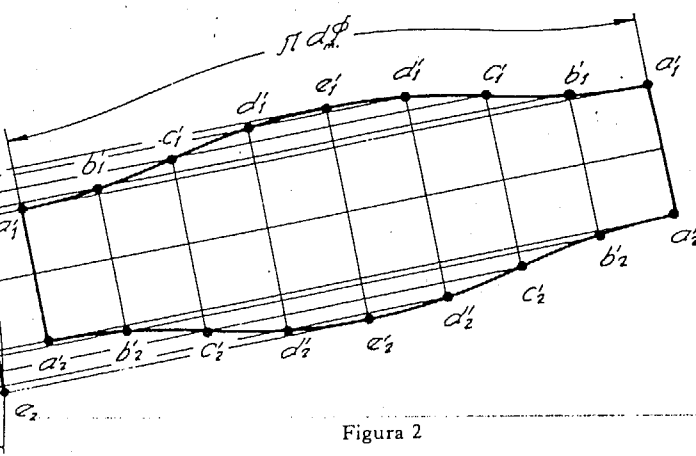


Figura 2

Calça formada por duas virolas oblíquas

Esta calça é formada por duas virolas oblíquas de bocas circulares e paralelas entre si.

Traçado das geratrizes (fig. 1). Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da boca superior e se divide em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando os pontos a_1, b_1, c_1 , etc. A partir destes pontos traçam-se paralelas ao eixo da virola, cortando o outro diâmetro nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. e a linha de intersecção em A e B.

Em uma posição qualquer, traça-se uma perpendicular ao eixo da virola, cortando as geratrizes nos pontos a_3, b_3, c_3 , etc. Em ambas as partes desta reta, transportam-se sobre as geratrizes da mesma origem as ordenadas da semicircunferência aa_1, bb_1 , etc., determinando novos pontos que chamaremos a_4, b_4, c_4 , etc., e que se unem por meio de uma curva contínua, determinando-se assim, a elipse média da seção transversal da virola.

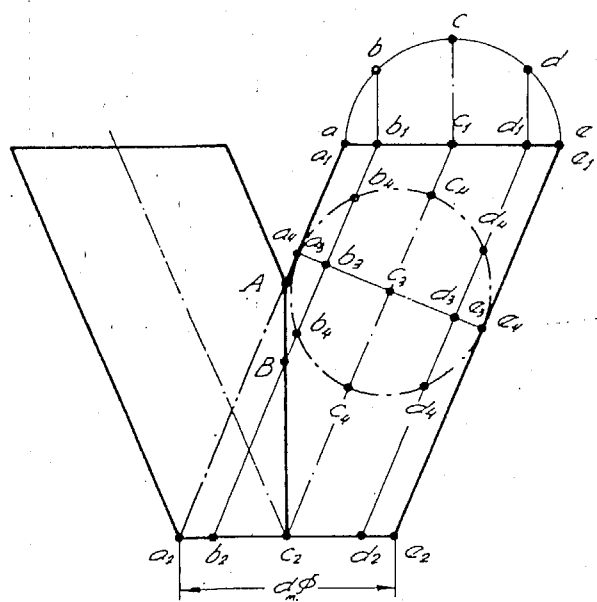


Figura 1

Desenvolvimento lateral (fig. 2). Flexiona-se uma régua flexível até acoplá-la à elipse, marcando na mesma os pontos a_4, b_4, c_4 , etc., transportando estas distâncias em uma reta qualquer, determinando novos pontos que chamaremos a'_3, b'_3, c'_3 , etc.; a partir destes pontos traçam-se perpendiculares a ambas as partes da reta e se transporta sobre estas perpendiculares as distâncias da mesma origem a_3a_1, a_3a_2, b_3b_2 , etc., tomadas da figura 1, determinando os pontos a'_1, b'_1, c'_1 , etc. e a'_2, b'_2, c'_2 , etc., que são unidos por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvida a virola inteira.

Traçado da curva de intersecção (fig. 2). A partir dos respectivos pontos a'_3, b'_3 , transportam-se às geratrizes $a'_3a'_2$ e $b'_3b'_2$ as distâncias a_3A e b_3B da figura 1, determinando assim os pontos A' e B' , ligados com o ponto c'_2 por meio de uma curva contínua, ficando assim traçada a curva de intersecção. O desenvolvimento deste braço serve de gabarito para marcar o outro.

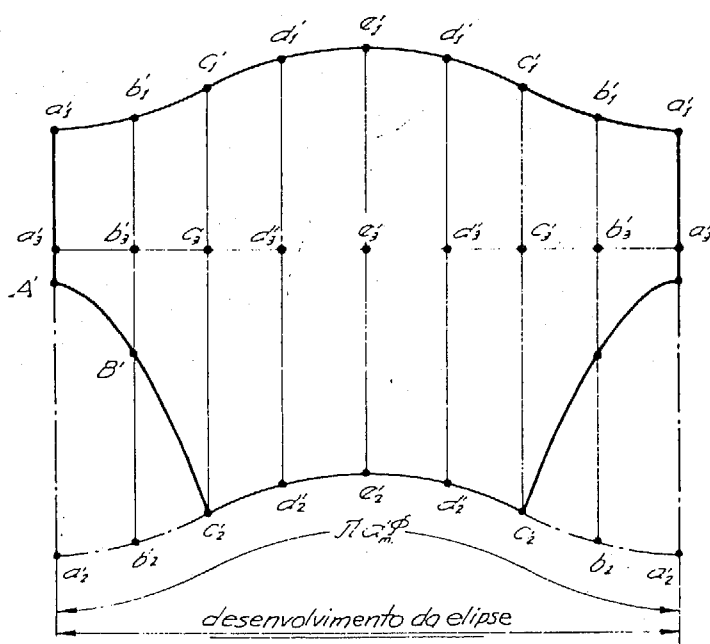


Figura 2

Tremonha composta por semivírolas retas e oblíquas

Esta tremonha é representada por suas projeções horizontal e vertical (figs. 1 e 2). A primeira coisa que temos que fazer é decompor a tremonha em partes desdobráveis para que, agrupadas, possam ser depois desenvolvidas.

Como facilmente se deduz das ilustrações das figuras 1 e 2, esta tremonha é composta de meia virola cilíndrica reta, outra meia virola oblíqua de bocas paralelas e circulares e, por último, de duas superfícies planas triangulares sombreadas.

Traçado das geratrizes (fig. 2). Sobre o semidiâmetro da boca superior correspondente à virola oblíqua, descreve-se um quadrante de circunferência que se divide em um número adequado de partes iguais (dois, por exemplo). Desde os pontos de divisão a , b e c traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando os pontos de intersecção a_1 , b_1 , c_1 , e, a partir desses pontos, traçam-se paralelas à geratriz extrema da virola oblíqua até cortar a sua base nos pontos a_2 , b_2 , c_2 , ficando assim traçadas as geratrizes desejadas.

Desenvolvimento lateral. Em uma posição qualquer se traça uma perpendicular às geratrizes anteriores (fig. 2), cortando-as nos pontos a_3 , b_3 , c_3 e

transportando desde a perpendicular as ordenadas A e B da boca superior, determinando novos pontos que chamaremos a_4 , b_4 , c_4 , e que uniremos por meio de uma curva contínua.

Depois traça-se uma reta (fig. 3) de comprimento $d'd' = \pi R_m$ e nas extremidades d' se traçam perpendiculares de comprimento igual à distância da_1 da figura 2, determinando dois novos pontos que chamaremos a'_1 e que são unidos por meio de uma reta, ficando assim desenvolvida a meia virola cilíndrica. De ambas as partes prolongamos a reta $d'd'$ dando-lhe a distância F , tomada da figura 2, determinando os pontos a'_2 que também são unidos com os pontos a'_1 . Em ambas as retas $a'_1a'_2$ traça-se uma perpendicular à distância C , tomada da vista em elevação, com as distâncias a_4b_4 e b_4c_4 , tomadas em arco na figura 2, determinando os pontos a'_3 , b'_3 , c'_3 , por onde passam paralelas à reta $a'_1a'_2$, dando-lhes as distâncias D e E da figura 2, determinando assim os pontos b'_2 e c'_2 . A partir destes pontos transportam-se as distâncias $b_2b_1 = c_2c_1$ da projeção vertical, determinando os pontos b'_1 e c'_1 que se unem com a'_1 do mesmo modo que a'_2 , b'_2 , c'_2 por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvida a tremonha, sendo as suas partes planas as sombreadas.

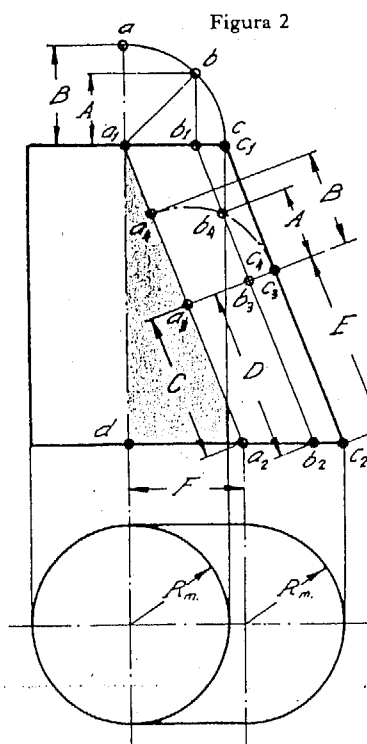


Figura 2

Figura 1

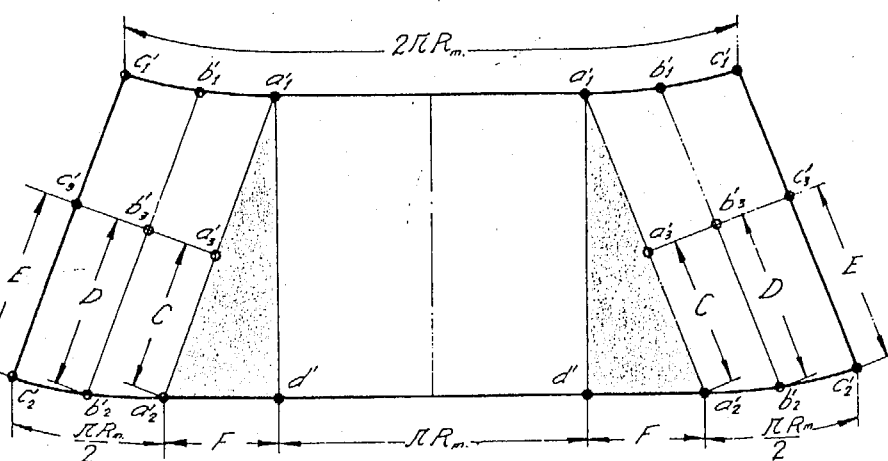


Figura 3

Tremonha de boca circular e base formada por duas semicircunferências unidas por retas.

Esta tremonha (figs. 1 e 2) é composta por duas semivírolas cilíndricas oblíquas de bocas circulares e duas superfícies triangulares que, neste caso, são sombreadas.

Traçado das geratrizes. Divide-se a semicircunferência da boca (fig. 1) em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e a partir dos pontos de divisão a , b , etc., traçam-se paralelas ao eixo horizontal até cortar a semicircunferência da base nos pontos a_1 , b_1 , etc.

Estes pontos são projetados perpendicularmente à base da tremonha na figura 2, determinando os pontos de intersecção a_2 , b_2 , etc. e a partir daí traçam-se paralelas à geratriz extrema, cortando a boca superior nos pontos a_3 , b_3 , etc., ficando assim determinadas as geratrizes necessárias para desenvolver a tremonha.

Desenvolvimento lateral. Desde P (fig. 2) se traça uma perpendicular às geratrizes, determinando os pontos de intersecção a_4 , b_4 , etc. e, também, desde P , como centro, descrevem-se arcos partindo de a_4 , b_4 , etc. até cortarem a base e, no ponto em que cortam a base, traçam-se perpendiculares às geratrizes da vista em planta até cortar as de idêntica origem nos pontos a_5 , b_5 , etc., os quais são ligados por meio de uma curva contínua, determinando assim a semi-elipse que determinaria um plano secante ao cortar perpendicularmente a semivírola oblíqua.

Depois flexiona-se uma régua flexível até acoplá-la à curva da semi-elipse, marcando-a nos pontos a_5 , b_5 , etc.

Em seguida, prolonga-se a reta que parte de P e marca-se a mesma, em uma distância qualquer, o ponto P' (fig. 3) e, a partir deste ponto, transporta-se a distância $P'a'$ igual à distância Pa_4 da figura 2.

No ponto a'_4 coloca-se o ponto da mesma origem da régua flexível e na mesma se marcam pontos que anteriormente tinham sido marcados na semi-elipse, determinando assim novos pontos que chamaremos b'_4 , c'_4 , b'_4 e a'_4 . A partir de a'_4 transporta-se à reta a distância a'_4P' (parte direita) igual à distância $P'a'_4$ (parte esquerda). Em ambas as partes da reta traçam-se perpendiculares a esta desde os pontos a'_4 , b'_4 , etc., projetando-se os pontos da mesma origem a_2 , b_2 , etc. e a_3 , b_3 , etc. da figura 2, determinando os pontos de intersecção a'_2 , b'_2 , etc. e a'_3 , b'_3 , etc., que são unidos por meio de uma curva contínua, tal como mostra a ilustração, ficando assim desenvolvida a semivírola oblíqua.

Os pontos P de ambas as extremidades se unem respectivamente com a'_2 , a'_3 . Desta forma fica resolvido meio desenvolvimento da tremonha, servindo de gabarito para a outra metade.

Aferição. Os pontos a'_2 , b'_2 , etc. e a'_3 , b'_3 , correspondentes às curvas do desenvolvimento (fig. 3) têm que dividi-las em partes iguais, sendo o comprimento de ambas as curvas iguais entre si e iguais ao desenvolvimento médio da semicircunferência da base ou boca ($= \pi R_m$).

Caso tenhamos representadas as projeções horizontal e vertical, tal como se vê nas figuras 4 e 5, ou, de maneira parecida, recorre-se a uma mudança de plano (fig. 6) paralelo ao plano que passa pelos centros das semicircunferências e da boca superior.

Uma vez feita a mudança de plano, desenvolvemos a tremonha, operando com as figuras 4 e 6 da mesma forma que fizemos com as figuras 1 e 2.

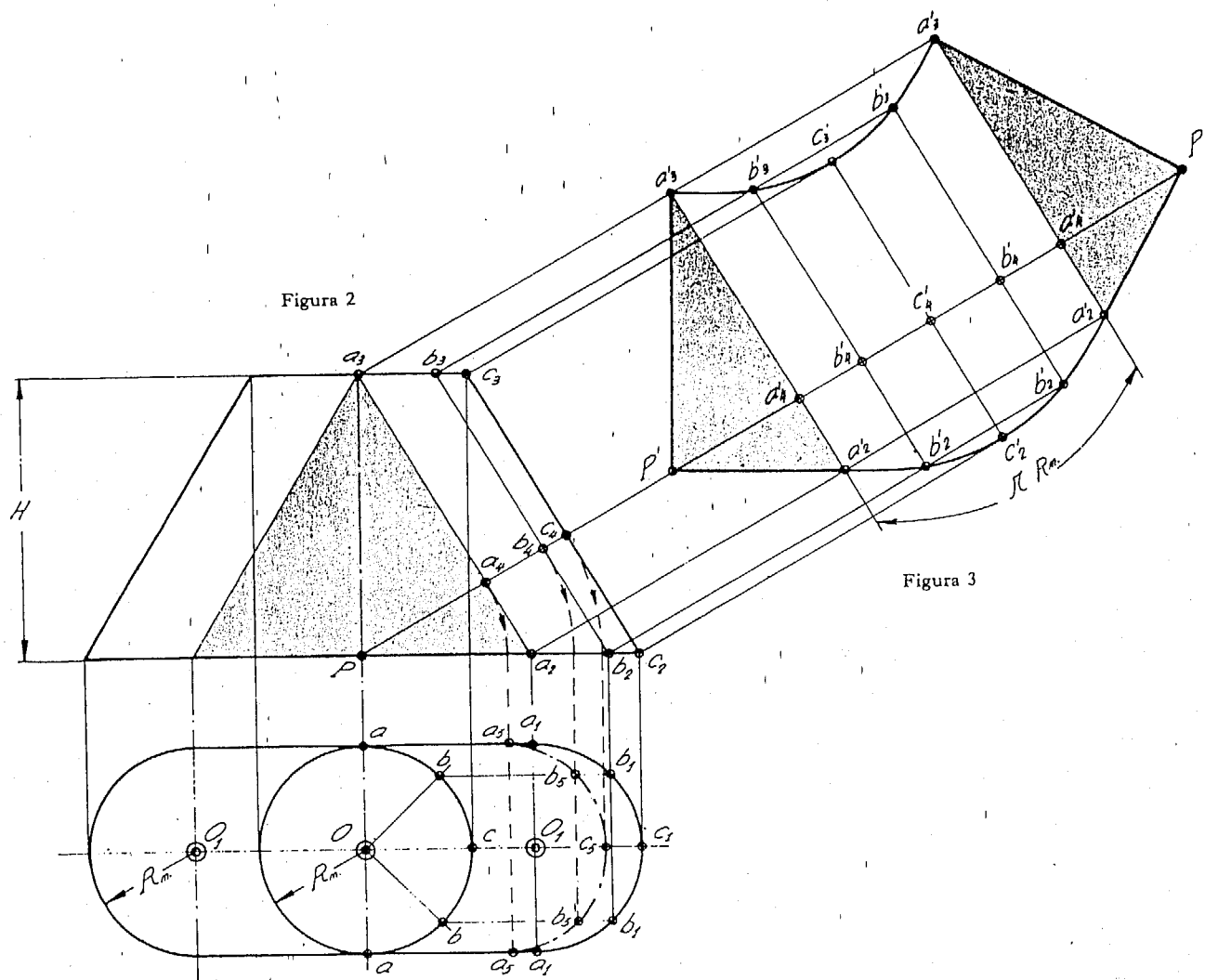


Figura 1

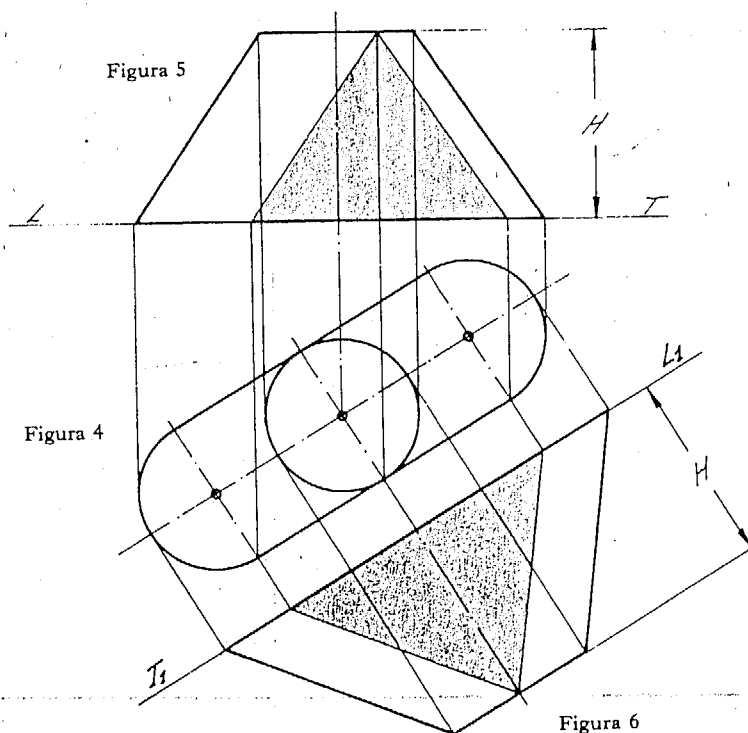


Figura 4

Figura 6

Tremonha de boca central redonda e base quadrada de cantoneiras redondas

Esta tremonha compõe-se de quatro quadrantes de virolas oblíquas de bocas circulares e paralelas, simétricas entre si e de quatro superfícies triangulares iguais duas a duas (as superfícies planas triangulares foram sombreadas).

Traçado das geratrizes (fig. 1). Um quadrante da boca circular é dividido em um número adequado de partes iguais (três, por exemplo) e, a partir dos pontos de divisão a , b , etc., traçam-se paralelas às geratrizes de separação, determinando sobre o quadrante da base os pontos a_1 , b_1 , etc. As geratrizes de separação são as linhas que limitam as partes planas das curvas.

A seguir se faz uma mudança de plano vertical (fig. 3) paralelo às geratrizes aa_1 , bb_1 , etc. Esta mudança de plano é feita da seguinte maneira:

Traça-se uma linha de terra L_1T_1 a uma distância qualquer das geratrizes aa_1 , bb_1 , etc. e paralela a estas. Depois se traça uma paralela à L_1T_1 na altura H , tomada da figura 2, e projetam-se perpendicularmente os pontos a , b , etc. e a_1 , b_1 , etc. da figura 1, determinando sobre a L_1T_1 e a outra paralela de altura H os pontos a_2 , b_2 , etc. e a_3 , b_3 , etc.; respectivamente, que se unem entre si por meio de retas geratrizes que, neste caso, estão em sua verdadeira grandeza.

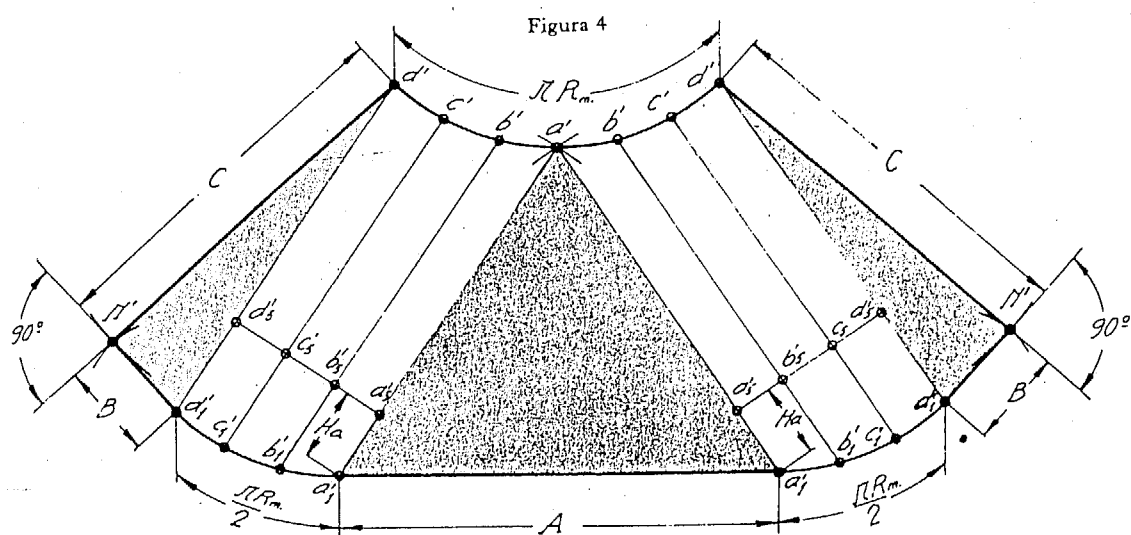
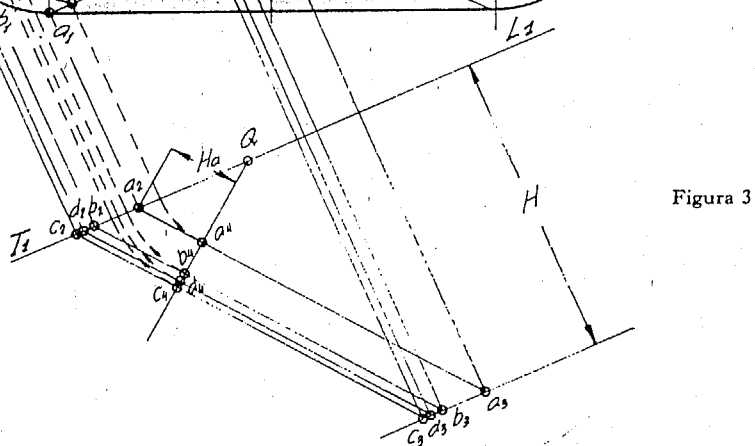
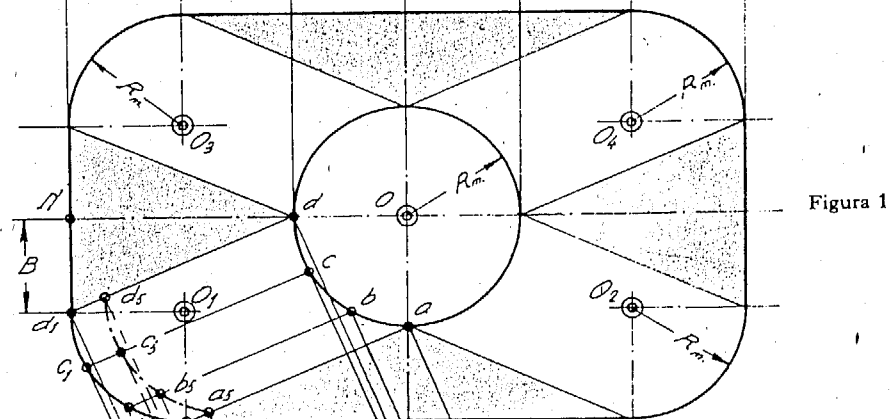
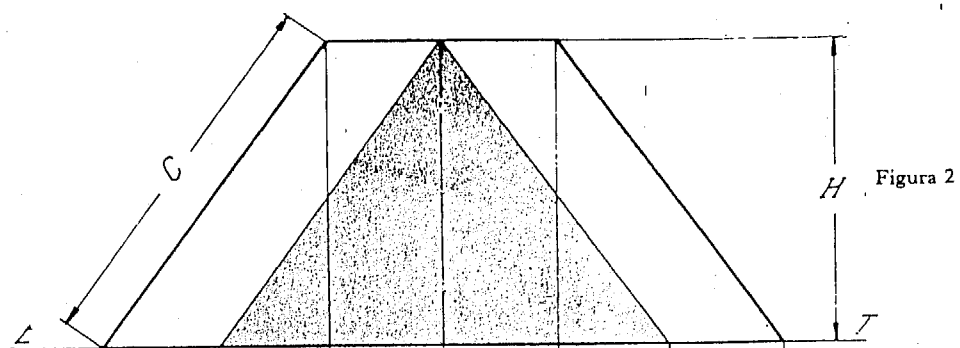
Desde um ponto qualquer da linha da terra L_1T_1 (neste caso o ponto Q), traça-se uma perpendicular às geratrizes a_2a_3 , b_2 , b_3 , etc., cortando-as nos pontos a_4 , b_4 , etc. Tomando como centro o ponto Q , descrevem-se arcos partindo de a_4 , b_4 , etc. e cortando a L_1T_1 e, do ponto em que cortam a mesma, traçam-se perpendiculares à mesma, determinando sobre as geratrizes da figura 1 os

pontos de intersecção a_5 , b_5 , etc., que são ligados por meio de uma curva contínua, determinando assim um quadrante de elipse pertencente à seção transversal do quadrante de virola oblíqua.

Desenvolvimento lateral (fig. 4). Traça-se uma reta de comprimento A tomada da elevação e tendo como centro as suas extremidades a'_1 , descrevem-se arcos de raio igual ao comprimento da geratriz a_2a_3 da figura 3, determinando o ponto de intersecção a' . Os pontos a' e a'_1 (em ambas as partes) são unidos através de retas, ficando assim desenvolvida uma das superfícies triangulares. A partir de a'_1 (em ambas as partes) transporta-se à reta a'_1a' a distância Ha tomada da figura 3, determinando um novo ponto que chamaremos a'_5 , onde traçaremos uma perpendicular à reta a'_1a' , estabelecendo as distâncias a'_5 , b'_5 , c'_5 , etc. iguais aos comprimentos a_5 , b_5 , c_5 , etc., tomadas em curva da figura 1.

Pelos pontos b'_5 , c'_5 , d'_5 , faz-se passarem paralelas à reta a'_1a' , transportando às mesmas as distâncias b'_5b' , c'_5c' , etc. e $b'_5b'_1$, c'_5 , c'_1 , etc., iguais às respectivas distâncias b_4b_3 , c_4c_3 , etc. e b_4b_2 , c_4c_2 , etc. da figura 3, determinando novos pontos que chamaremos b' , c' , etc. e b'_1 , c'_1 , etc. e que se unem por meio de uma curva contínua.

A seguir descreve-se um arco de centro d' (em ambas as partes) e de raio $d'N'$, igual à distância C da figura 2 e, depois, descreve-se outro arco de centro d'_1 e de raio d'_1N' , igual à distância B da figura 1, determinando por intersecção com o anterior, o ponto N' que se une com os pontos d' e d'_1 , ficando assim desenvolvida meia tremonha, sendo a outra metade igual.



Tremonha de boca circular e base triangular de cantoneiras redondas

Esta tremonha é composta de três partes de virolas oblíquas de bocas circulares e paralelas entre si e de três superfícies planas e triangulares que foram sombreadas para melhor apreciação.

Geratrizes de separação. Inicialmente determinam-se as geratrizes de separação, ou seja, as linhas limite das partes curvas e das planas. Para isto, traçam-se desde os pontos O , O_1 e O_2 (fig. 1), perpendiculares aos lados da base, determinando os respectivos pontos c , f , c_1 , f_1 , e g_1 que se unem entre si ordenadamente, tal como se vê na vista em planta, ficando assim determinadas as geratrizes de separação.

Traçado das geratrizes. Os arcos ac e cf (fig. 1) dividem-se em certo número de partes iguais (o primeiro em dois e o segundo em três, por exemplo) e desde os pontos de divisão a , b , etc. e c , d , etc. traçam-se paralelas a suas respectivas geratrizes de separação, determinando sobre os arcos da base os respectivos pontos a_1 , b_1 , etc. e g_1 , d_1 , e_1 , etc., ficando assim traçadas as geratrizes em planta. Depois se projetam perpendicularmente à base da tremonha (fig. 2) os pontos a_1 , b_1 , etc., cortando-a nos pontos a_2 , b_2 , etc. e daí se traçam paralelas à geratriz extrema até cortar o diâmetro médio da boca nos pontos a_3 , b_3 , etc., ficando assim achadas as geratrizes a_2a_3 , b_2b_3 , etc. em sua verdadeira grandeza. Para achar as geratrizes cg_1 , dd_1 , etc. em sua verdadeira grandeza, recorre-se a uma mudança de plano vertical paralelo a estas geratrizes, tal como mostra a figura 3, determinando assim as geratrizes g_2c_3 , d_2d_3 , etc. em sua verdadeira grandeza.

Desde um ponto qualquer P da base (fig. 2) traça-se uma perpendicular às geratrizes a_2a_3 , b_2b_3 , etc., cortando-a nos pontos a_4 , b_4 , etc. que são girados em redor do ponto P até cortar a base; a partir do corte da base traçam-se perpendiculares a esta, cortando as geratrizes da mesma origem nos pontos a_5 , b_5 , e c_5 que são unidos por meio de uma curva contínua.

A outra curva g_5 , d_5 , e_5 e f_5 é determinada de forma análoga à primeira, operando com as geratrizes determinadas pela mudança de plano.

Desenvolvimento lateral (fig. 4). Traça-se uma reta a'_2 , a'_3 de comprimento igual à da geratriz a_2a_3 da figura 2 e a partir de a'_2 transporta-se a distância Ha tomada da elevação, determinando o ponto a_5 , onde se traça uma perpendicular à reta, transportando-se as distâncias a_5b_5 e b_5c_5 , iguais aos comprimentos a_5b_5 e c_5d_5 , tomados em arco da curva da mesma origem da vista em planta.

Pelos pontos b_5 e c_5 (fig. 4) faz-se passar paralelas à reta $a'_2a'_3$, transportando as distâncias $b_5b'_2$, $b_5b'_3$ e $c_5c'_2$, $c_5c'_3$, tomadas da vista em elevação; os pontos a'_2 , b'_2 , c'_2 , e a'_3 , b'_3 , c'_3 , ligam-se por meio de duas curvas contínuas. Depois se descreve um arco de centro c'_2 e de raio $c'_2g'_2$, igual ao comprimento c_1g_1 da vista em planta e, tomando como centro o ponto c'_3 , descreve-se outro arco de raio igual à geratriz real c_3g_2 da figura 3, cortando o anterior no ponto g'_2 . Este ponto se une com os pontos c'_2 e c'_3 por meio de retas, ficando assim desenvolvida uma das superfícies planas que foi sombreada.

Sobre a reta $g'_2c'_3$ e a partir de g'_2 , marca-se o comprimento Hg tomado da figura 3, determinando assim o ponto g_5 , onde se traça uma perpendicular à reta e se marcam os comprimentos g_5d_5 , d_5e_5 , e_5f_5 tomados em arco da curva da mesma origem da figura 1. Por estes pontos faz-se passar paralelas à reta $g'_2c'_3$ e marcam-se as distâncias $d_5d'_2$, $d_5d'_3$, $e_5e'_2$, $e_5e'_3$, etc., tomadas da figura 3. Pelos respectivos pontos g'_2 , d'_2 , etc. e c'_3 , d'_3 traça-se uma curva contínua.

Tomando como centro f'_2 , descreve-se um arco de raio f'_2N' , igual à distância f_1N da vista em planta e, tomando como centro o ponto f'_3 , descreve-se outro arco de raio f'_3N' , igual à distância f'_1N_1 da figura 2, cortando o anterior no ponto N' que se une por meio de retas com os pontos f'_2 e f'_3 , ficando assim desenvolvida meia tremonha que serve ao mesmo tempo de gabarito para a outra metade.

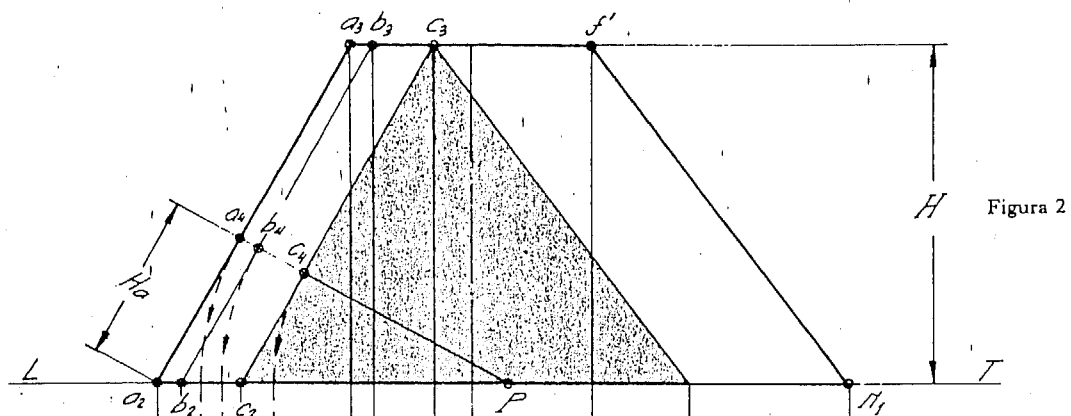


Figura 2

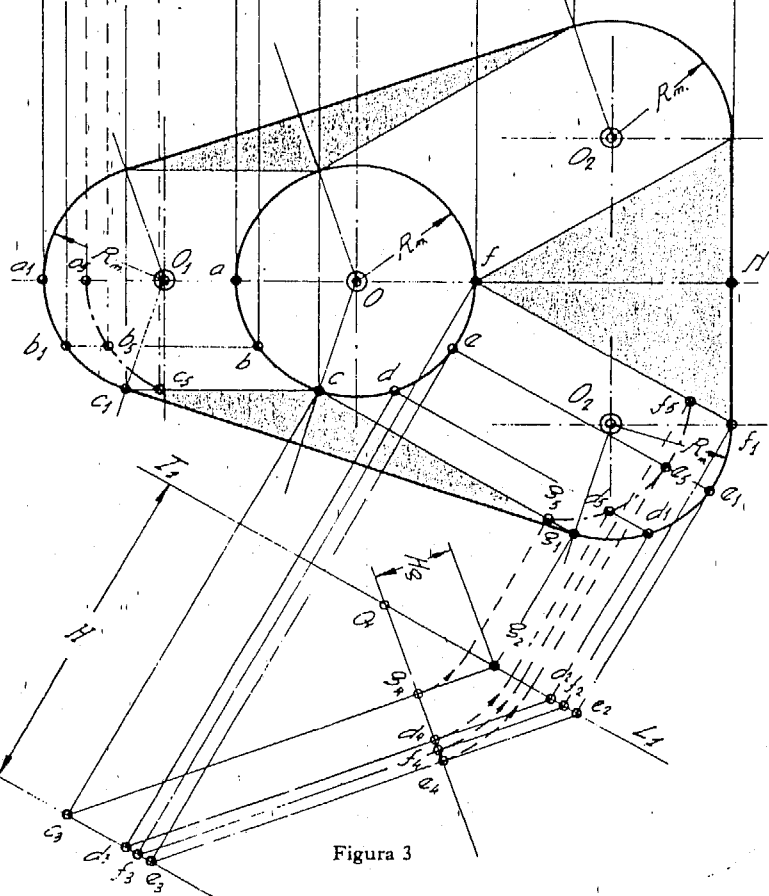


Figura 1

Figura 3

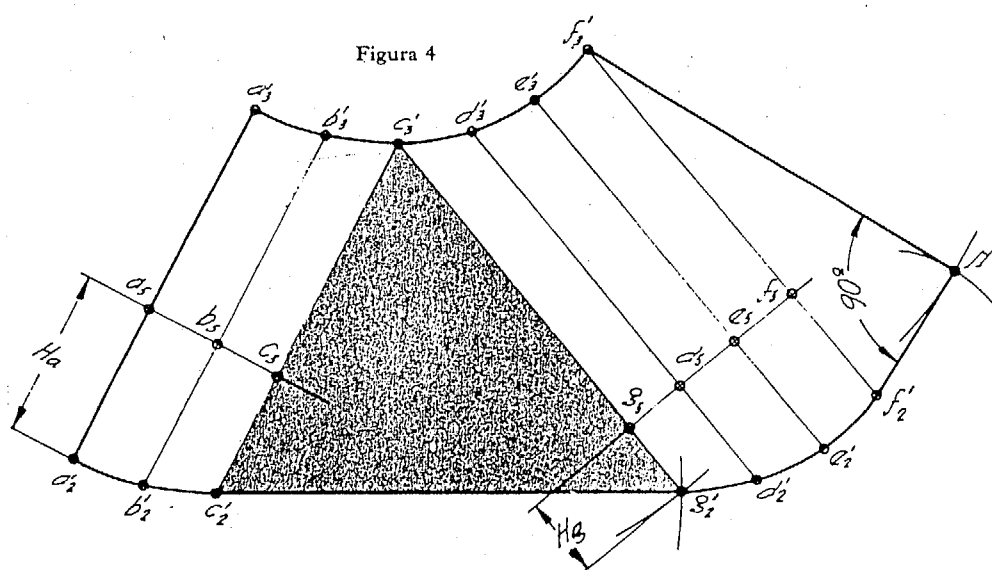


Figura 4

CONES

EXERCÍCIO

18

O cone é representado nas figuras 1 e 2 por suas projeções vertical e horizontal, respectivamente, sendo estas as mais generalizadas.

Desenvolvimento lateral (fig. 3). Tomando como centro o ponto V' , descreve-se um arco de raio G igual à geratriz neutra do cone e sobre este arco se transporta o comprimento da circunferência média da base ($D_m^0 \times 3,1416$) e se unem as extremidades do arco com o ponto V' , ficando assim desenvolvido o cone. Portanto, o desenvolvimento lateral do cone é um setor circular cujo raio e arco são, respectivamente, iguais à geratriz neutra e à circunferência média da base.

Os elementos do cone podem ser determinados teoricamente assim:

$$G = \sqrt{R_m^2 + H^2} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{360 \times R}{G}$$

Também se pode determinar o desenvolvimento lateral do cone (fig. 3) descrevendo um arco de centro V' e raio G igual à geratriz neutra do cone e traçando o ângulo α .

Método para traçar o desenvolvimento do cone sem transferidor (fig. 4). Pelo vértice V se passa uma reta que seja perpendicular ao eixo que divide o ângulo α em duas partes iguais (bissetriz do ângulo), marcando-se a distância M em ambas as partes do vértice V . A distância M deve ser maior do que o raio e se procura arredondar o número (neste caso o raio é 465 e a distância M recebeu um comprimento igual a 500). Em A se traça uma perpendicular à reta que é marcada no ponto B à

distância N . Une-se o ponto B com V , ficando assim traçado o desenvolvimento do cone sem necessidade do transferidor.

A distância N é calculada assim:

$$\beta = 89^\circ 60' - 75^\circ 30' = 14^\circ 30'$$

$$N = M \times \operatorname{tg} \beta = 500 \times 0,25862 = 149,3.$$

Quando o ângulo α do setor circular correspondente ao desenvolvimento do cone tiver mais de 180° , como acontece na figura 5, operaremos com o ângulo β para traçar o desenvolvimento ($\beta = 360^\circ - \alpha$) no caso de empregarmos o transferidor de graus e no caso de operarmos com o desenvolvimento da circunferência média do cone ($D_m^0 \times 3,1416$) empregaremos o seguinte procedimento:

Marca-se um ponto qualquer V (neste caso o vértice V do cone) e se descreve uma circunferência do diâmetro D_1^0 igual a duas vezes o valor da geratriz neutra do cone.

Da superfície do círculo de diâmetro D_1^0 se deduz a superfície do setor circular de arco L , ficando assim desenvolvido o cone em questão. (O desenvolvimento deste cone foi desenhado com linhas imaginárias).

O arco L é calculado da seguinte maneira:

$$L = 3,1416 \times (D_1^0 - D_m^0)$$

Quando a projeção vertical de um cone for um triângulo equilátero, como acontece na figura 7, seu desenvolvimento lateral será um semicírculo de raio G igual à geratriz do cone. Também neste caso desenhou-se o desenvolvimento do cone com linhas imaginárias.

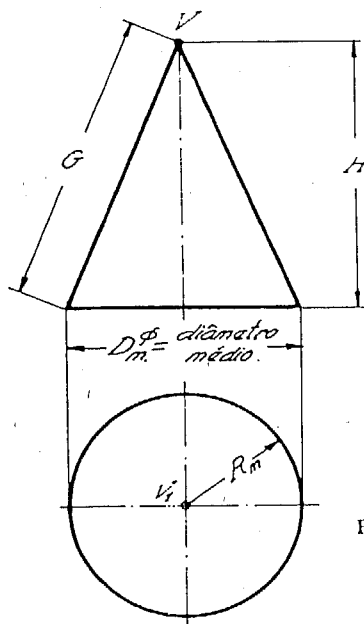


Figura 1

Figura 2

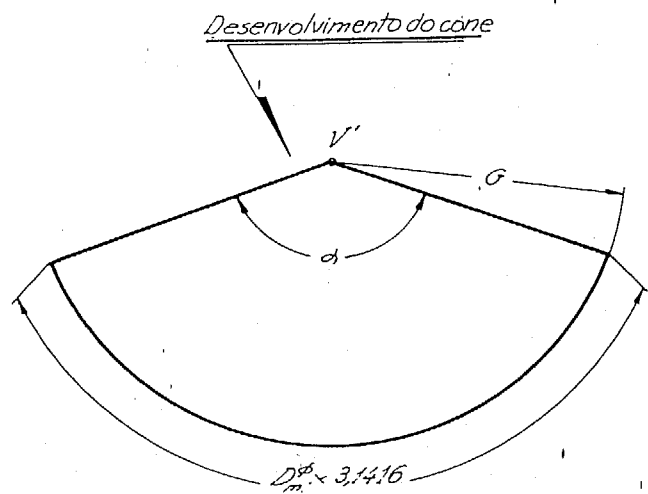


Figura 3

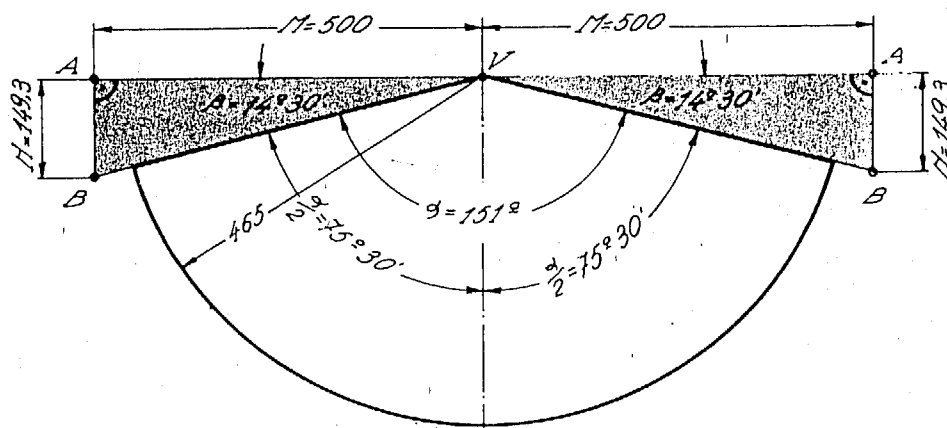


Figura 4

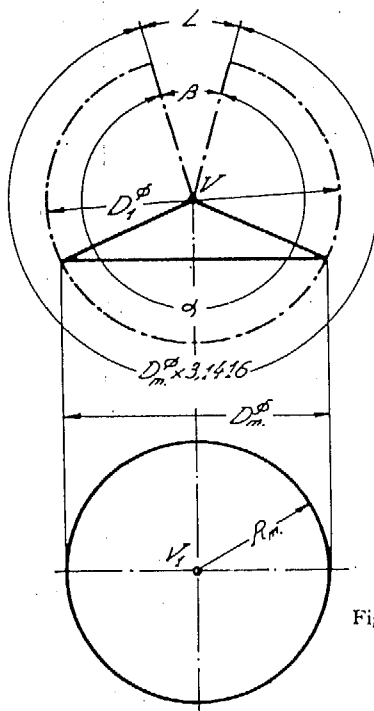


Figura 5

Figura 6

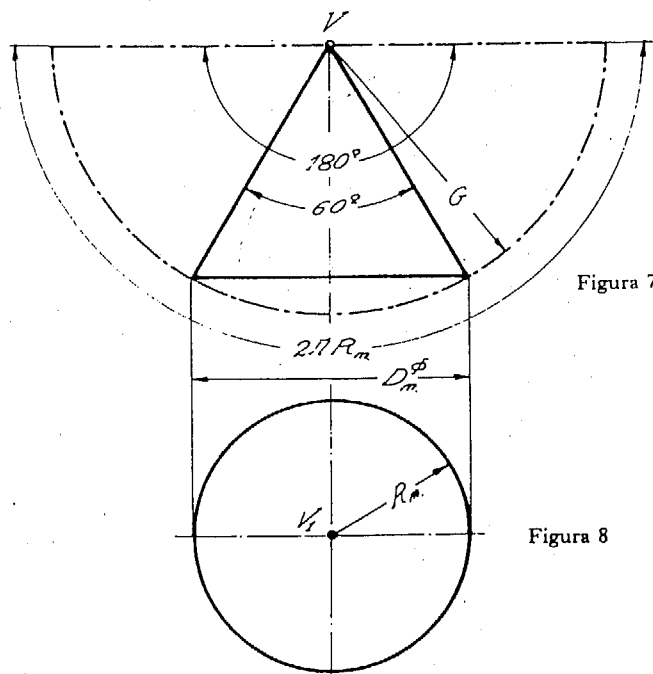


Figura 7

Figura 8

Cone seccionado por um plano secante perpendicularmente ao seu eixo

Quando se representa a vista em elevação do tronco de cone, o melhor é traçar todas as linhas das bordas na posição que ocupariam para assim determinar a geratriz neutra que passa pelo centro da espessura da chapa.

Na figura 1 representou-se corretamente um tronco de cone cujos dados conhecidos são:

Os diâmetros internos D_{in}^{ϕ} e d_{in}^{ϕ} , a espessura e da chapa e a altura H .

Todos os dados necessários para desenvolver o tronco de cone podem ser determinados graficamente, tal como mostra a ilustração. Teoricamente seriam calculados da seguinte maneira:

$$M = \frac{D_m^{\phi} - d_m^{\phi}}{2} = \frac{D_{in}^{\phi} - d_{in}^{\phi}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{M}$$

$$\beta_1 = 90^{\circ} - \beta$$

$$e_1 = e \times \cos \beta_1$$

$$D_m^{\phi} = D_{in}^{\phi} + e_1$$

$$d_m^{\phi} = d_{in}^{\phi} + e_1$$

$$g = \sqrt{M^2 + H^2}$$

$$g_1 = \frac{g \left(\frac{d_m^{\phi}}{2} \right)}{M}$$

$$G = g + g_1$$

$$A = \pi \times D_m^{\phi}$$

$$a = \pi \times d_m^{\phi}$$

$$\alpha = \frac{180 \times D_m^{\phi}}{G}$$

Desenvolvimento lateral (fig. 2). Tomando como centro V' , descrevem-se dois arcos de raios G e g_1 , iguais às respectivas geratrizes G e g_1 da figura 1.

Com estes arcos se relacionam os seus correspondentes comprimentos $A = \pi \times D_m^{\phi}$ e $a = \pi \times d_m^{\phi}$ unindo as pontas com o ponto V' , ficando assim desenvolvido o tronco de cone.

Nota. Como se pode observar, um grave erro será cometido se for considerado o diâmetro médio como o diâmetro interno mais uma espessura ou como o diâmetro externo menos a espessura.

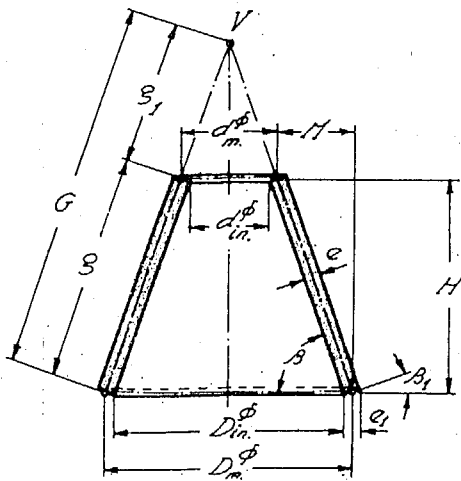


Figura 1

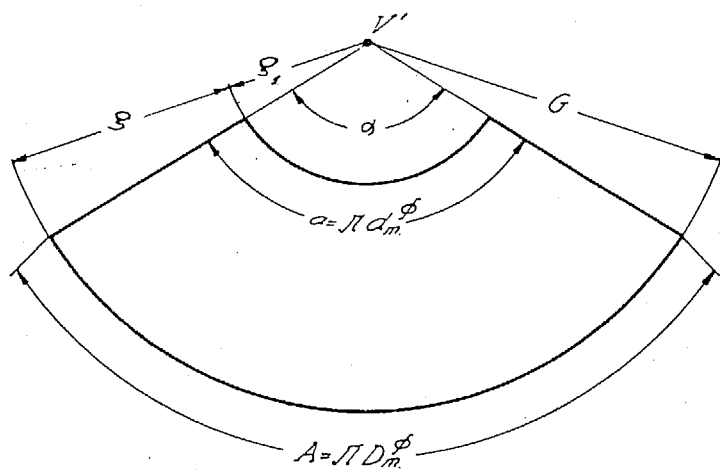


Figura 2

Cone seccionado obliquamente por um plano secante que corta todas as geratrizes

A seção plana que determina este plano ao seccionar o cone é uma *elipse* (ver "Geometria descritiva", fig. 141).

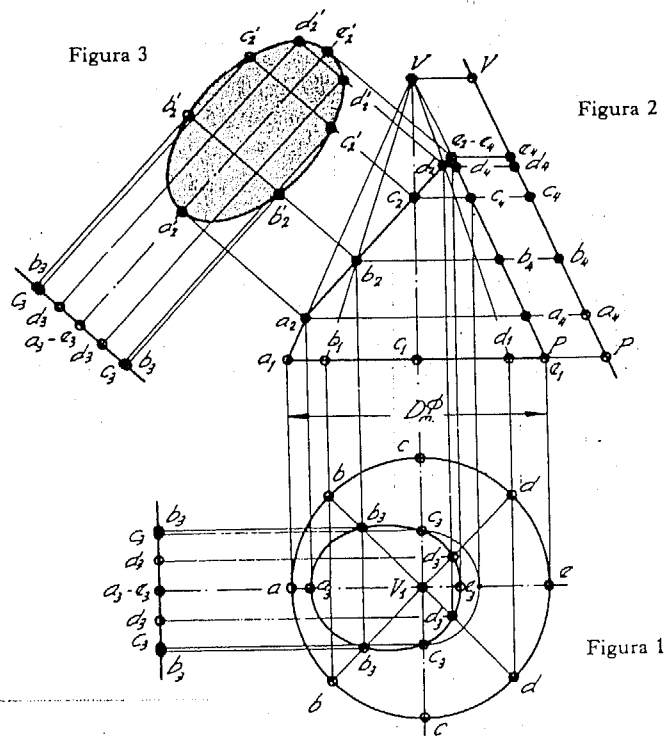
Traçado das geratrizes. Divide-se a circunferência média da projeção horizontal (fig. 1) em certo número de partes iguais (oito, por exemplo) e se unem os pontos de divisão a, b , etc. com o vértice V_1 , determinando assim as geratrizes vistas em planta. Depois projetam-se os pontos a, b , etc. perpendicularmente à base do cone da figura 2, cortando-a nos pontos a_1, b_1 , etc. Estes pontos unem-se com o vértice V , determinando sobre a linha de intersecção os pontos a_2, b_2 , etc.

Os pontos a_2, b_2, d_2 e e_2 são projetados paralelamente ao eixo vertical, cortando as geratrizes da mesma origem (fig. 1) nos pontos a_3, b_3, d_3 e e_3 . O ponto c_2 da figura 2 se projeta perpendicularmente ao eixo vertical, cortando a geratriz extrema no ponto c_4 que se projeta perpendicularmente ao eixo horizontal da figura 1 até cortá-la e se traça uma semicircunferência de centro V_1 passando por este ponto e cortando a geratriz V_1c no ponto c_3 . Os pontos a_3, b_3, c_3 , etc. são unidos ordenadamente por meio de uma curva contínua, ficando assim representada a projeção horizontal da seção plana.

Traçado da seção plana (fig. 3). Nos pontos a_2, b_2 , etc. traçam-se perpendiculares à linha de intersecção. Depois trasladam-se as distâncias existentes entre o eixo horizontal da figura 1 e os pontos a_3, b_3 , etc. e se traçam paralelas à linha de intersecção, determinando sobre as perpendiculares da mesma origem os pontos de intersecção a'_2, b'_2 , etc. que se unem por meio de uma curva contínua, sendo neste caso uma elipse.

Desenvolvimento lateral. Os pontos a_2, b_2 da figura 2 projetam-se perpendicularmente ao eixo vertical, cortando a geratriz extrema nos pontos a_4, b_4 , etc. e uma paralela a esta nos pontos do mesmo nome.

Esta paralela é traçada sobre a chapa em que será traçado o desenvolvimento (fig. 4) e tomando como centro o ponto V' se descreve um arco que parte de P . A este arco dá-se o desenvolvimento da circunferência média ($D_m^\phi \times 3,1416$) dividida em oito partes iguais, neste caso, unindo os pontos de divisão a'_1, b'_1 , etc. com o vértice V' . Os pontos a_4, b_4 , etc. são girados em redor do ponto V' , cortando as geratrizes da mesma origem nos pontos a'_2, b'_2 , etc., os quais são unidos por meio de uma curva contínua. Para facilitar o traçado da curva, convém fazer uma divisão mais nas pontas, tal como se vê na parte superior de desenvolvimento.



21

Cone seccionado obliquamente por um plano secante paralelo a uma geratriz

A seção plana que determina este plano ao seccionar o cone é uma *parábola* (ver "Geometria descritiva", fig. 142).

Traçado das geratrizes. Divide-se a semicircunferência da parte direita (fig. 1) em um número adequado de partes iguais (quatro, neste caso); também se divide o arco Pc em certo número de partes iguais (dois, por exemplo).

Os pontos de divisão são unidos com o ponto V_1 por meio de retas geratrizes. Os pontos de divisão a, b , etc. são projetados perpendicularmente à base do cone (fig. 2), cortando-a nos pontos a_1, b_1 , etc. que são unidos com o vértice V , determinando sobre a linha de intersecção os pontos a_2, b_2 , etc. Estes pontos são projetados paralelamente ao eixo vertical cortando as geratrizes da mesma origem nos pontos a_3, b_3 , etc. (o ponto c_3 é determinado como no caso anterior) que são unidos assim como se vê na ilustração.

Traçado da seção plana (fig. 3). A seção plana, neste caso, é uma parábola e se determina de forma análoga a do caso anterior.

Desenvolvimento lateral. Os pontos a_2, b_2 , etc. (fig. 2) são projetados perpendicularmente ao eixo vertical, cortando a geratriz extrema nos pontos a_4, b_4 , etc. e uma paralela a esta nos pontos do mesmo nome.

Esta paralela é traçada sobre a chapa em que será traçado o desenvolvimento (fig. 4). Tomando como centro o ponto V' , descreve-se um arco de raio $V'P_2$ igual à geratriz neutra do cone e se transportam as distâncias ab, bc , etc. da figura 1, tomadas em arco, determinando assim os pontos a'_1, b'_1 , etc. que se unem com o ponto V' . Os pontos a_4, b_4 , etc. são girados em redor do ponto V' , determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos de intersecção a'_2, b'_2 , etc. que são ligados por meio de uma curva contínua, tal como se vê na ilustração.

Figura 3

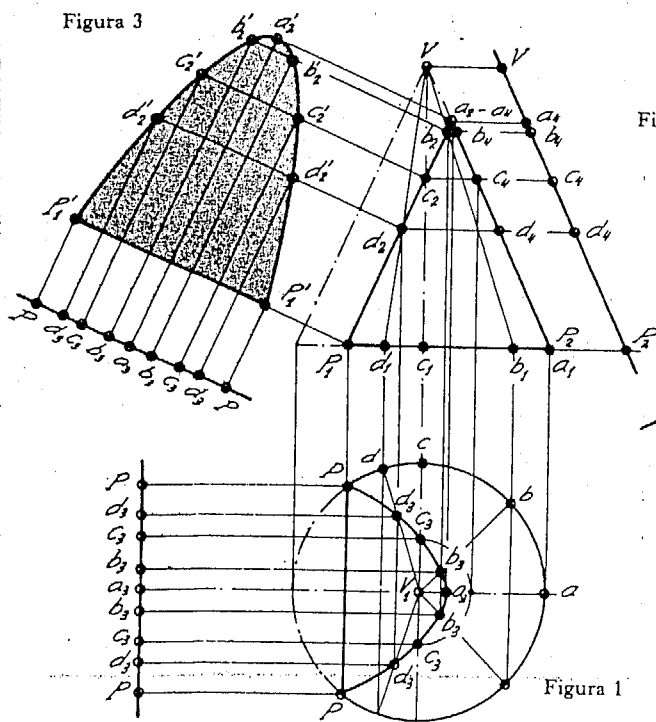


Figura 2

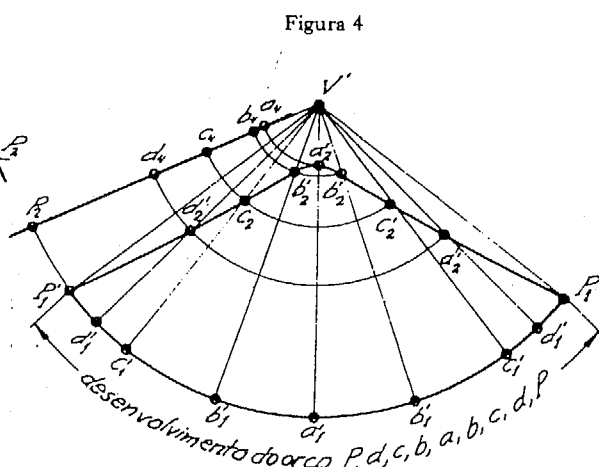
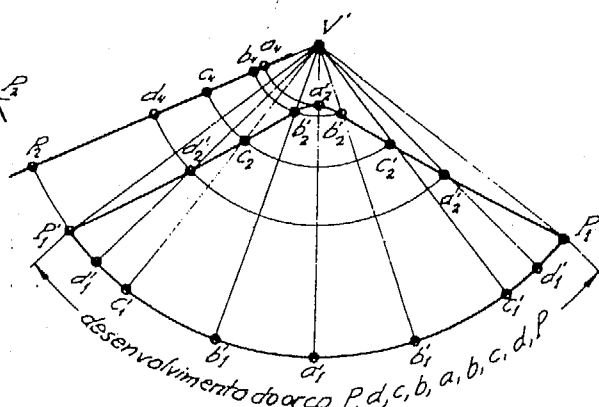


Figura 4



Cone seccionado obliquamente por um plano secante que determina uma hipérbole

Para um plano secante determinar uma hipérbole, ao seccionar um cone, o ângulo α (fig. 1) formado pelo plano com o eixo do cone tem que ser inferior ou igual ao ângulo β formado pela geratriz extrema do cone e seu eixo (ver "Geometria descritiva", fig. 143).

Neste caso desenvolveremos um cone que está seccionado por um plano secante que é perpendicular à base, sendo a sua seção também uma hipérbole.

Traçado das geratrizes. Divide-se o arco PP (fig. 3) em certo número de partes iguais ou desiguais (quatro partes iguais, por exemplo) e se unem os pontos de divisão a e b com o ponto V_1 por meio de retas geratrizes, determinando sobre a linha de intersecção os pontos a_1 e b_1 . Os pontos a e b são projetados perpendicularmente à base do cone da figura 2, determinando os pontos a_2 e b_2 que se unem com o vértice V por meio de retas ge-

ratrizes que cortam a linha de intersecção nos pontos a_3 e b_3 .

Traçado da seção plana (fig. 4). Prolonga-se a base do cone traçando-se uma paralela qualquer sobre a qual são marcadas as distâncias a_1b_1 e b_1P tomadas da figura 3. A partir desses pontos traçam-se perpendiculares à paralela anterior e pelos pontos a_3 , b_3 , etc. (fig. 2) faz-se passar paralelas à base, cortando a geratriz extrema nos pontos a_4 , b_4 e P_2 e as perpendiculares anteriores da mesma origem (fig. 4) nos pontos a'_3 e b'_3 , que, ligados com P_1 por meio de uma curva contínua, determinariam a seção plana hiperbólica.

Desenvolvimento lateral (fig. 5). O desenvolvimento lateral deste cone é determinado da mesma forma que o anterior; na ilustração da figura 5 se vê claramente o procedimento a seguir.

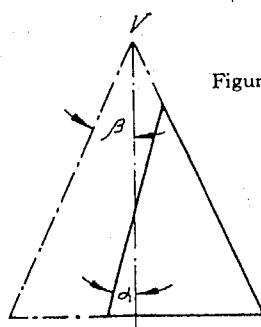


Figura 1

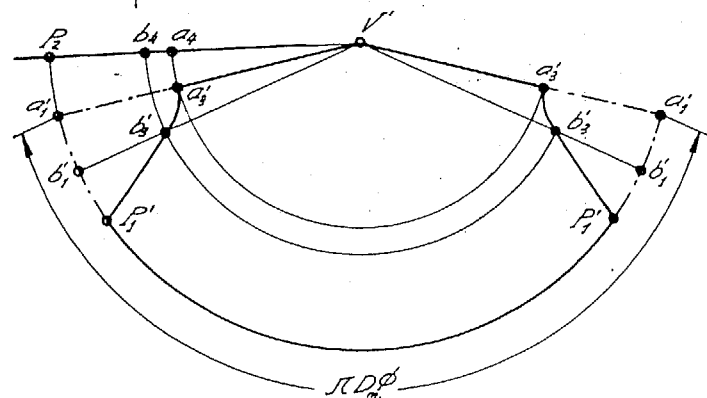


Figura 5

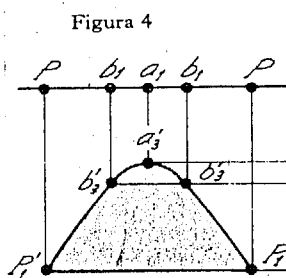


Figura 4

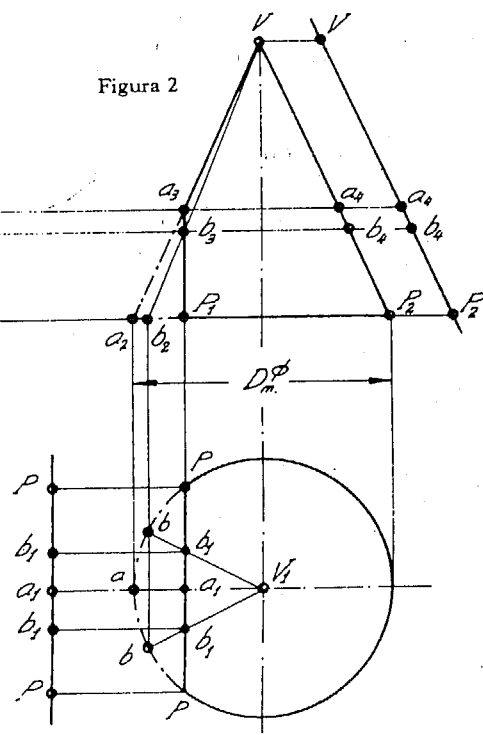


Figura 2

Figura 3

Tronco de cone, cujo vértice não é acessível ao compasso

O tronco de cone (fig. 1) é representado pelos seus diâmetros médios. Os elementos do tronco de cone podem ser determinados teoricamente ou graficamente. Neste caso, procuraremos desenvolver o tronco de cone, graficamente, e empregaremos dois métodos diferentes.

Primeiro método (fig. 2). Desenha-se um trapézio de bases AA e BB igual ao trapézio formado pelo tronco de cone em sua projeção vertical (ver figura 1 deste exercício).

Tomando como centro um ponto qualquer da reta AB (em ambas as partes), descreve-se um arco partindo de C ; este mesmo ponto é girado em redor do ponto B cortando o anterior no ponto C_1 , pelo qual se passa uma reta partindo de B dando-lhe a distância $BB_1 = BB$. Tomando como centro o ponto B_1 descreve-se um arco de raio $R = AB$ (AB é igual à geratriz neutra do tronco de cone) e tomando como centro o ponto A descreve-se outro arco de raio $AA_1 = AA$, cortando o anterior em A_1 que é unido com os pontos A e B_1 por meio de linhas imaginárias, ficando assim representados três troncos de cones iguais ao da figura 1.

Desde o ponto B (parte esquerda) traça-se uma perpendicular à reta AB , determinando com a base do trapézio o ângulo α , cuja bissetriz corta o eixo desse trapézio no ponto E . A distância CE é marcada sobre os eixos dos outros dois trapézios, tal como se vê na ilustração da figura 2, determinando assim os pontos E_1 . De forma análoga se pode determinar todos os pontos que se desejar e que se unem por meio de uma régua flexível, determinando assim a curva pertencente ao desen-

volvimento da base. Como esta curva é menor do que o desenvolvimento da circunferência média da base, prolonga-se em suas pontas, tirando a média, de forma que seu comprimento seja igual a $3,1416 \times D_m^2$.

Tomando como centro os pontos E e E_1 descrevem-se arcos de raios $R = AB$, determinando sobre os eixos dos trapézios novos pontos que são ligados junto com os pontos A e A_1 por meio de uma curva contínua (neste caso, a curva é um arco de circunferência), prolongando-a por suas extremidades A_1 até que seu comprimento seja igual ao desenvolvimento da circunferência média de diâmetro d_m^2 ($3,1416 \times d_m^2$). Os pontos A_2 e B_2 são unidos por meio de retas, ficando assim desenvolvido o tronco de cone sem necessidade do compasso. A superfície sombreada é a que tem que ser prolongada para que o desenvolvimento seja exato.

Segundo método (fig. 3). A representação dos três trapézios é feita da mesma forma que no método anterior. A uma distância qualquer traçam-se paralelas à reta AB e ao eixo do trapézio, estando separadas entre si na mesma distância, determinando o ponto de intersecção P . Tomando como centro este ponto, descreve-se um arco que parta de B , cortando o eixo do trapézio no ponto E . Uma vez que este ponto tiver sido determinado, continua-se com o desenvolvimento de forma análoga ao método anterior.

Na figura 3 se vê claramente o método seguido para desenvolver o cone.

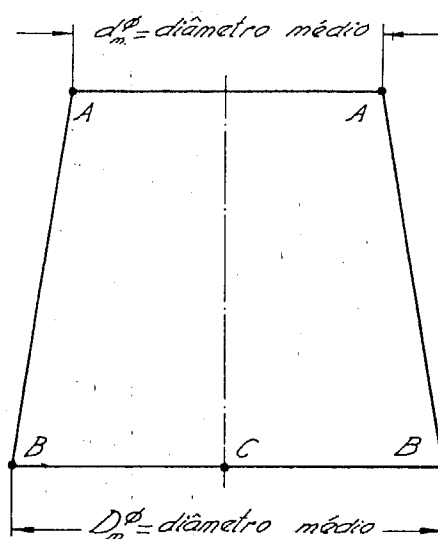
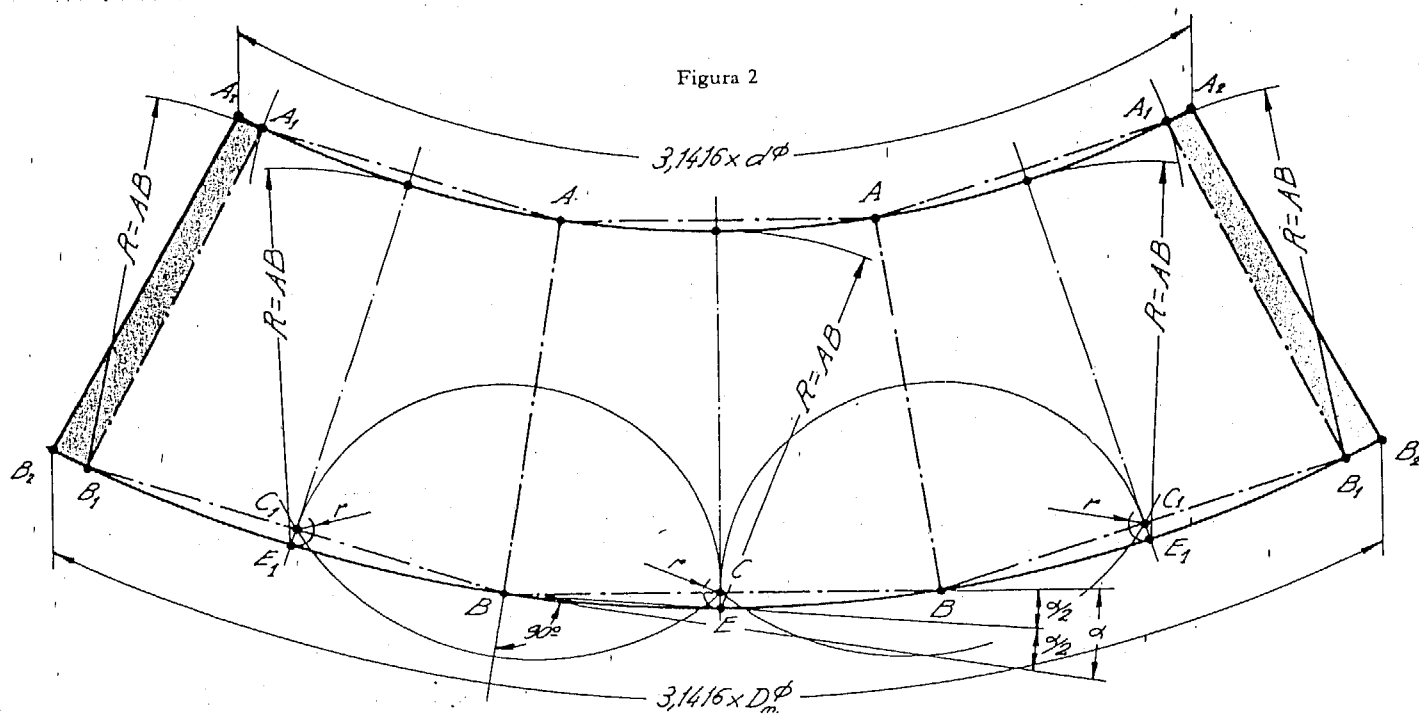


Figura 1

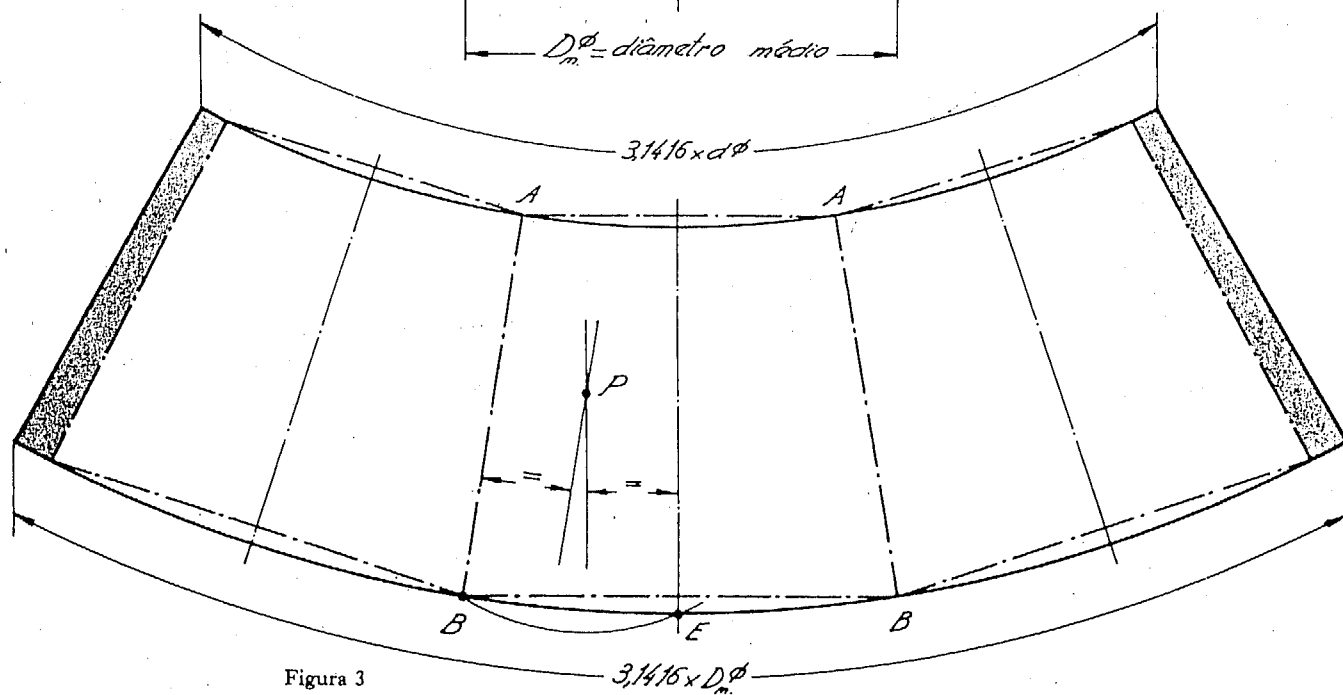


Figura 3

Cone de vértice inacessível ao compasso, seccionado de várias formas

O cone em questão (fig. 1) é representado por seus diâmetros médios.

Traçado das geratrizes (fig. 1). Sobre seus correspondentes diâmetros médios, descrevem-se semicircunferência e se dividem em um número adequado de partes iguais (quatro partes iguais cada uma) e a partir dos pontos de divisão, traçam-se perpendiculares aos seus respectivos diâmetros, determinando os pontos de intersecção a, b, c , etc. e f, g, h , etc., que são unidos entre si por meio de retas geratrizes, assim como mostra a figura, determinando sobre as seções os pontos a_1, b_1, c_1 , etc. e f_1, g_1, h_1 , etc., que, projetados perpendicularmente ao eixo do cone, determinariam

sobre a geratriz extrema as distâncias A, B, C, D, E, F, G e H .

Desenvolvimento lateral (fig. 2). O desenvolvimento do tronco de cone é feito por qualquer um dos métodos anteriores. Uma vez que se tiver desenvolvido o tronco de cone, desenhado com linhas imaginárias, neste caso divide-se em oito partes iguais e se estabelece sobre as geratrizes correspondentes as distâncias A, B, C , etc., tomadas da figura 1, determinando assim os pontos a'_1, b'_1, c'_1 , etc. e f'_1, g'_1, h'_1 , etc. que são ligados por meio de curvas contínuas que limitam o desenvolvimento.

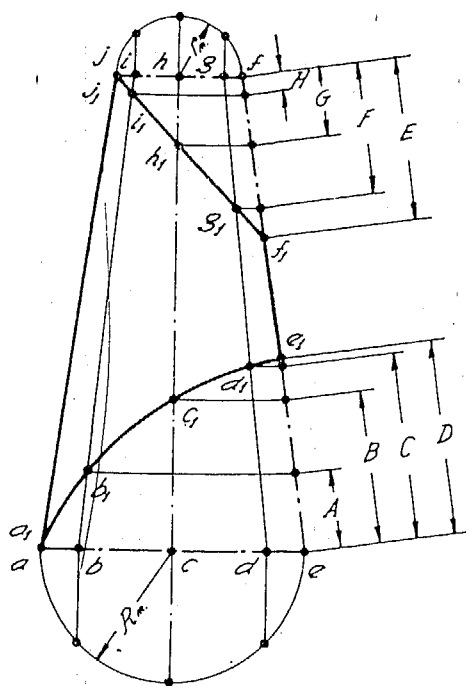


Figura 1

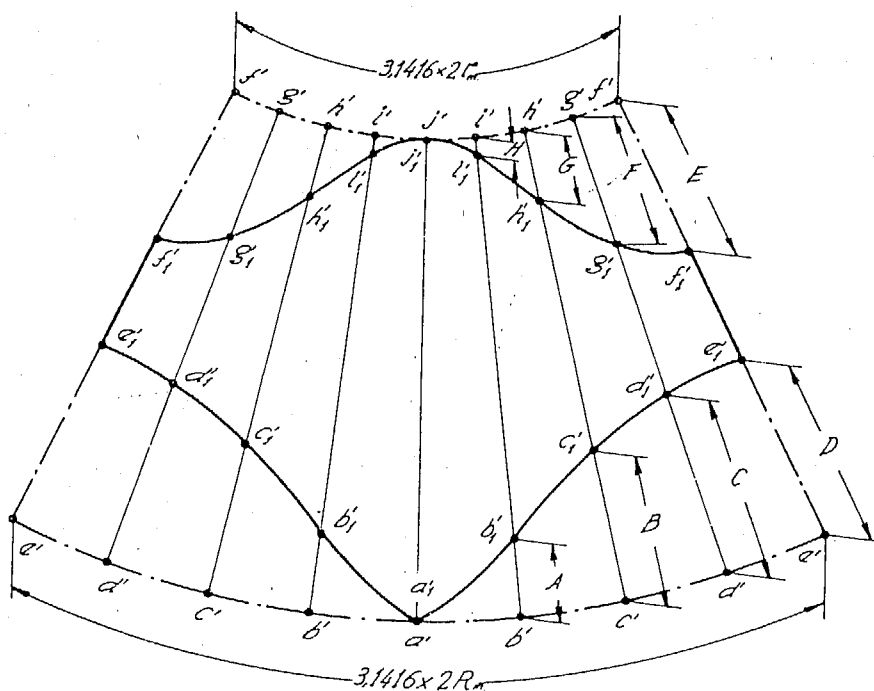


Figura 2

Tremonhas de boca e base formadas por semicircunferências unidas por retas

Esta tremonha (figs. 1 e 2) é composta por dois semitroncos de cone e duas superfícies planas que são sombreadas.

Determinação da geratriz extrema. Projeta-se o ponto V (fig. 1) perpendicularmente à base da tremonha até cortar o prolongamento da geratriz extrema PQ (fig. 2) no ponto V_1 .

Desenvolvimento lateral de meia tremonha (fig. 3). Tomando como centro V' , descrevem-se dois

arcos de raios iguais às distâncias VQ e VP . Sobre o arco de raio VP se transporta o desenvolvimento da semicircunferência média da base $\pi \times R_m$, e as extremidades A' se unem com o ponto V' , cortando o arco anterior nos pontos C' .

Nos pontos A' e C' traçam-se perpendiculares à reta $A'C'$, marcando-se a distância E , tomada da figura 1, determinando assim os pontos B' e D' , os quais se unem por meio de retas que limitam o desenvolvimento de meia tremonha que serve de gabarito para marcar a outra metade.

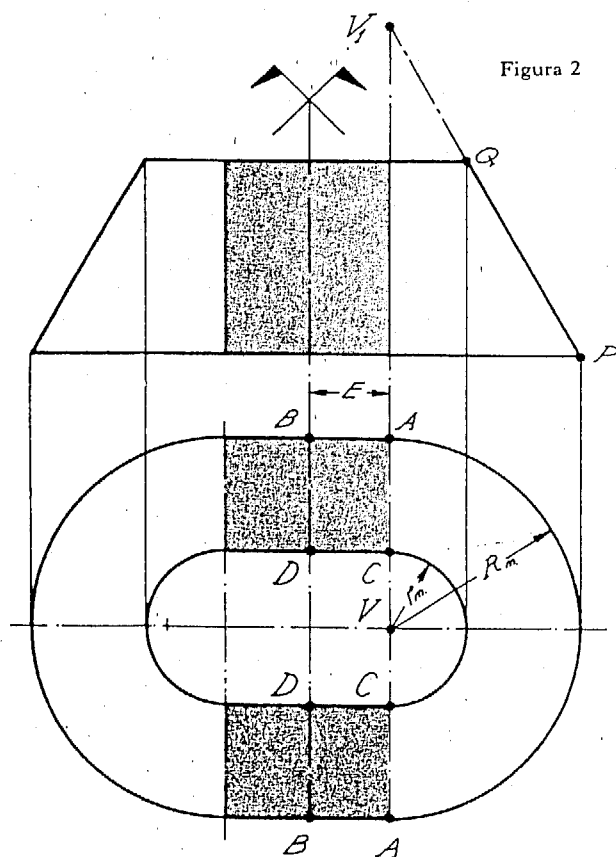


Figura 1

Figura 2

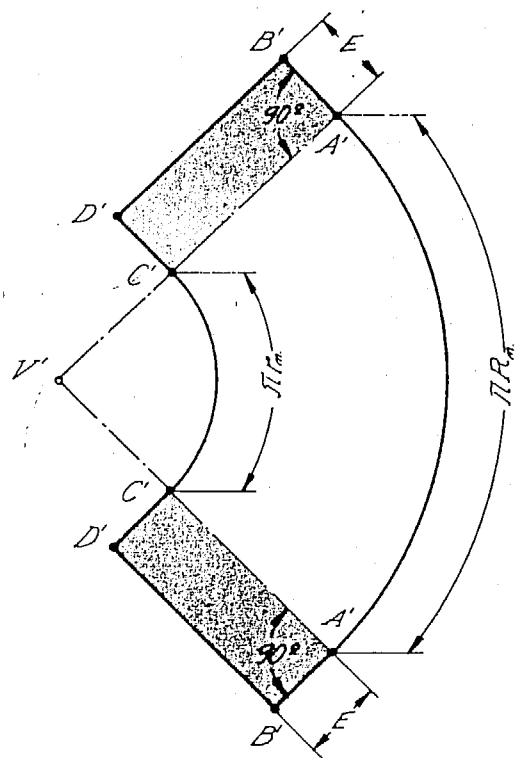


Figura 3

Tremonha de boca superior circular e base formada por dois arcos de circunferência de diferente raio, unidas por retas

Esta tremonha é composta por uma parte de tronco de cone reto, outra parte de virola oblíqua de bocas circulares e por duas superfícies planas e triangulares que são sombreadas.

Decomposição em partes desdobráveis. Para decompor a tremonha em partes desdobráveis, traçam-se perpendiculares às retas que unem os arcos de circunferência (fig. 1) a partir dos centros das mesmas, cortando a reta nos pontos E, F e a circunferência no ponto a que se unem por meio de retas, tal como se vê na ilustração, determinando assim a parte de tronco de cone de virola oblíqua e a superfície plana.

Traçado das geratrizes. O arco aa (fig. 1) se divide em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b , etc. traçam-se perpendiculares ao diâmetro médio

da boca superior (fig. 2), determinando os pontos de intersecção a_1b_1 , etc., que são projetados paralelamente à geratriz extrema até cortar a base nos pontos a_2b_2 , etc. A geratriz extrema D_1D_2 se prolonga até cortar o eixo da tremonha no ponto V .

A uma distância qualquer C da geratriz a_1a_2 traça-se uma perpendicular a esta, cortando as geratrizes nos pontos a_3a_3 , etc. A partir destes pontos estabelecem-se as distâncias A e B , tomadas da figura 1, determinando os pontos a_4b_4 e c_4 que se unem por meio de uma curva contínua, determinando assim a seção transversal da parte de virola oblíqua.

Desenvolvimento lateral (fig. 3). O desenvolvimento lateral se faz de forma análoga à dos casos anteriores porque primeiro desenvolveríamos a parte cônica, depois a superfície plana e, por último, a parte de virola oblíqua.

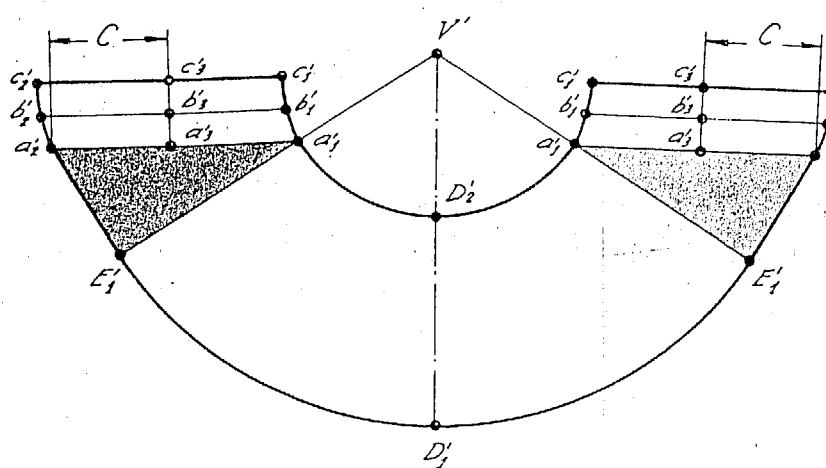


Figura 3

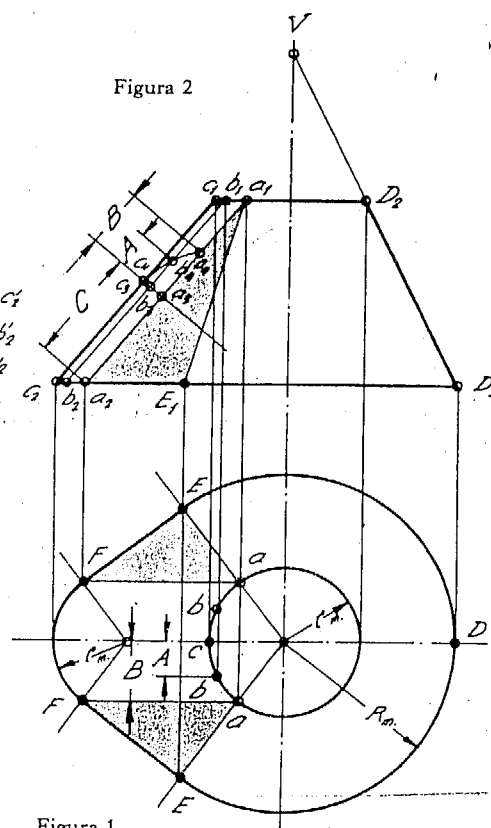


Figura 1

Tremonha de bocas ovaladas

Esta tremonha é composta por partes de troncos de cones iguais duas a duas, sendo suas linhas de limitação as que passam pelos centros V e W dos arcos dos ovais (fig. 1).

Traçado das geratrizes. Projeta-se o ponto W (fig. 1) perpendicularmente à base da tremonha até cortar o prolongamento da geratriz c_2c_3 (fig. 2) no ponto W_1 . Depois traça-se uma paralela ao eixo horizontal (fig. 1) partindo de V e se gira o ponto b_1 em redor do ponto V , determinando sobre a paralela anterior o ponto P que se projeta perpendicularmente à base da tremonha, determinando sobre seu prolongamento (fig. 2) o ponto de intersecção P_1 .

Desde o ponto P_1 se traça uma paralela à geratriz W_1c_2 , determinando sobre o eixo vertical o ponto V_1 .

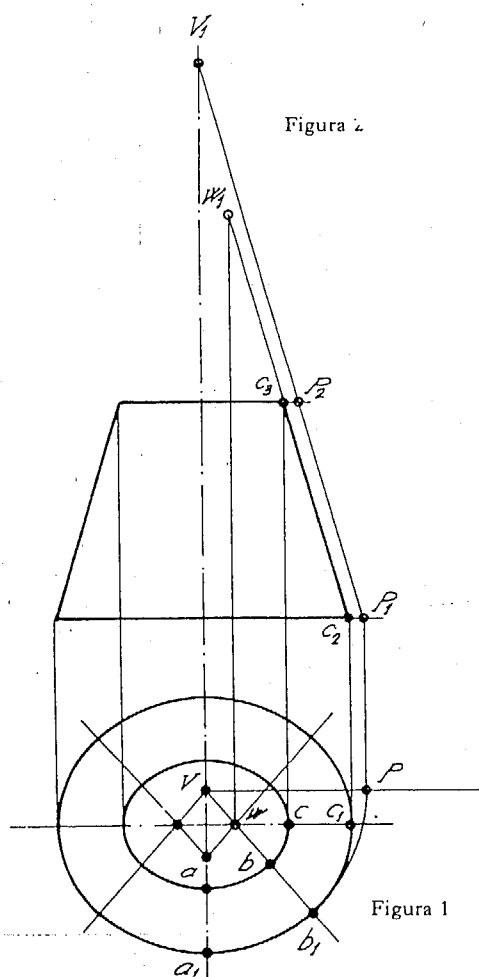


Figura 2

Figura 1

Desenvolvimento lateral (fig. 3). Traça-se uma vertical $V'_1a'_1$ igual ao comprimento da geratriz V_1P_1 da figura 2 e, tomando como centro V'_1 , descreve-se um arco que parta de a'_1 em ambas as partes, dando-lhe o comprimento a_1b_1 , tomado em arco da figura 1. Os pontos $b'_1 - b''_1$ se unem com o ponto V'_1 . A partir de b'_1 estabelece-se sobre a reta $b'_1V'_1$ a distância $b'_1W'_1$ igual à geratriz W_1c_2 da figura 2.

Descreve-se um arco de centro W'_1 que parta de b'_1 dando a este os comprimentos b'_1, c'_1 e c'_1, b'_1 , iguais ao comprimento do arco b_1c_1 da figura 1 e unem-se esses pontos com o ponto W'_1 . A reta $b'_1W'_1$ se prolonga dando-lhe o comprimento $b'_1V''_1 = b_1V_1$ da mesma figura e tomando como centro V''_1 , descreve-se um arco que parta de b'_1 e de comprimento $b'_1a'_1$ igual ao comprimento b_1a_1 , tomado em arco da figura 1, unindo o ponto a'_1 com V''_1 .

Tomando como centro os pontos V'_1 e V''_1 descrevem-se arcos de raio comum igual à geratriz V_1P_2 da figura 1, determinando os pontos a''_1 e b''_1 . Depois se descrevem arcos que partem do ponto b''_1 e de centro W'_1 , ficando assim desenvolvida a tremonha completa.

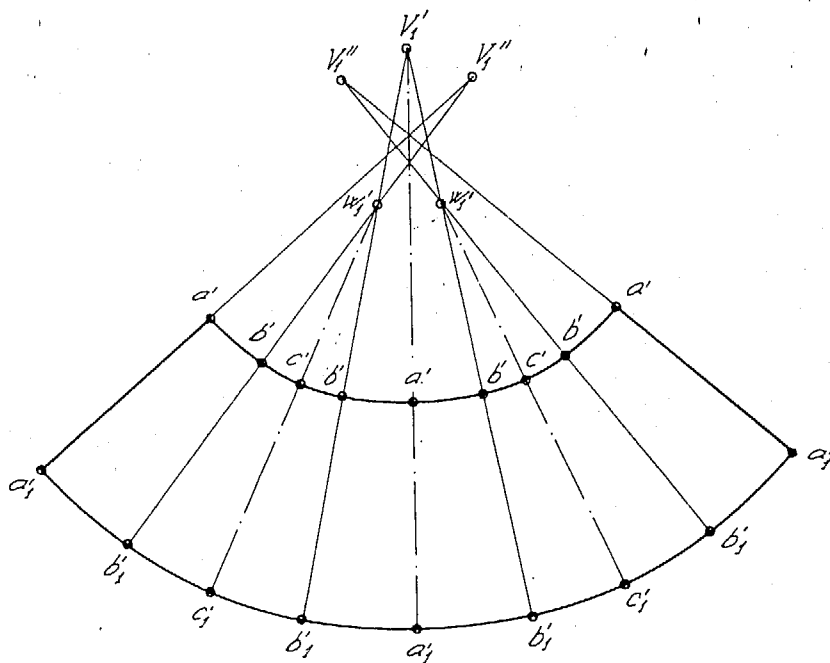


Figura 3

União de um cilindro em uma tremonha ovalada

Nas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) representou-se a tremonha ovalada e o cilindro com a correspondente linha de intersecção pela sua fibra média.

Representação da linha de intersecção. Como a tremonha é simétrica com respeito a seus eixos vertical e horizontal (fig. 1), só é necessário representar um quadrante da linha de intersecção do cilindro e da tremonha que determinaremos como segue.

Traça-se uma reta (fig. 1) que passa pelos centros W e V do oval, determinando sobre a circunferência média do cilindro o ponto c e sobre o arco médio do oval o ponto c_1 . Os arcos ac e cf do quadrante médio do cilindro se dividem em um número adequado de partes iguais ou desiguais (duas partes desiguais no primeiro e três partes iguais no segundo) e desde os respectivos centros V e W se traçam retas que passam pelos pontos de divisão a, b, d, e e f , determinando sobre o quadrante ovalado da base os pontos a_1, b_1, d_1, e_1 e f_1 .

Os pontos a, b, c , etc. são projetadas perpendicularmente ao diâmetro médio do cilindro (fig. 2), determinando sobre o mesmo os pontos a_2, b_2, c_2 , etc., ficando assim representadas as geratrizes do cilindro.

A seguir se projeta verticalmente o ponto V (fig. 1), determinando sobre o prolongamento da geratriz extrema da tremonha o ponto V_1 . Depois se projetam os pontos a_1, b_1, c_1 , perpendicularmente à base da tremonha (fig. 2), determinando os pontos a_3, b_3, c_3 , etc.

Em seguida se traça uma horizontal que passa pelo ponto W (fig. 1) e, com centro neste ponto, descreve-se um arco (em ambas as partes) que passam pelo arco c_1, d_1, e_1, f_1 , determinando sobre a horizontal os respectivos pontos M e P . Estes pontos são projetados perpendicularmente à base da tremonha (fig. 2), determinando sobre o prolongamento desta os pontos de intersecção M_1 e P_1 , respectivamente, desde os quais se traçam paralelas às geratrizes extremas da tremonha, determinando pela intersecção de ambas o ponto de intersecção W_1 (este ponto tem que ser cortado no eixo vertical da tremonha e do cilindro).

Os pontos V_1 e W_1 são unidos com os respectivos pontos a_3, b_3, c_3, d_3 e e_3 por meio de retas geratrizes, determinando sobre as geratrizes da mesma origem do cilindro os pontos de intersecção a_4, b_4, c_4, d_4 e e_4 . Depois se descreve um arco de centro W (fig. 1) e que parta do ponto f , determinando sobre a horizontal que passa pelo ponto W o ponto de intersecção N , a partir do qual se traça uma perpendicular à base da tremonha (fig. 2) até cortar a geratriz W_1M_1 no ponto N_1 .

Desde N_1 se traça uma paralela à base da tremonha, determinando sobre a geratriz f_2f_3 o ponto de intersec-

ção f_4 que se une com os pontos e_4, d_4, c_4, b_4 e a_4 por meio de uma curva contínua, ficando assim representado um quadrante da linha de intersecção que cobre o outro quadrante da parte oposta.

O quadrante da linha de intersecção da parte direita que também cobre o outro quadrante da parte posterior é determinado da mesma maneira.

Desenvolvimento lateral do cilindro (fig. 3). Traça-se uma reta $a'a'$ de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do cilindro ($\pi \times D_m^2$), sobre as quais transportam-se as distâncias $a'b', b'c', c'd'$, etc., iguais aos respectivos comprimentos dos arcos ab, bc, cd , da circunferência média do cilindro (fig. 1).

Desde os pontos a', b', c' , (fig. 3) traçam-se perpendiculares à reta $a'a'$ de comprimentos iguais às respectivas geratrizes a_2a_4, b_2b_4, c_2c_4 , etc. da figura 2, determinando assim os pontos a'_4, b'_4, c'_4 , etc. que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento.

Desenvolvimento de meia tremonha (fig. 4). Traça-se um arco de centro W'_1 e de raio igual à distância W_1P_1 da figura 2. A este arco transportam-se os comprimentos dos arcos c_1d_1, d_1e_1 e e_1f_1 da figura 1, determinando assim os pontos c'_1, d'_1, e'_1, f'_1 , e d'_1, c'_1 , os quais se unem com o ponto W'_1 por meio de retas geratrizes.

Sobre as geratrizes $W'_1c'_1$ transporta-se a distância W_1V_2 da figura 2 (V_2 é a projeção de V_1), determinando os pontos V'_2 e V'_3 , onde se traça um arco que parta dos pontos c'_1 transportando sobre tal arco os comprimentos $c'_1b'_1$ e $b'_1a'_1$, iguais aos comprimentos dos arcos c_1b_1, b_1a_1 da figura 1. Os pontos b'_1 e a'_1 se unem com os respectivos pontos V'_2 e V'_3 por meio de retas geratrizes.

Depois projetam-se paralelamente à base da tremonha (fig. 2) os pontos a_4, b_4, c_4, d_4, e_4 e f_4 , determinando sobre a reta W_1P_1 os pontos de intersecção a_5, b_5, c_5 , etc.

As distâncias V_2a_5, V_2b_5 e V_2c_5 (fig. 2) são transportadas sobre as geratrizes desenvolvidas da mesma origem (fig. 4), determinando assim os pontos a'_4, b'_4 e c'_4 (em ambas as partes).

Também se transportam sobre as geratrizes $W'_1d'_1, W'_1e'_1$, etc. do desenvolvimento das respectivas distâncias, W_1d_5, W_1e_5 , etc. da figura 2, determinando os pontos d'_4, e'_4 , etc. que são unidos com os demais pontos por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvida meia tremonha; a outra metade, que neste caso foi desenhada por linhas imaginárias, traça-se da mesma maneira.

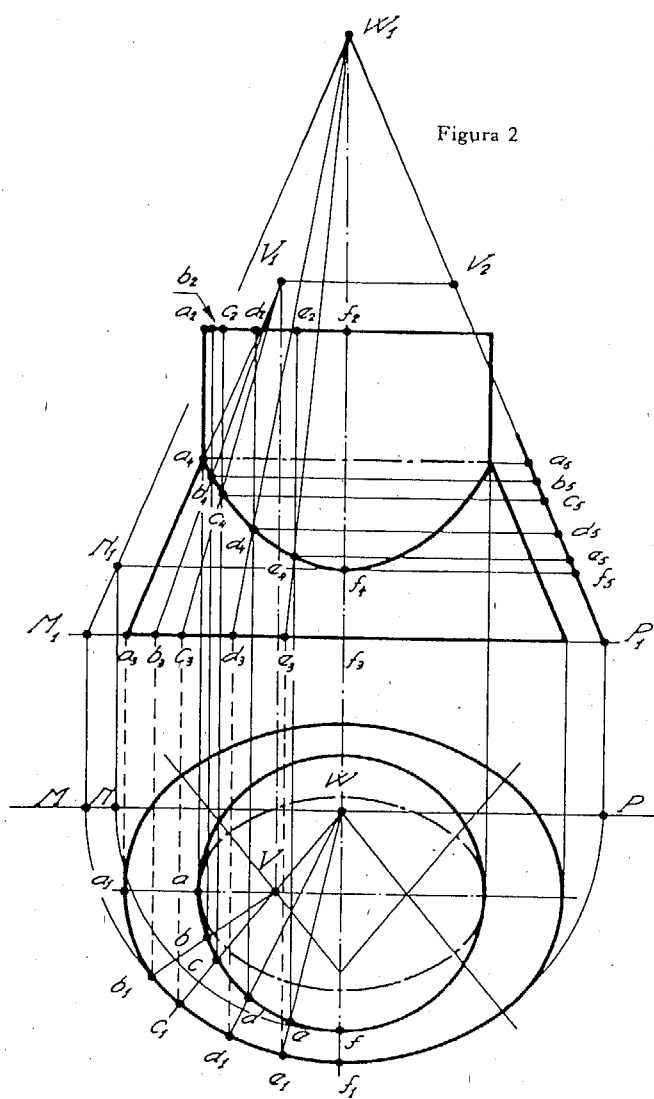
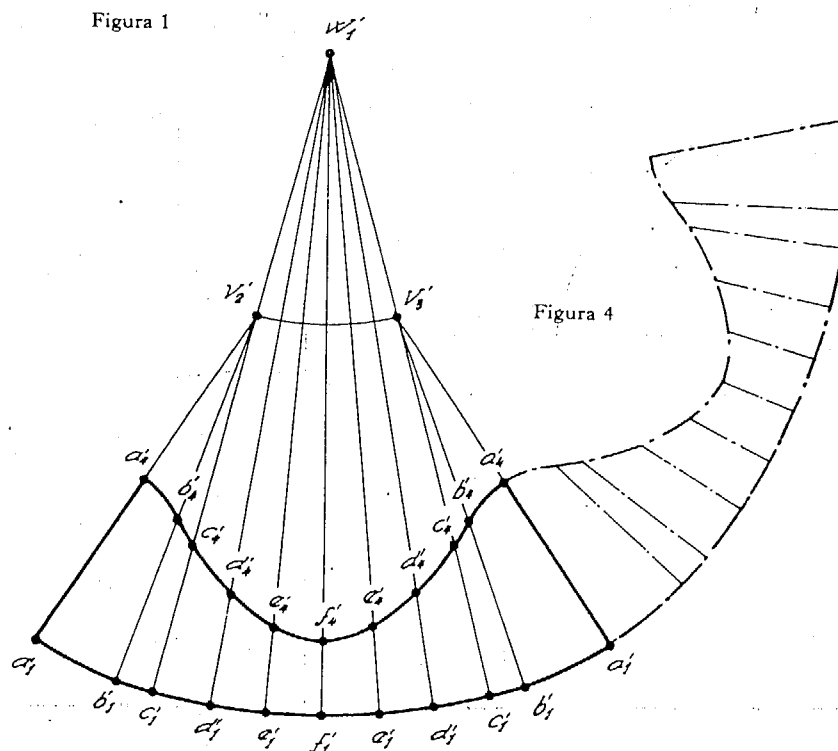
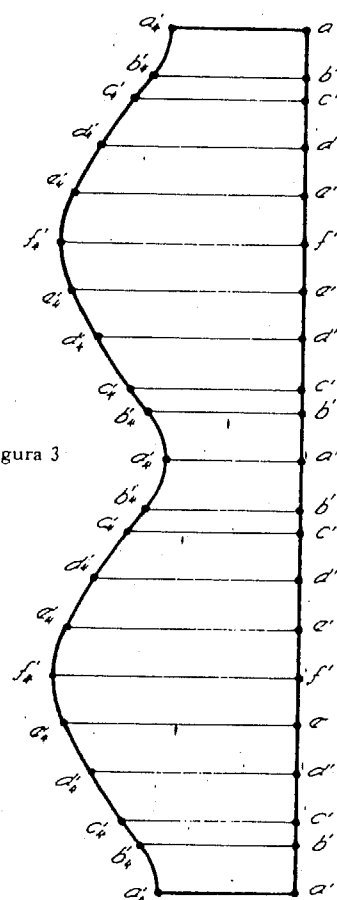


Figura 1



UNIÃO DE CILINDROS COM CONES

EXERCÍCIO

29

Para que um cilindro possa ser unido em um cone é necessário que a circunferência traçada desde o ponto O de intersecção de ambos os eixos seja tangente às geratrizes extremas do mesmo cilindro e cone (fig. 1), sendo sua curva de intersecção uma elipse que, na representação, é determinada pela reta que une os pontos de intersecção das geratrizes extremas.

Na figura 2 representou-se um cilindro unido em um cone pela base do mesmo, sendo ambos representados por seus diâmetros médios.

Traçado das geratrizes do cone (fig. 2). Sobre a base do cone se descreve uma semicircunferência e se divide em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo).

Desde os pontos de divisão a, b , etc. traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando os pontos de intersecção a_1, b_1 , etc. que se unem com

o vértice V por meio de retas geratrizes que cortam a linha de intersecção nos pontos a_2, b_2 , etc., onde são traçadas perpendiculares ao eixo do cone, cortando a geratriz extrema em a_3, b_3 , etc.

Desenvolvimento do cone (fig. 3). Com um raio igual à geratriz extrema e ao centro V' , descreve-se um arco igual ao desenvolvimento da circunferência média da base e, neste caso, divide-se em oito partes iguais. Unem-se os pontos de divisão a'_1, b'_1 , etc., com o ponto V' por meio de retas geratrizes dando-lhes as distâncias $V'a'_2, V'b'_2$, etc., iguais às respectivas distâncias Va_3, Vb_3 , etc. da figura 2, unindo os pontos a'_2, b'_2 , etc. por meio de uma curva contínua. Tomando como centro V' , descreve-se um arco $P'P'$ de raio igual à distância VP da figura 2, ficando assim desenvolvido o cone.

Desenvolvimento do cilindro. O desenvolvimento deste cilindro pode ser feito da mesma forma como se explicou no exercício 3. Na figura 4 desenvolveu-se o cilindro por outro procedimento que não se explica já que na ilustração pode-se ver claramente o método que deverá ser seguido.

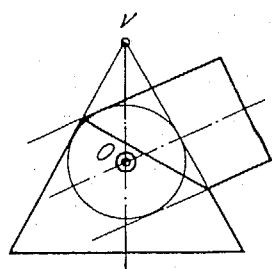


Figura 1

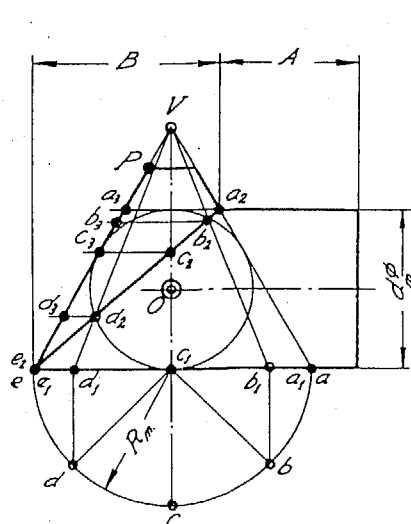


Figura 2

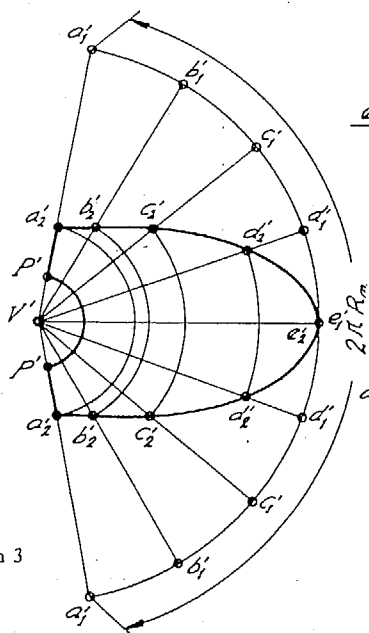


Figura 3

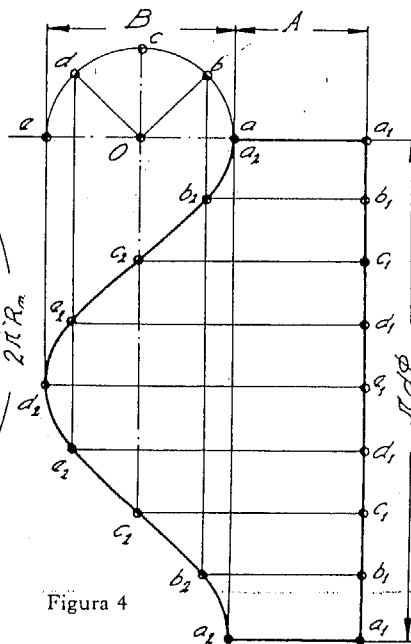


Figura 4

União de dois cilindros em um cone

Representação (fig. 1). Conhecendo os diâmetros médios das virolas cilíndricas e os pontos O e P , descrevem-se desde estes pontos circunferências cujos diâmetros são iguais aos respectivos diâmetros médios das virolas cilíndricas. Tangentemente a estas circunferências, representa-se a virola cônica, sendo as linhas de intersecção as retas que unem os pontos de intersecção das geratrizes extremas de ambas as virolas.

Na figura 2 se representa a virola cilíndrica de diâmetro menor e o seu desenvolvimento traçado de forma análoga à do exercício 3.

Traçado das geratrizes do cone (fig. 1). Em uma posição qualquer se traça uma perpendicular a eixo do cone e se descreve uma semicircunferência sobre esta, de diâmetro D_m^ϕ . A semicircunferência é dividida em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b , etc., traçam-se perpendiculares à perpendicular anterior, cortando-a nos pontos a_1, b_1 , etc.

Prolongam-se as geratrizes extremas do cone, determinando assim o vértice V , desde o qual se traçam retas geratrizes que passam pelos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., determinando sobre as respectivas linhas de intersecção os pontos de intersecção a_2, b_2, c_2 , etc. e a_3, b_3, c_3 , etc.

Desenvolvimento lateral do cone (fig. 3). Tomando como centro V' , descreve-se um arco que parta de a_1 , dando-se ao mesmo o comprimento $\pi \times D_m^\phi$ que se divide em oito partes iguais neste caso. Desde o ponto V' traçam-se retas geratrizes que passam pelos pontos de divisão a'_1, b'_1, c'_1 , etc., e desde os pontos a_2, b_2, c_2 , etc. e a_3, b_3, c_3 , etc., (fig. 1) traçam-se perpendiculares ao eixo do cone, determinando sobre a geratriz extrema novos pontos que giram em redor do ponto V' , determinando sobre as geratrizes da mesma origem (fig. 3) os pontos de intersecção a'_2, b'_2, c'_2 , etc. e a'_3, b'_3, c'_3 , etc. que se unem por duas respectivas curvas contínuas que limitam o desenvolvimento.

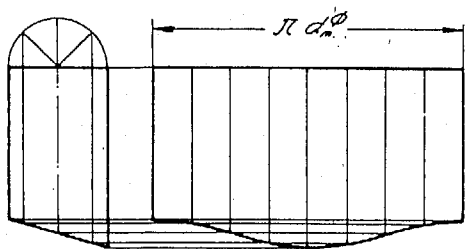


Figura 2

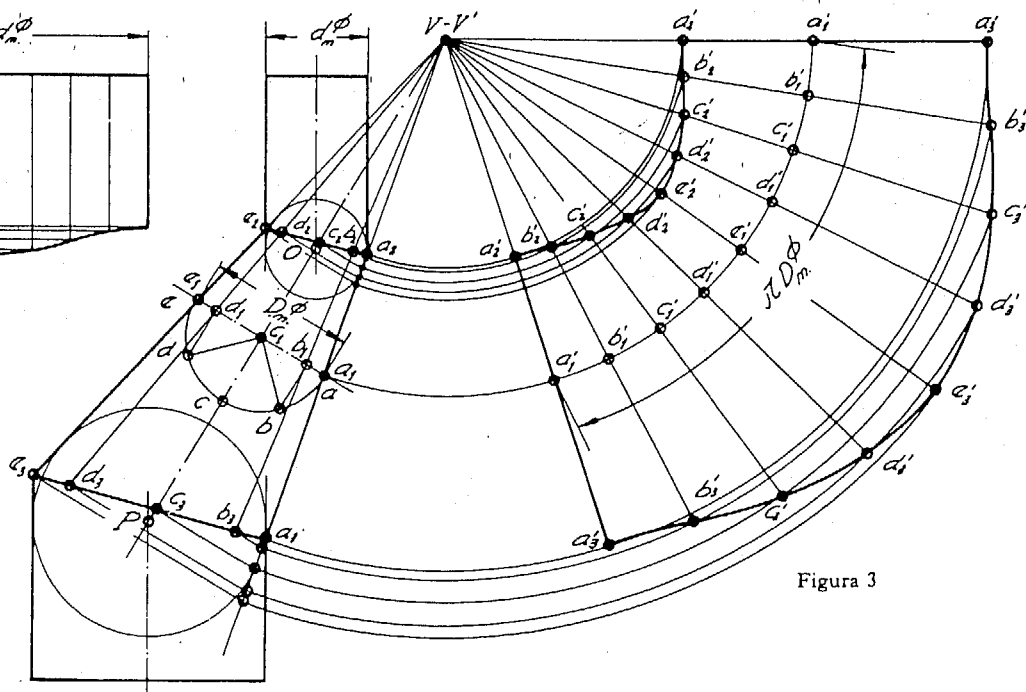


Figura 1

Figura 3

União de um cone em duas virolas cilíndricas simétricas

Representação (fig. 1). No ponto de intersecção O dos eixos das virolas cilíndricas, descreve-se uma circunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio das virolas e se traça tangente a esta circunferência a representação da virola cônica.

As linhas de intersecção são determinadas unindo os respectivos pontos de intersecção NQ , a_2 , S' e a_3 - S das geratrizes extremas das virolas cilíndricas e cônica, tal como se vê na representação.

Traçado das geratrizes do cone (fig. 1). Sobre o diâmetro médio da base do cone, descreve-se uma semicircunferência que é dividida em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e, desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, cortando-o nos pontos a_1 , b_1 , etc. que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes que determinam sobre a linha de intersecção os pontos a_2 , b_2 , etc. Para o lado direito destes pontos traçam-se, desde os mesmos, perpendiculares ao eixo do cone, determinando sobre a geratriz extrema os pontos de intersecção a_3 , b_3 , etc.

Desenvolvimento lateral do cone (fig. 2). Primeiro se traça o desenvolvimento inteiro do cone, tal como fizemos em casos anteriores, e depois se divide em oito partes iguais, neste caso, transportando sobre suas correspondentes geratrizes Va_1 , Vb_1 , etc. as distâncias Va_3 , Vb_3 , etc. da figura 1, determi-

nando os pontos a'_2 , b'_2 , etc., que são unidos ordenadamente por meio de uma curva contínua.

Traçado das geratrizes de um dos cilindros. Representa-se qualquer um dos dois cilindros, tal como se ilustra na figura 3, e se descreve uma semicircunferência sobre seu diâmetro médio, dividindo-a em um número adequado de partes iguais. Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se paralelas ao eixo do cilindro, determinando sobre a linha de intersecção os pontos a_2 , b_2 , etc. O ponto M se projeta paralelamente ao eixo, cortando o diâmetro em M_1 e a semicircunferência em M_2 .

Desenvolvimento do cilindro (fig. 4). Traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do cilindro que se divide em oito partes iguais. Desde os pontos de divisão a'_1 , b'_1 , etc., traçam-se perpendiculares à reta de comprimentos a'_1 , a'_2 , b'_1 , b'_2 , etc., iguais aos comprimentos das geratrizes da mesma origem da figura 3. Sobre a reta, transporta-se a distância $b'_1M'_1$ igual ao comprimento do arco bM_2 da figura 3. Desde o ponto M'_1 se traça uma perpendicular à reta, dando-lhe o comprimento M'_1M' igual à da geratriz M_1M da figura 3.

Unem-se todos os pontos a'_2 , b'_2 , M' , etc. por meio de uma curva contínua, determinando-se assim o desenvolvimento do cilindro que serve como gabarito para marcar o outro.

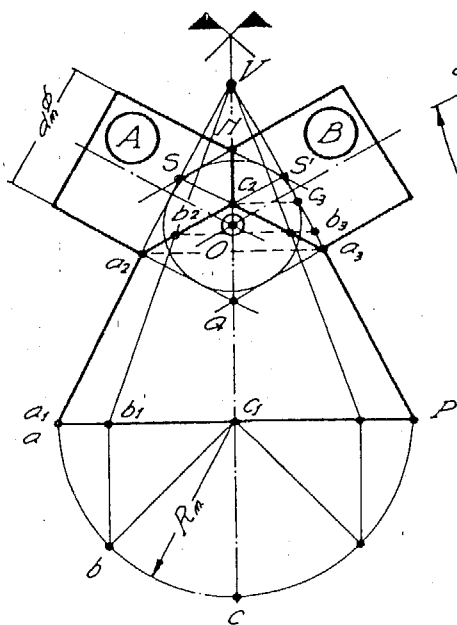


Figura 1

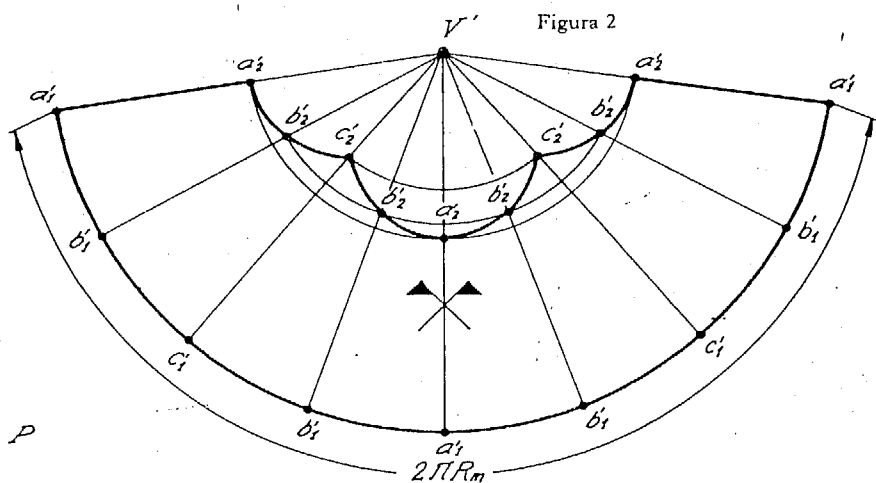


Figura 2

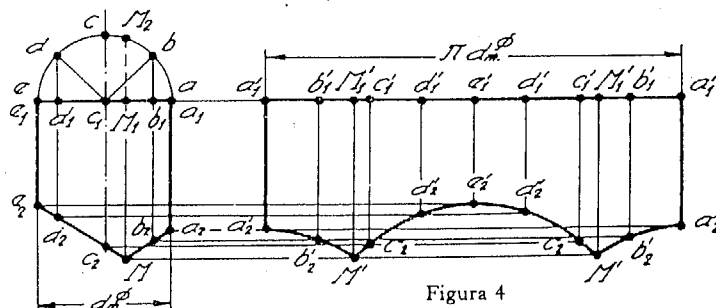


Figura 3

Figura 4

União de um cone em duas virolas cilíndricas assimétricas

A representação da figura 1 e o desenvolvimento das virolas cilíndricas (figs. 4 e 5) são feitos como no caso anterior.

Traçado das geratrizes do cone. Desenha-se o cone da figura 2 com as mesmas características que o da figura 1 e sobre seu diâmetro médio, descreve-se uma semicircunferência, dividindo-a depois em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, cortando-o nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com o vértice V_1 por meio de retas geratrizes que cortam a linha de intersecção nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. Desde V_1 se traça uma geratriz que passe pelo ponto M , cortando o diâmetro em M_1 . Neste ponto se traça uma perpendicular ao diâmetro, deter-

minando sobre a semicircunferência o ponto de intersecção M_2 .

Desde os pontos a_2, b_2, M , etc., traçam-se perpendiculares ao eixo, determinando sobre a geratriz extrema os pontos de intersecção a_3, b_3 , etc.

Desenvolvimento lateral do cone (fig. 3). Traça-se o desenvolvimento do cone, tal como foi feito em casos anteriores, e se divide em oito partes iguais, tendo sobre as geratrizes V_1a_1, V_1b_1 , etc. as distâncias da mesma origem V_1a_3, V_1b_3 , etc. da figura 2, determinando assim os pontos a'_2, b'_2 , etc. A partir do ponto c'_1 , transporta-se a distância $c'_1M'_1$ igual ao comprimento do arco cM_2 da figura 2 e se unem os pontos M'_1 e V'_1 , transportando sobre esta reta a distância $V'_1M'_1$ igual à distância V_1M_3 da figura 2.

Os pontos a'_2, b'_2, M', c'_2 , etc. são unidos por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento.

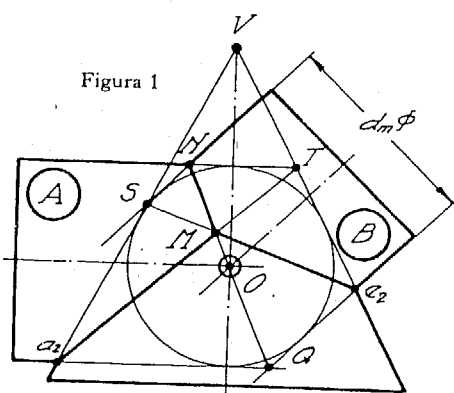


Figura 1

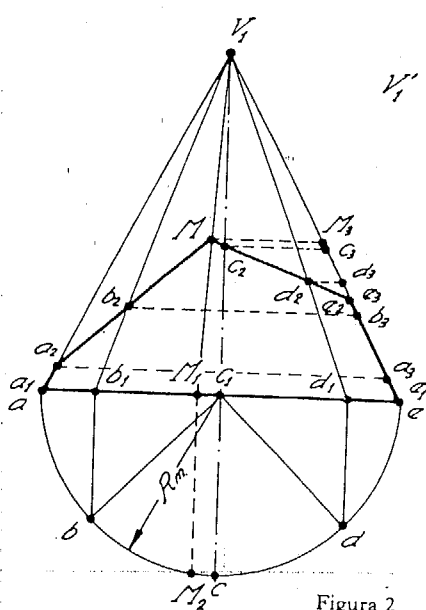


Figura 2

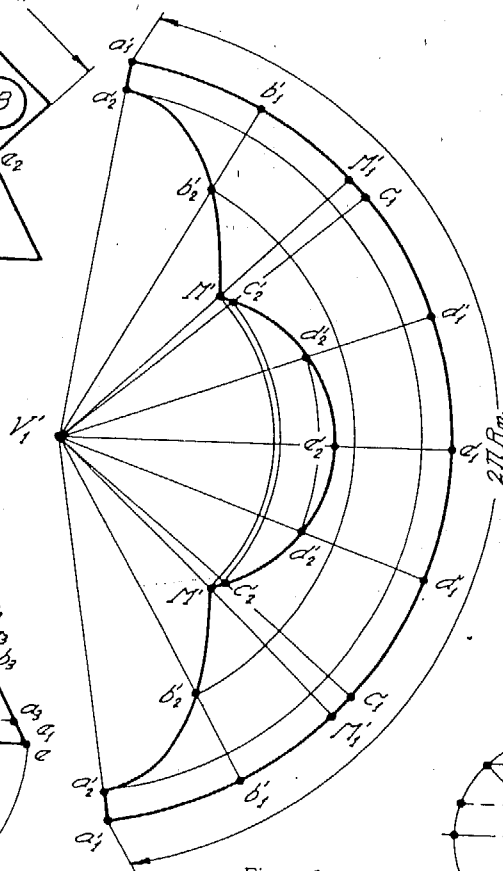


Figura 3

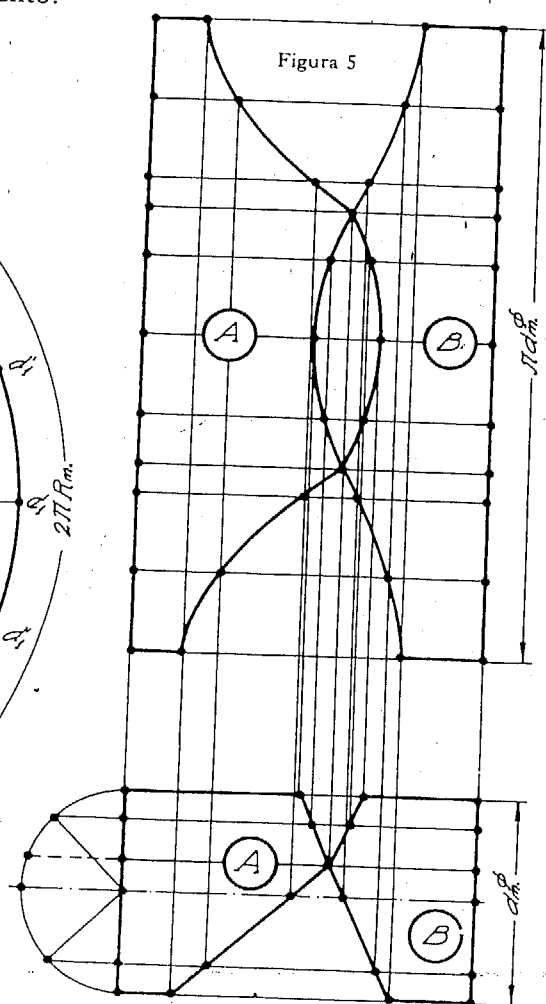


Figura 4

Figura 5

Calça simétrica formada por três virolas cilíndricas e duas cônicas

Na figura 1 são representadas três tubulações que precisam ser ligadas por meio de uma peça-calça formada por duas virolas cilíndricas de igual raio, outra de maior diâmetro e por duas virolas cônicas iguais, sendo os pontos O e O_1 os pontos de intersecção dos eixos dessas virolas.

Representação (fig. 2). Tomando como centro os pontos de intersecção O e O_1 dos eixos das virolas que compõem a calça, descrevem-se circunferências de diâmetros, respectivamente, iguais aos das virolas cilíndricas e se traçam as virolas cônicas tangentemente a estas circunferências.

Depois se unem os pontos de intersecção das geratrizes extremas das virolas de ligação, tal como mostra a ilustração, ficando assim representada a calça em questão.

O desenvolvimento lateral das virolas cilíndricas é feito da mesma maneira como explica o exercício 3.

Traçado das geratrizes do cone. Representa-se uma das virolas cônicas de união da figura 2, tal como se vê na figura 3 (neste caso representou-se a virola da parte esquerda).

Sobre o diâmetro médio imaginário da base descreve-se uma semicircunferência que é dividida em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e, desde os pontos de divisão a , b , c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro imaginário, determinando sobre o mesmo os pontos de intersecção a_1 , b_1 , c_1 , etc. que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes que cortam as respectivas linhas de intersecção nos pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc. e a_3 , b_3 , c_3 , etc.

Desde estes pontos traçam-se perpendiculares

ao eixo do cone, determinando sobre a geratriz externa os pontos de intersecção a_4 , b_4 , c_4 , etc. e a_5 , b_5 , c_5 , etc., respectivamente.

Desde V traça-se uma reta geratriz que passa pelo ponto M , determinando sobre o diâmetro imaginário o ponto de intersecção M_1 , onde se traça uma perpendicular ao mesmo, cortando a semicircunferência no ponto M_2 . O ponto M é projetado perpendicularmente ao eixo do cone, determinando sobre a geratriz externa o ponto de intersecção M_3 .

Desenvolvimento lateral da virola cônica (fig. 4). Tomando como centro o ponto V' , descreve-se um arco de raio igual ao comprimento da geratriz V_e da figura 3, dando-se a este arco um comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média da base imaginária ($= 2\pi \times R_m$). Este arco é dividido em oito partes iguais neste caso e unem-se os pontos de divisão a'_1 , b'_1 , c'_1 , etc. com o ponto V' por meio de retas geratrizes, transportando sobre estas as respectivas distâncias Va_4 , Vb_4 , etc. e Va_5 , Vb_5 , etc. da figura 3, determinando assim os pontos a'_2 , b'_2 , etc. e a'_3 , b'_3 , etc., respectivamente.

Sobre o arco desenvolvido da base traça-se o comprimento $c'_1M'_1$ (medido em arco) igual ao comprimento do arco cM_2 da figura 3, e une-se o ponto M'_1 com o ponto V' por meio de uma reta geratriz, dando a esta o comprimento $V'M'_1$ igual à distância VM_3 da figura 3.

Os respectivos pontos a'_2 , b'_2 , M'_1 , c'_2 , etc. e a'_3 , b'_3 , c'_3 , etc. são unidos por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvida uma das virolas cônicas que ao mesmo tempo serve de gabarito para marcar a outra.

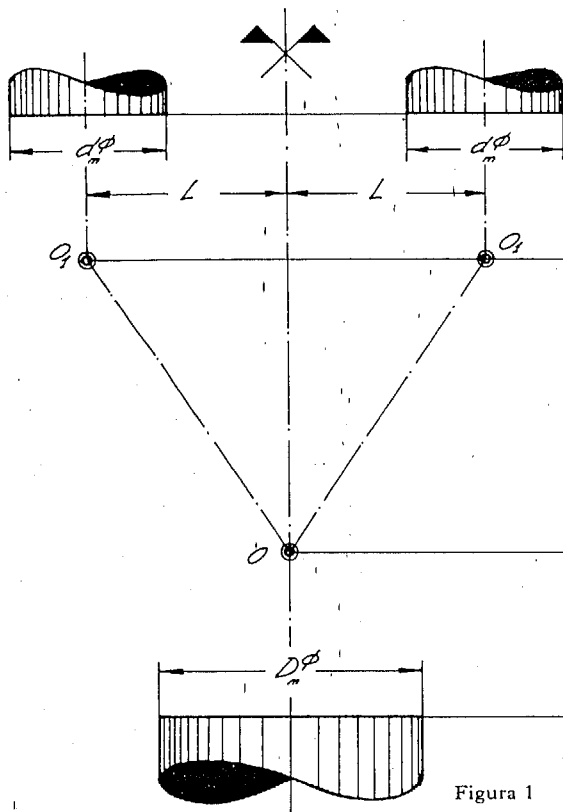


Figura 1

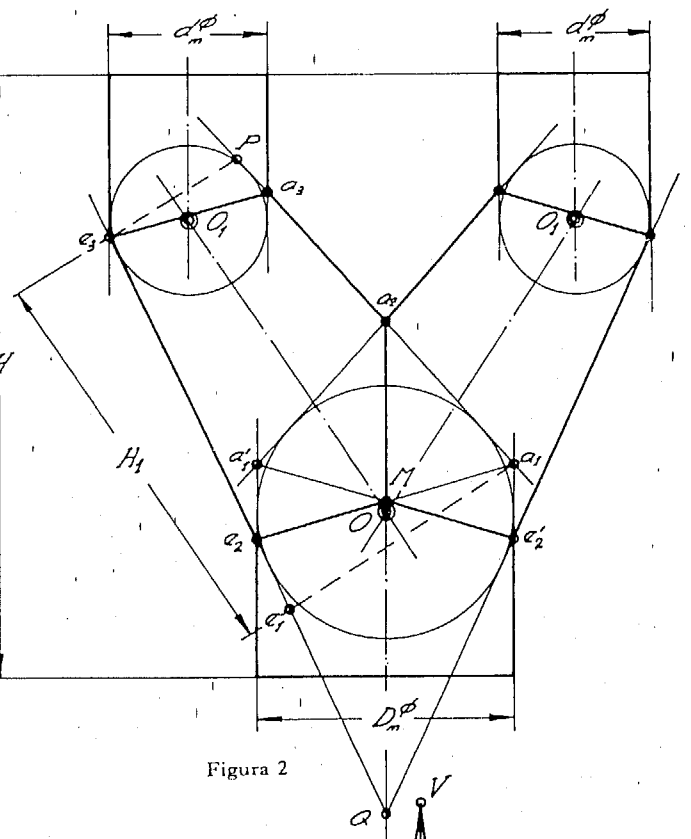


Figura 2

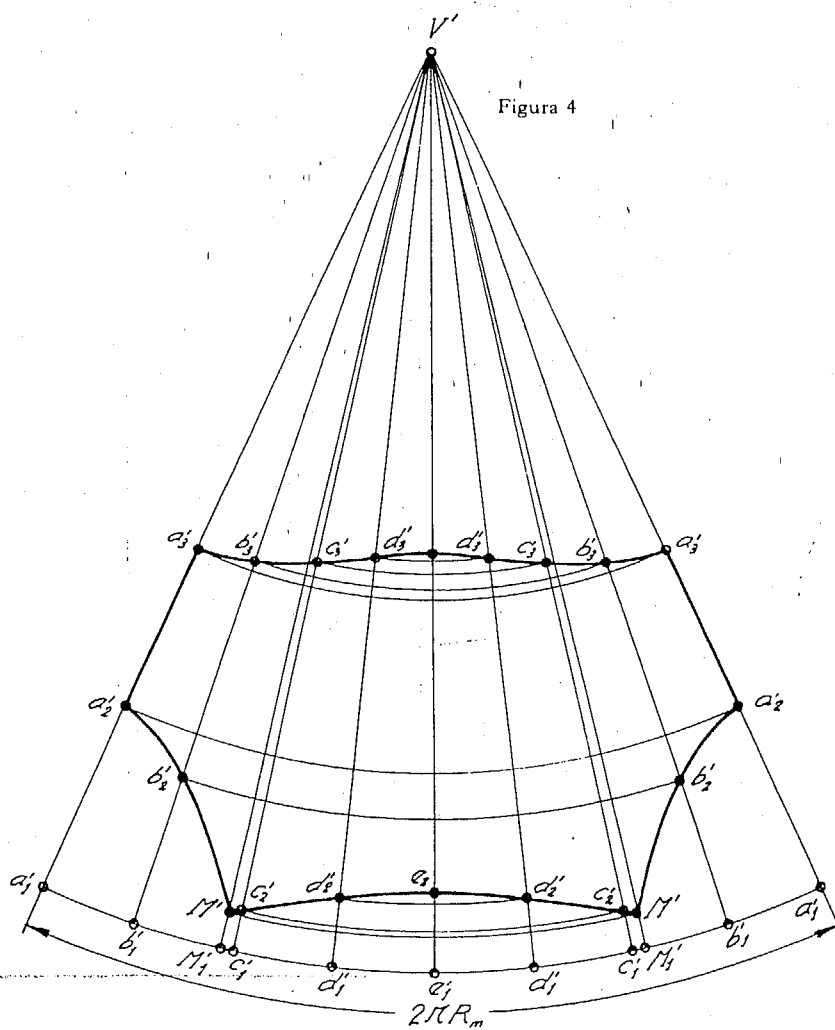


Figura 4

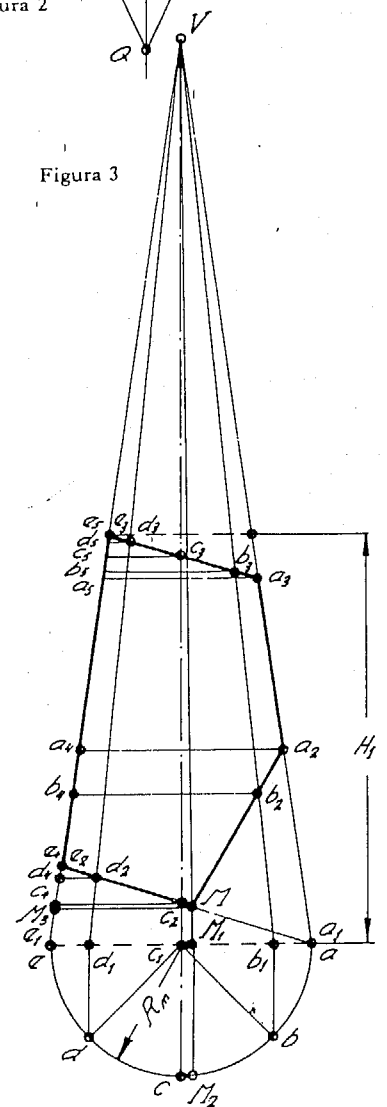


Figura 3

Calça assimétrica formada por virolas cônicas e cilíndricas ligadas entre si

A figura 1 representa as posições das tubulações que precisam ser unidas por meio da calça de que se trata aqui. Os pontos O , O_1 e O_2 são os pontos de intersecção dos eixos das virolas que compõem a dita calça.

Representação da calça (fig. 2). Com os dados da figura 1 pode-se representar as virolas cilíndricas e os eixos das virolas cônicas. Tomando como centro os pontos de intersecção O , O_1 e O_2 dos eixos das virolas, descrevem-se circunferências de diâmetros respectivos, iguais aos diâmetros médios das virolas cilíndricas. A representação das virolas cônicas, que são tangentes às circunferências, de-

terminam por intersecção com as geratrizes dos cilindros os respectivos pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 que se unem por meio de retas, tal como se vê na ilustração, determinando assim as linhas de intersecção.

O desenvolvimento das virolas que compõem esta calça é determinado da mesma maneira que o do caso anterior.

Nota. Qualquer tipo de calça, composta de virolas cilíndricas e cônicas ligadas entre si, desenvolve-se de forma análoga à dos casos estudados anteriormente.

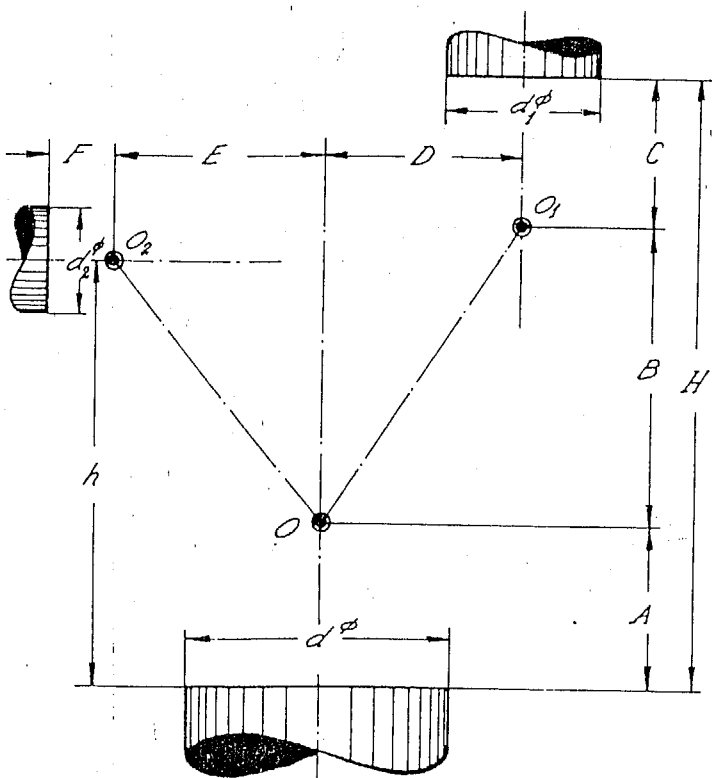


Figura 1

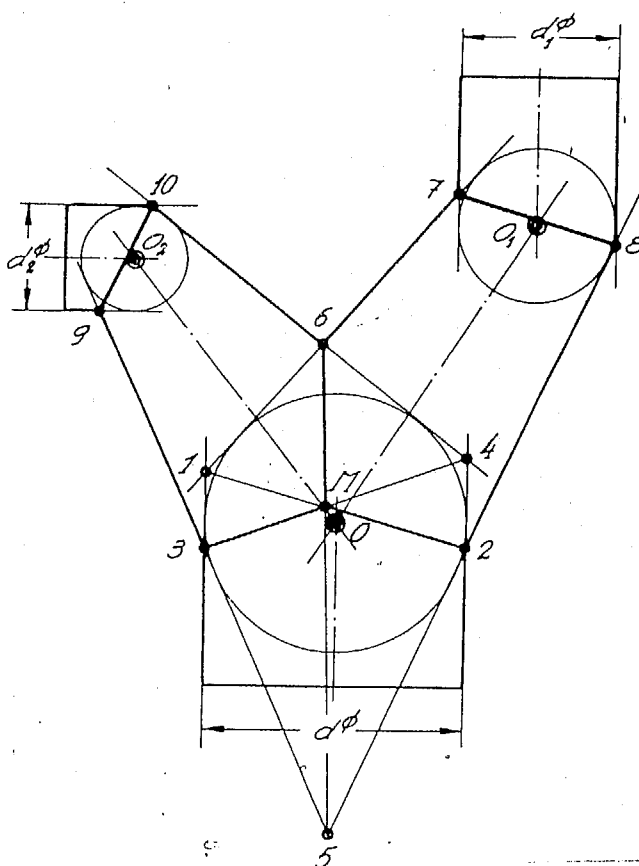


Figura 2

União de duas virolas cônicas

A figura 1 representa os terminais de duas tubulações cilíndricas de diferentes diâmetros (D_m^{ϕ} e d_m^{ϕ}) que devem ser unidos por meio de duas virolas cônicas ligadas entre si.

Representação das virolas cônicas (fig. 1). Tomando como centro o ponto O , descreve-se um arco que parta do ponto P , determinando sobre o prolongamento do eixo da virola de diâmetro D_m^{ϕ} o ponto P_1 , onde se traça uma perpendicular ao eixo em ambas as partes; sobre esta se marca o diâmetro d_m^{ϕ} da virola cilíndrica de menor diâmetro, determinando assim os pontos $3'$ e $4'$. Pelos respectivos pontos $1, 4'$ e $6, 3'$ se traçam retas que converjam para o ponto V que, girando em redor do ponto O , determina sobre o eixo da virola cilíndrica de diâmetro d_m^{ϕ} o ponto de intersecção V_1 . Tomando como centro O , descreve-se uma circunferência tangente às geratrizes V_1 e V_6 . Desde os pontos 3 e 4 traçam-se tangentes a esta circunferência, cortando as geratrizes nos pontos 2 e 5 que se unem por meio de uma reta que, neste caso, é a linha de intersecção das virolas cônicas, determinando assim a representação destas.

Traçado das geratrizes (fig. 2). Representam-se as virolas cônicas tal como se ilustra na figura 2 e sobre seu diâmetro médio da base se descreve uma

semicircunferência dividida em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde estes pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando os pontos de intersecção a, b, c , etc., que se unem com o vértice V_2 por meio de retas geratrizes que cortam a linha de intersecção nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc. e desde estes pontos, traçam-se perpendiculares ao eixo das virolas, determinando sobre a geratriz extrema os pontos de intersecção a_2, b_2, c_2 , etc.

Desenvolvimento lateral (fig. 3). Tomando como centro V_2 , descreve-se um arco de raio V_2a' igual à geratriz V_2a da figura 2, dando a este arco um comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média da base do cone ($D_m^{\phi} \times 3,1416$) e se divide este arco em oito partes iguais, determinando assim os pontos de divisão a', b', c' , etc., que se unem com o vértice V_2 por meio de retas geratrizes dando a estas as distâncias V_2a_2, V_2b_2 , etc. da figura 2, determinando os pontos a'_1, b'_1 , etc., que se ligam por meio de uma curva contínua.

Tomando como centro o ponto V_2' , descreve-se o arco $3''$, $3'''$ de raio igual à distância V_23' da figura 2, determinando assim o desenvolvimento lateral das duas virolas cônicas.

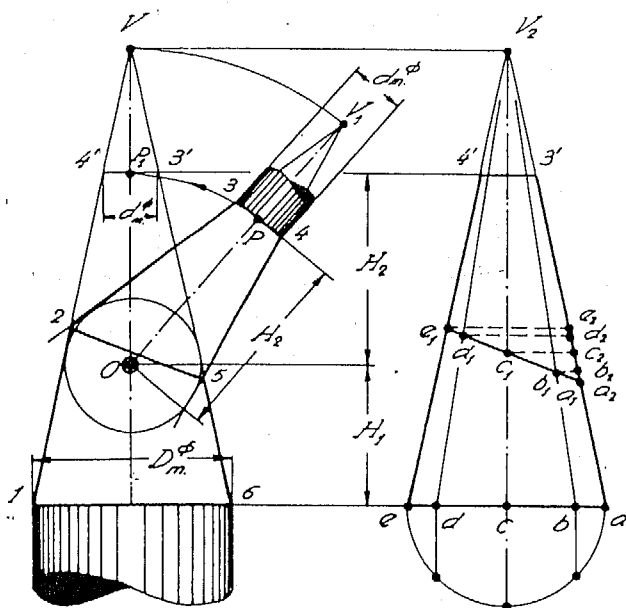


Figura 1

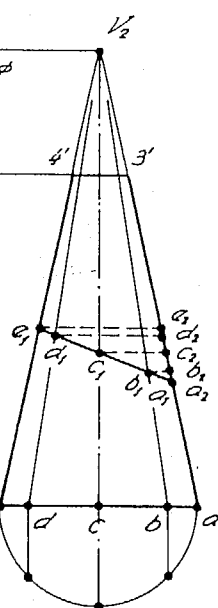


Figura 2

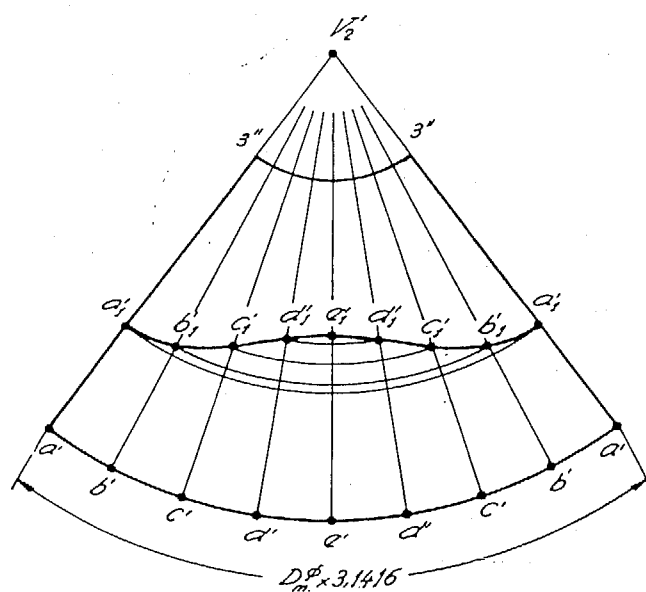


Figura 3

Cotovelo formado por várias virolas cônicas unidas

A figura 1 dá uma representação das posições dos eixos das virolas cônicas que compõem o cotovelo que serve para unir a virola de diâmetro d_m^o com a virola de diâmetro D_m^o .

Representação do cotovelo. Tomando os dados necessários da figura 1, representam-se os eixos do cotovelo com seus diâmetros d_m^o e D_m^o , tal como se vê na figura 2. Depois se marca uma vertical (fig. 3) e se traçam as distâncias H_1, H_2, H_3 e H_4 tomadas da figura 2, determinando os pontos O_1, O_2 e O_3 . Nas extremidades desta vertical traçam-se horizontais em ambas as partes da mesma e de comprimentos iguais aos respectivos diâmetros do cotovelo D_m^o e d_m^o . Pelas extremidades destas horizontais traçam-se retas que converjam para o ponto V , ficando assim determinado um tronco de cone, equivalente a todas as virolas cônicas que compõem o cotovelo em questão.

Marcando o centro nos respectivos pontos O_1, O_2 e O_3 , (fig. 3), descrevem-se circunferências tangentes às geratrizes extremas do tronco de cone, determinando assim os raios R_1, R_2 e R_3 .

Em seguida, marcando o centro nos pontos O_1, O_2 e O_3 (fig. 2), descrevem-se circunferências com os respectivos raios R_1, R_2 e R_3 , tomadas da figura 3 e tangentemente a estas circunferências, traçam-se as virolas cônicas de ligação. As linhas de intersecção destas virolas são determinadas unindo por meio de retas os pontos de intersecção das geratrizes extremas correspondentes, sendo estes os respectivos pontos 2-9, 3-8 e 4-7, ficando desta maneira representado o cotovelo.

Traçado das geratrizes (fig. 4). Desenharam-se as virolas cônicas que compõem o cotovelo, uma sobre a outra, tal como se vê na ilustração, ou seja, as virolas segunda e quarta (começando a contar pela virola de maior diâmetro) devem ser giradas 180° com respeito à posição que adotam na figura 2, ficando representada desta maneira todas as virolas cônicas, determinando um tronco de cone das mesmas características que o da figura 3.

Em seguida descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da base e se divide em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão, traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando os pontos de intersecção a, b , etc., que se unem com o vértice V_1 (este vértice é determinado prolongando as geratrizes extremas do tronco de cone) por meio de retas geratrizes que cortam as linhas de intersecção nos pontos a_1, b_1 , etc., a_2, b_2 , etc. e a_3, b_3 , etc., respectivamente, ficando assim representadas as geratrizes necessárias para desenvolver as virolas, de tal maneira que as soldaduras fiquem opostas.

Desenvolvimento lateral (fig. 5). Primeiramente desenvolve-se o tronco de cone que compõe as virolas e se divide seu arco maior em oito partes iguais neste caso, determinando os pontos de divisão a', b', c' , etc., que se unem com o vértice V_1 por meio de retas geratrizes.

Depois se traçam perpendiculares ao eixo do cone (fig. 4) desde os pontos a_1, b_1, c_1 , etc., a_2, b_2, c_2 , etc. e a_3, b_3, c_3 , etc., determinando novos pontos sobre a geratriz extrema.

Tomando como centro V_1 , descrevem-se arcos de raios iguais às distâncias existentes entre o vértice V_1 e os pontos anteriores da figura 4, determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos de intersecção a'_1, b'_1 , etc., a'_2, b'_2 , etc. e a'_3, b'_3 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas que limitam o desenvolvimento das virolas cônicas.

Nota. Da mesma maneira que se representou e se desenvolveu este cone pode-se representar e desenvolver qualquer peça que seja composta por várias virolas cônicas. As virolas extremas deste cotovelo também poderiam ser representadas por meio de virolas cilíndricas e as centrais, por virolas cônicas.



PRISMAS E PIRÂMIDES

EXERCÍCIO

37

Prisma reto, seccionado obliquamente

Para desenvolver o prisma em questão, pode-se representá-lo por sua fibra interna nas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2). Como se pode observar na projeção vertical, as arestas b_1b_2 e c_1c_2 são vistas pontilhadas por serem ocultas, já que a superfície aparente do prisma cobre este mesmo prisma.

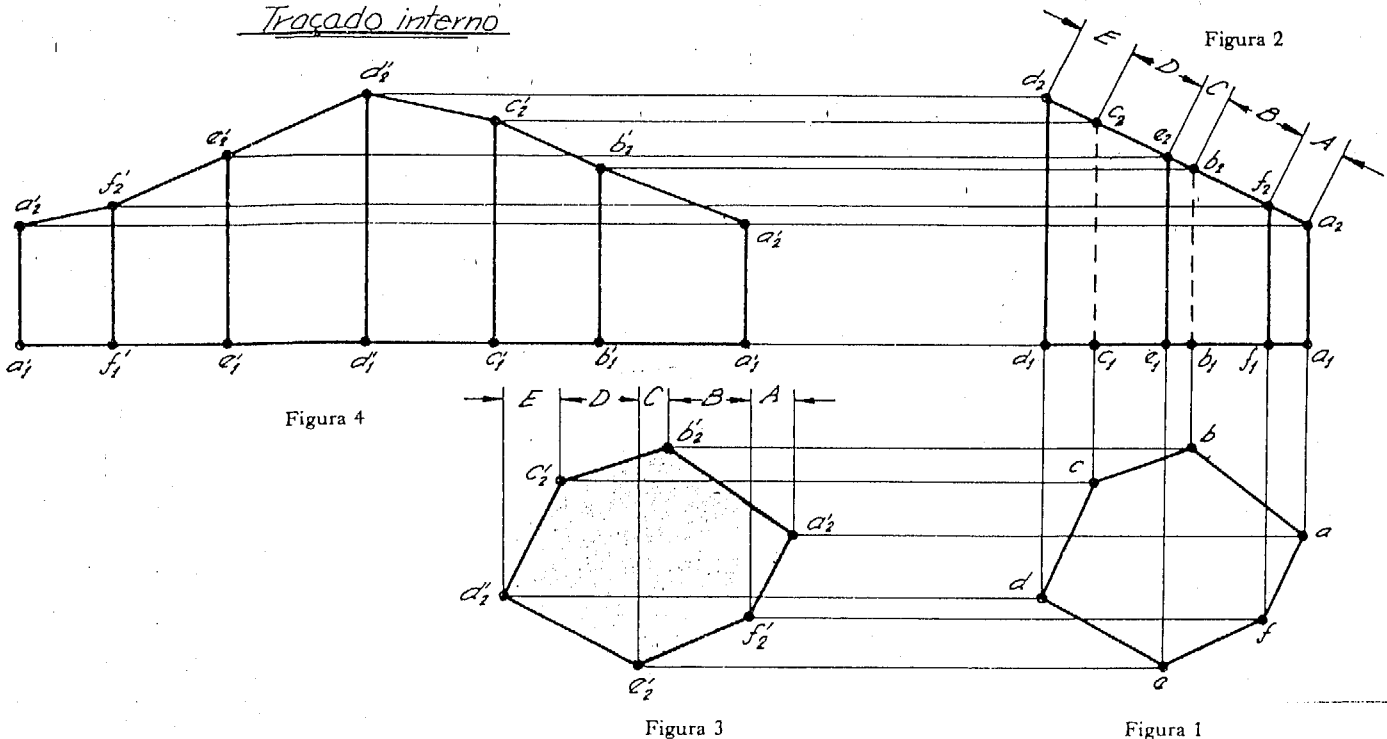
Traçado da seção oblíqua. À esquerda dos pontos a, b, c , etc. (fig. 1) traçam-se horizontais partindo desses pontos, transportando sobre as horizontais as distâncias A, B, C , etc. da figura 2, determinando assim os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc., que se unem por meio de retas, tal como se vê na ilustração, ficando assim traçada a seção oblíqua do prisma (esta seção está sombreada).

Desenvolvimento lateral do prisma. Traça-se uma reta (fig. 4) em uma posição adequada (neste caso é o prolongamento da base do prisma) e mar-

cam-se as distâncias $a'_1b'_1, b'_1c'_1, c'_1d'_1$, etc., iguais às medidas internas ab, bc, cd , etc. da base do prisma (fig. 1).

Nos pontos a'_1, b'_1, c'_1 , etc., traçam-se perpendiculares à reta anterior e nelas se transportam as respectivas distâncias a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 , etc. da figura 2, determinando assim os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc., que uniremos entre si por meio de retas, ficando assim desenvolvido o prisma [as arestas a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 , etc. (fig. 2), estão em verdadeira grandeza por serem retas de pontas perpendiculares ao plano horizontal de projeção].

Nota. O desenvolvimento dobra-se pelas arestas desenvolvidas $b'_1b'_2, c'_1c'_2, d'_1d'_2$, etc., segundo os graus formados pelos correspondentes lados da base da figura 1. No caso de não poder dobrar o desenvolvimento completo, este é dividido em duas partes pela aresta que mais interessar.

Traçado interno

Prisma oblíquo de bocas paralelas

As arestas deste prisma em projeção vertical são formadas por retas frontais e paralelas entre si e, portanto, são representadas nesta projeção em suas verdadeiras grandezas (representa-se o prisma por sua fibra interna em suas duas projeções).

Seção transversal. Secciona-se o prisma por meio de um plano projetante vertical perpendicular às arestas do prisma [este plano projetante vertical é representado por suas linhas horizontal P (fig. 1) e vertical P_1' (fig. 2)].

O plano projetante $P-P_1'$ é rebatido em redor de sua linha horizontal P , determinando assim a seção transversal a_5, b_5, c_5 e d_5 que foi sombreada.

Desenvolvimento lateral do prisma. Traça-se

uma horizontal (fig. 3) e marcam-se as distâncias $a'_4b'_4, b'_4c'_4, c'_4d'_4$ e $d'_4a'_4$, iguais às grandezas internas dos lados a_5b_5, b_5c_5, c_5d_5 e d_5a_5 da seção transversal (fig. 1).

Em ambas as partes dos pontos a'_4, b'_4, c'_4 , etc., traçam-se perpendiculares à horizontal anterior, às quais são transportadas as respectivas distâncias A, B, C , etc. e E, F, G , etc., iguais às distâncias da mesma origem da figura 2, determinando desta maneira os pontos a'_3, b'_3, c'_3 , etc. e a'_2, b'_2, c'_2 , etc., respectivamente e que se unem por meio de retas.

O prisma desenvolvido é dobrado por suas arestas $b'_2b'_3, c'_2c'_3, d'_2d'_3$, servindo como gabarito a seção transversal interna do prisma da figura 1 que, neste caso, foi sombreada.

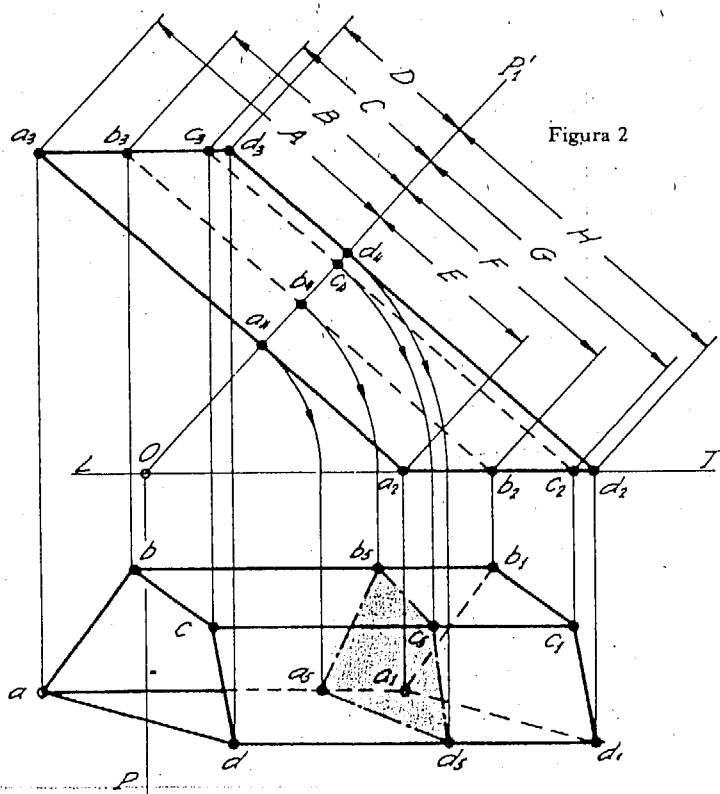


Figura 1

Figura 2

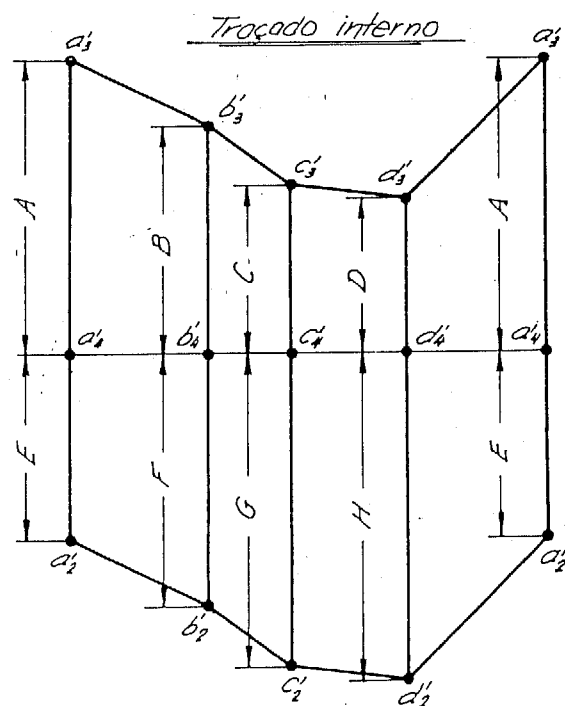


Figura 3

Pirâmide reta, seccionada obliquamente

Todas as pirâmides são representadas por sua fibra interna para depois serem desenvolvidas.

A base desta pirâmide é um quadrilátero inscrito em uma circunferência.

Para achar a seção da pirâmide, rebata-se o plano projetante vertical $Q-Q_1$ que passa por essa seção e, depois, rebate-se esse plano em redor de sua linha horizontal Q , determinando assim a seção a'_3, b'_3, c'_3, d'_3 (fig. 3) em sua verdadeira grandeza (ver "Geometria descritiva" na parte de Rebatimentos).

Traçado das arestas reais. Projeta-se o ponto P (fig. 2) perpendicular à $L-T$, determinando o ponto P_1 que se une por meio de uma reta com o vértice V da pirâmide (fig. 1). Desde os pontos a_2, b_2 , etc. da seção, traçam-se paralelas à $L-T$ até

cortar a reta VP_1 nos pontos a_4, b_4 , etc., ficando assim determinadas as arestas reais do tronco de pirâmide.

Desenvolvimento lateral. Tomando com centro V' (fig. 4), descreve-se um arco de raio $V'P_1$ igual à distância VP_1 da figura 1. Neste arco se traçam as cordas $a'b', b'c'$, etc., iguais aos respectivos lados internos ab, bc , etc. da base da pirâmide da figura 2.

Os pontos a', b', c' , etc. do desenvolvimento são unidos com o ponto V' por meio de retas (arestas desenvolvidas). Desde V' transportam-se sobre estas arestas desenvolvidas as distâncias da mesma origem Va_4, Vb_4, Vc_4 , etc. da figura 1, determinando assim os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc., os quais se unem entre si por meio de retas.

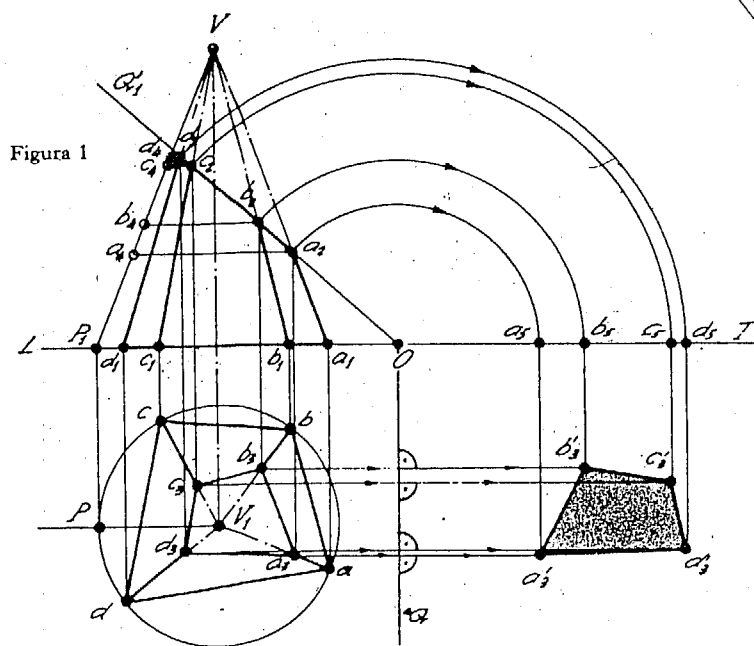
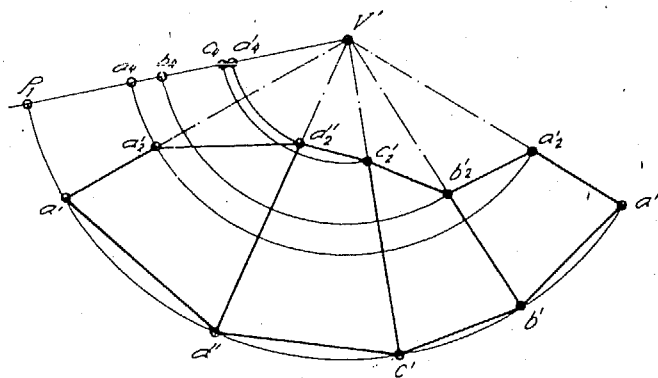


Figura 1



Traçado interno

Figura 4

Figura 3

Figura 2

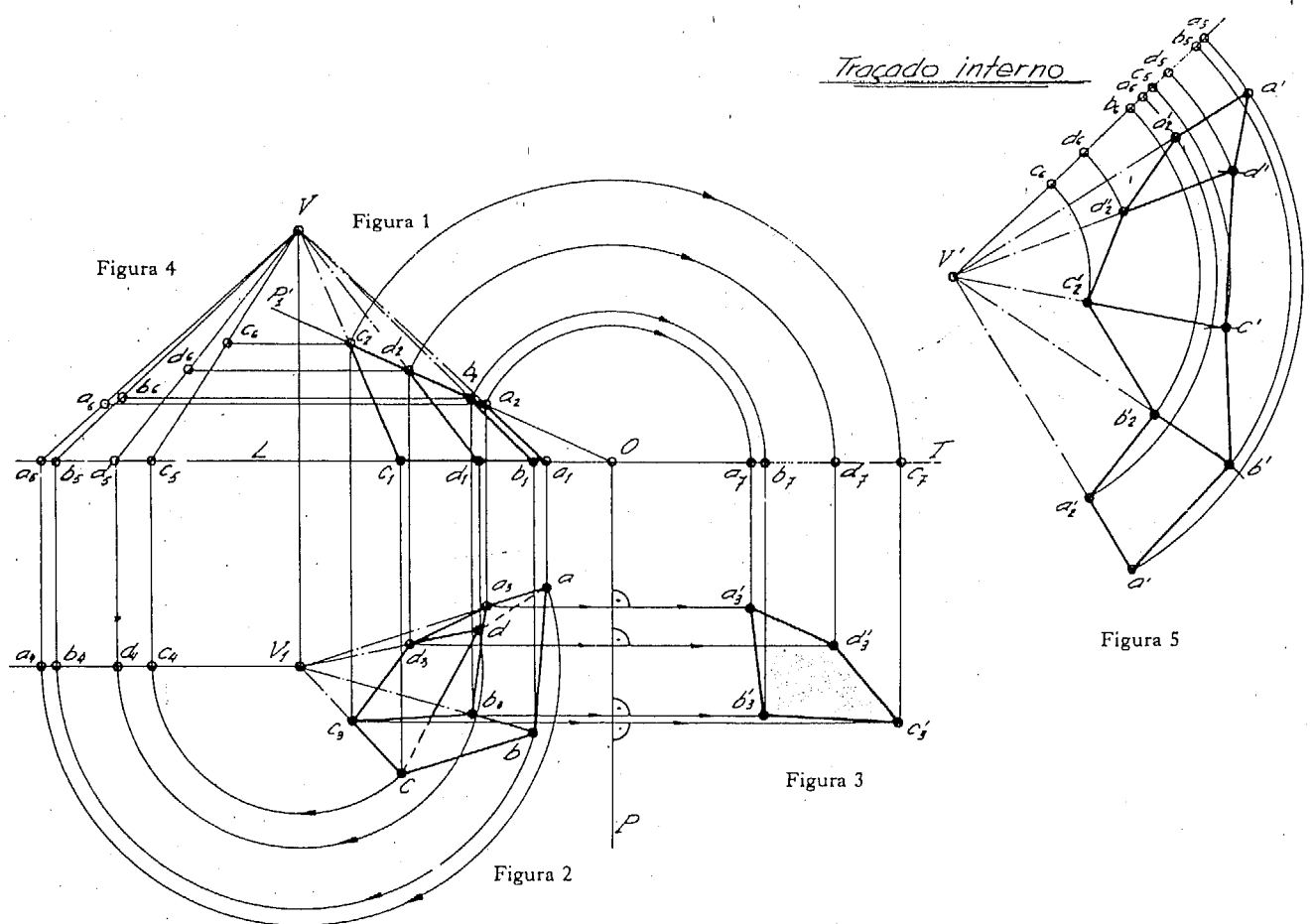
Tronco de pirâmide oblíqua

Representa-se a pirâmide em suas projeções vertical (fig. 1) e horizontal (fig. 2) por sua fibra interna.

O traçado da seção (fig. 3) é determinado rebatendo o plano projetante vertical $P-P_1$ que passa pela seção da pirâmide (fig. 1), girando esse plano em redor de sua linha horizontal P .

Traçado das arestas reais. Desde V_1 (fig. 2) se traça uma paralela à $L-T$ e se giram em redor deste ponto os pontos a, b , etc. da base, determinando sobre a paralela anterior os pontos de intersecção a_4, b_4 , etc., desde os quais se traçam perpendiculares à $L-T$, cortando-a nos pontos a_5, b_5 , etc. (fig. 4). Estes pontos são unidos com o vértice V , determinando-se assim as arestas reais da pirâmide completa. Desde os pontos a_2, b_2 , etc. da seção (fig. 1), traçam-se paralelas à $L-T$, determinando sobre as arestas reais da mesma origem (fig. 4) os pontos de intersecção a_6, b_6 , etc.

Desenvolvimento lateral. Sobre uma reta qualquer (fig. 5), marcam-se as distâncias $V'a_5, V'b_5$, etc. e $V'a_6, V'b_6$, etc., iguais às distâncias Va_5, Vb_5 etc. e Va_6, Vb_6 , etc. da figura 4. Tomando como centro V' descrevem-se arcos que partam desde os pontos a_5, b_5, c_5 e d_5 e se marca sobre o arco de origem a_5 o ponto a' e, desde este ponto descreve-se um arco de raio igual ao lado interno ab da figura 2, cortando o arco de origem b_5 no ponto b' ; de forma análoga acham-se os pontos c', d' e a' que se unem todos com o ponto V' por meio de retas. Fazendo centro em V' , descrevem-se arcos que partam dos pontos a_6, b_6, c_6 e d_6 , determinando sobre as retas da mesma origem os pontos de intersecção a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 e a'_2 que se unem por meio de retas.



Tremonha de bocas retangulares e paralelas

Representa-se a tremonha por sua fibra interna, tal como se vê nas projeções horizontal (fig. 1), vertical (fig. 2) e de perfil (fig. 3).

Esta tremonha é formada por quatro superfícies planas em forma de trapézios iguais, dois a dois.

O trapézio $ADad$ é igual ao trapézio $BCbc$, e o trapézio $ABab$ é também igual ao outro trapézio $Dcdc$ (fig. 1).

Desenvolvimento lateral da tremonha. Traça-se um trapézio $A'B'a'b'$ (fig. 4), cujo comprimento M e m dos lados serão tomados da figura 1 e a altura H_1 , da figura 2, ficando assim desenvolvido um dos trapézios menores que compõem essa tremonha e que, por sua vez, serve de gabarito para

marcar o outro trapézio igual.

Em seguida, traça-se o trapézio $A'D'a'd'$ (fig. 5), cujos comprimentos dos lados L e l são tomados das figuras 1 e 2 e a altura H_2 , da figura 3, ficando assim desenvolvida a tremonha completa.

Nota. Todas as tremonhas que tiverem as bocas paralelas como esta, desenvolvem-se de forma análoga, embora suas bocas estejam em eixo diferente. Caso se queira desenvolver a tremonha inteira para depois ser dobrada por suas arestas desenvolvidas, operar-se-á da mesma maneira explicada no exercício seguinte.

Figura 2

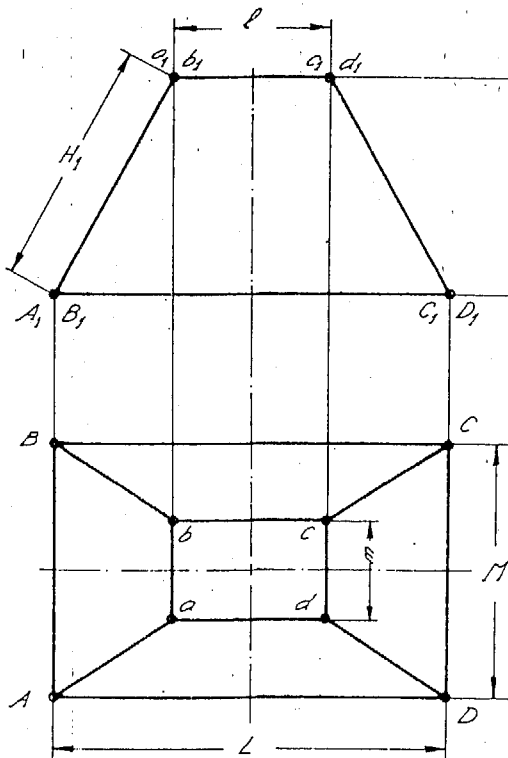


Figura 3

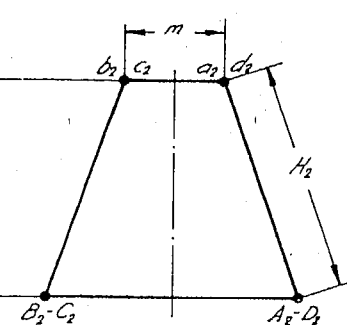


Figura 1

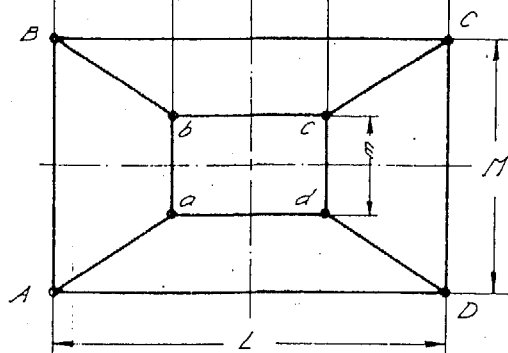


Figura 4

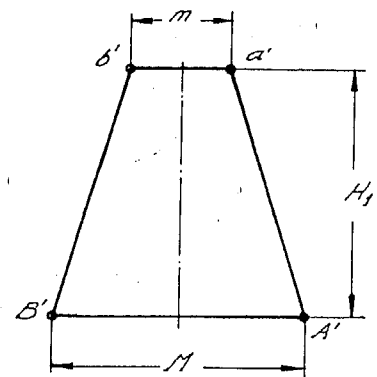
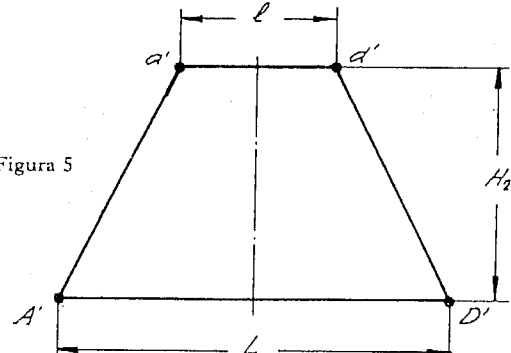


Figura 5



Tremonha de bocas retangulares, quadradas e paralelas entre si

Uma vez representada a tremonha nas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) por sua fibra interna, traçam-se diagonais aos trapézios que compõem essa tremonha (fig. 1) e que são decompostas em triângulos, tal como se vê na projeção horizontal.

Traçado dos lados reais dos triângulos. Prolongam-se as bocas da tremonha (fig. 2) e em uma posição qualquer, traça-se uma perpendicular a estes prolongamentos, cortando-os nos respectivos pontos X e Y . A partir do ponto X , transportam-se as distâncias Aa , Ba , etc. da figura 1, determinando assim novos pontos sobre o prolongamento da base (fig. 3) que também chamaremos de Aa , Ba , etc., que se unem com o ponto Y , sendo assim achadas as grandezas reais dos lados dos triângulos.

Desenvolvimento lateral. Traça-se a reta $A'B'$ (fig. 4) de comprimento igual ao lado interno AB

da figura 1. Marcando o centro em cada ponto, descrevem-se arcos de raios respectivos, iguais aos lados reais Aa e Ba da figura 3, determinando o ponto a' pela intersecção desses arcos.

A seguir descrevem-se arcos de centros a' e B' de raios respectivos, iguais ao lado ab (fig. 1) e do lado real Bb da figura 3, determinando pela intersecção de ambos o ponto b' .

Depois descreve-se um arco de centro B' e de raio igual ao comprimento do lado interno BC da figura 1 e desde b' descreve-se outro arco de raio igual ao lado real Cb da figura 3, determinando sobre o arco anterior o ponto de intersecção C' . Continua-se da mesma maneira para determinar o resto dos pontos $C'c'$, $D'd'$, etc., que ao mesmo tempo se unem por meio de retas.

Desta maneira fica desenvolvida a tremonha para logo ser dobrada pelas linhas $B'b'$, $C'c'$, $D'd'$. Os ângulos de curvatura podem ser achados como se explica no exercício seguinte.

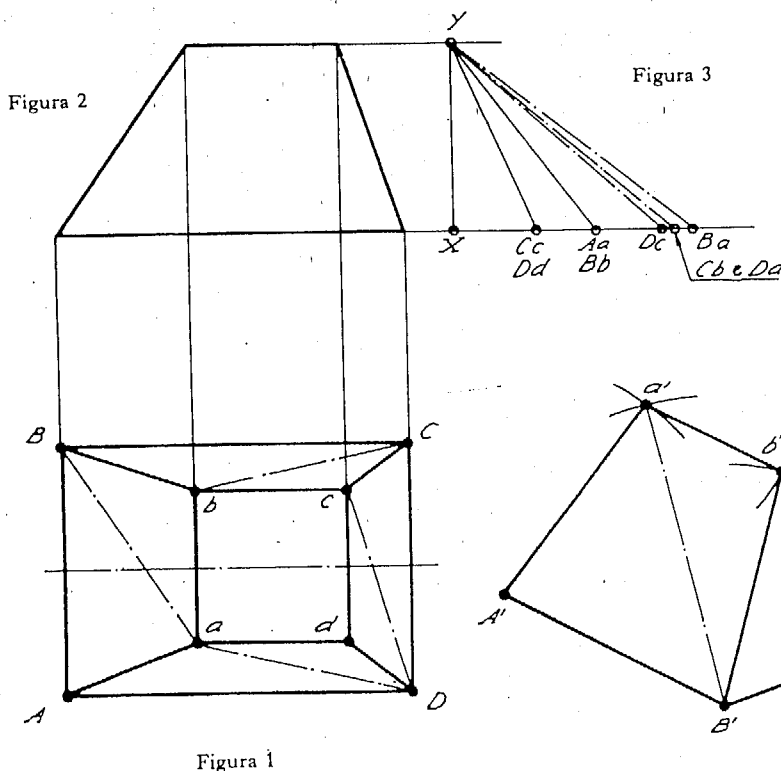


Figura 3

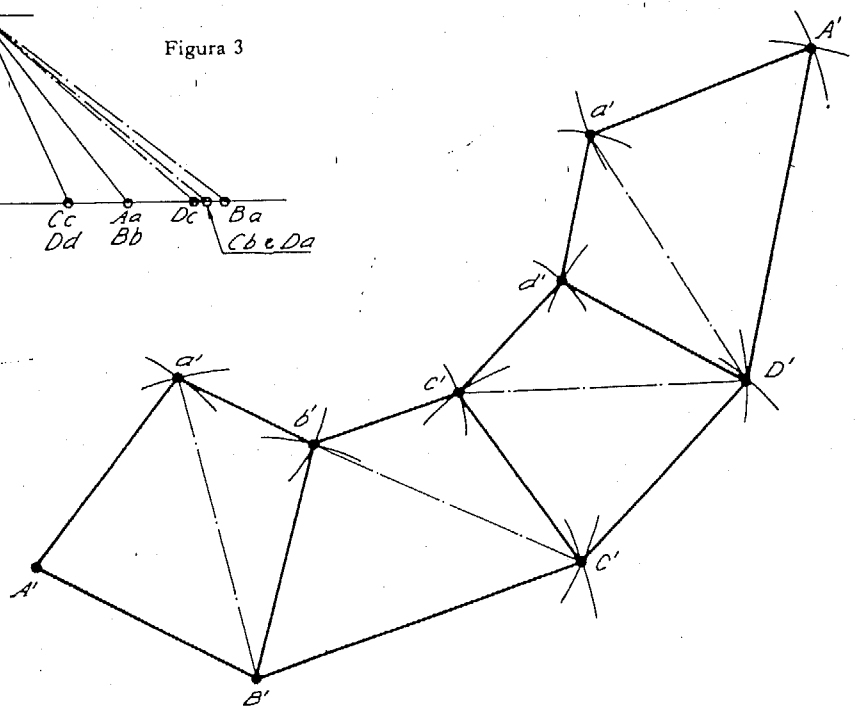


Figura 4

Determinação dos ângulos de curvatura das chapas das tremonhas

É de grande importância saber de antemão o ângulo de curvatura para o desenvolvimento de uma tremonha que deverá ser dobrada pelas suas arestas desenvolvidas, uma vez que evitamos desta maneira que a tremonha seja dobrada a olho, o que não é nada aconselhável porque ao dobrar algumas vezes para mais e outras vezes para menos, ocasiona-se um certo encarecimento da obra no momento de deixar a tremonha bem dobrada.

A seguir são explicados três métodos para achar o ângulo de curvatura.

Primeiro método. Nos pontos Aa da aresta vista em planta (fig. 1), traçam-se perpendiculares à mesma e em uma distância qualquer (fig. 3) se traça uma perpendicular indefinida às anteriores, determinando desta maneira o ponto A_1 sobre a perpendicular traçada no ponto A .

Desde a perpendicular de origem A_1 (fig. 3) transporta-se a altura H (H é igual à altura da tremonha) sobre a perpendicular de origem a da figura 1, determinando o ponto a_1 que se une com o ponto A_1 por meio de uma reta, sendo esta reta a grandeza real da aresta $A-a$.

Desde um ponto qualquer P da reta A_1a_1 , traça-se uma perpendicular à mesma até cortar a reta de origem A_1 no ponto O , a partir do qual se descreve um arco que parta de P e determine o ponto P_1 . Desde este ponto e também desde O , traçam-se perpendiculares à aresta Aa (fig. 1), determinando o primeiro o ponto P_2 (sobre a aresta Aa) e o segundo, os pontos O_1 e O_2 (sobre os lados da tremonha).

O ponto P_2 é unido por meio de retas com os pontos O_1 e O_2 , sendo o ângulo de curvatura o ângulo tracejado.

Segundo método. Desde o ponto D (fig. 1) traça-se uma perpendicular à aresta Dd e pelo ponto d se traça outra perpendicular a essa aresta (em ambas as partes), determinando sobre os lados DA

e DC da base da tremonha os respectivos pontos de intersecção M e N .

Em uma posição qualquer se traça uma paralela à aresta Dd até cortar as perpendiculares anteriores nos pontos D_1 e d_1 . A partir do ponto D_1 transporta-se a distância H , determinando o ponto D_2 que, unido com o ponto d_1 por meio de uma reta, levaria a achar a verdadeira grandeza da aresta Dd [a distância H é igual à altura H da tremonha, vista na projeção vertical (fig. 2)].

Prolonga-se a reta D_2d_1 e paralelamente a esta se traça uma reta que parta do ponto D_1 e em uma distância qualquer (fig. 4), traça-se uma perpendicular a estas, cortando-as nos pontos E e d_2 .

Em ambas as partes do ponto E transportam-se as distâncias EM' e EN' iguais às respectivas distâncias dM e dN da figura 1. Por último, unem-se os pontos M' e N' com o ponto d_2 por meio de retas que determinam o ângulo de curvatura (o ângulo de curvatura está tracejado).

Terceiro método. No ponto médio Q da aresta Cc (fig. 1) se traça uma perpendicular à mesma de comprimento $H/2$ igual à metade da altura H da tremonha (fig. 2), determinando assim o ponto Q_1 que se une com o ponto C da aresta.

Desde o ponto Q_1 se traça uma perpendicular à reta Q_1C até cortar o prolongamento da aresta Cc no ponto Q_2 , desde o qual se traça uma perpendicular em ambas as partes do prolongamento desta aresta, determinando sobre os lados CD e CB os respectivos pontos de intersecção Q_3 e Q_4 .

Em seguida, descreve-se um arco de centro Q_2 que partindo do ponto Q_1 e cortando a aresta Cc no ponto Q_5 que, unido com os pontos Q_3 e Q_4 por meio de retas, leva a determinar o ângulo de curvatura que precisamos (o ângulo de curvatura está tracejado).

Nota. Ver na parte de "Geometria descritiva", *Ângulo formado por dois planos*.

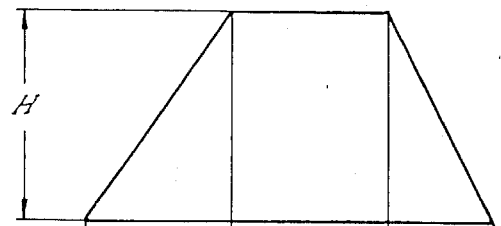
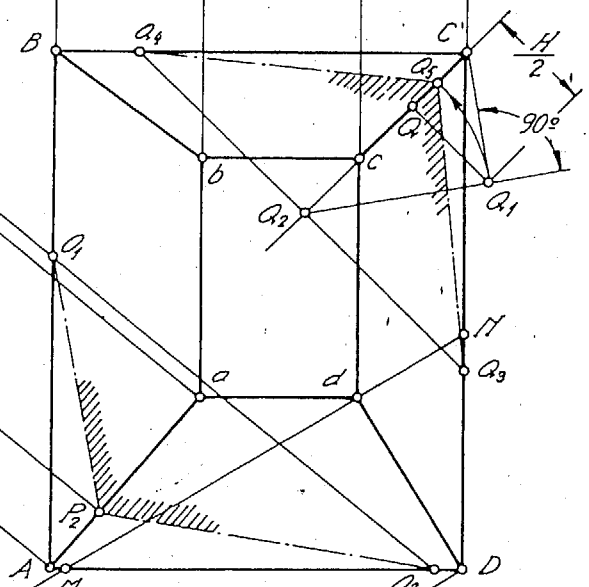


Figura 2

Figura 1



Verdadeira grandeza da aresta A-a

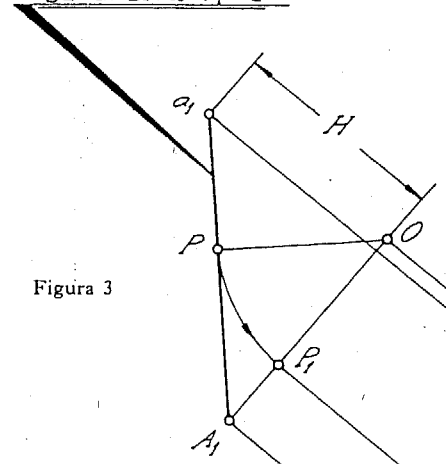


Figura 3

Verdadeira grandeza da aresta D-d

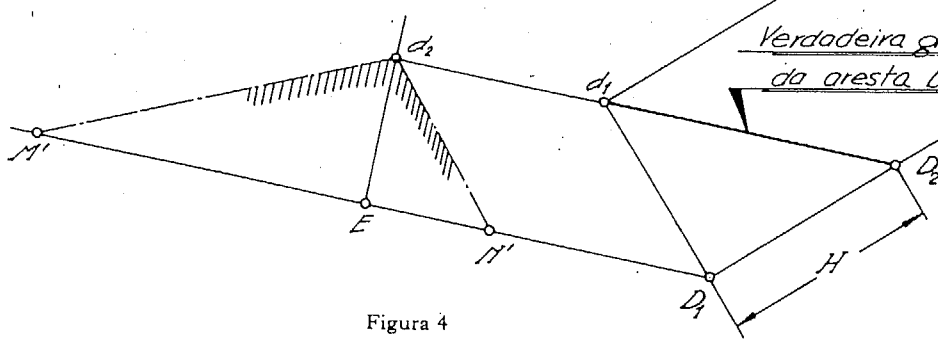


Figura 4

Tremonha de bocas inclinadas

Esta tremonha, como as anteriores, é representada em suas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) por sua fibra interna. Por estarem as bocas inclinadas entre si, as laterais $ADad' = BCbc$ (fig. 1), são formadas, cada uma, por dois planos que são os planos ADD , Aad e BCC , Bbc .

Uma vez representada a tremonha por sua fibra interna, unem-se os pontos B , a e C , d (fig. 1) por retas imaginárias, determinando assim os respectivos triângulos ABa , Bab e CDd , Ccd , cujas grandezas reais dos lados devem ser achadas para poder desenvolver a tremonha.

Determinação dos dados para desenvolver a tremonha. Em um ponto qualquer X do prolongamento da base (fig. 3), traça-se uma perpendicular e se projetam as extremidades da boca superior, determinando os pontos de intersecção Y e Z (prolonga-se a projetante que determina Y).

A partir do ponto X e sobre o prolongamento da base da tremonha, transportam-se as distâncias $Cc = Dd$, $Ad = Bc$ e Cd da figura 1, determinando novos pontos que, unidos com o ponto Z , levam a determinar grandezas reais Dd , Cc , Ad , etc.

Depois transportam-se desde Y (tal como mostra a figura 3) as distâncias $Aa = Bb$ e Ba da figura 1, determinando os pontos que se unem com o ponto X , achando-se assim as grandezas reais Aa , Bb e Ba .

Desenvolvimento lateral. Em uma posição adequada (fig. 4), traça-se a reta $A'B'$ de comprimento igual ao comprimento interno do lado AB da figura 1. Desde os pontos A' e B' , descrevem-se arcos de raios respectivos iguais às grandezas reais Aa e Ba da figura 3, determinando o ponto a' pela intersecção de ambos os arcos.

Em seguida, descreve-se um arco de centro a' e de raio igual ao comprimento interno do lado ab da figura 1 e tomando como centro B' , descreve-se outro arco de raio igual à grandeza real Bb da figura 3, determinando sobre o arco anterior o ponto de intersecção b' .

Marcando o centro no ponto b' , descreve-se um arco de raio igual ao comprimento interno do lado b_1c_1 da figura 2 e desde B' descreve-se outro arco de raio igual à grandeza real Bc da figura 3, deter-

minando sobre o arco anterior o ponto de intersecção c' . Para achar os restantes pontos C' , d' , D' , A' e a' procede-se de maneira análoga, unindo todos os pontos por meio de retas, tal como ilustra a figura 4. As retas $B'b'$, $B'c'$, $C'c'$, $D'd'$ e $A'd'$ são as de curvatura para as quais acharemos os correspondentes graus.

Determinação dos graus de curvatura. O ângulo θ (figura 1 e 5) formado pelos planos ADD e $DCdc$ entre si foram achados pelo primeiro método do exercício anterior.

Para achar o ângulo α (figura 1 e 6) formado pelos planos Bbc e BCC , opera-se da seguinte maneira:

Prolonga-se a reta B_1b_1 (fig. 2) até cortar no ponto b_2 a projetante que determina o ponto Z e desde o ponto anterior, traça-se uma perpendicular à base da tremonha até cortar em b_3 (fig. 1) o prolongamento da aresta Bb . O ponto b_3 é unido com c por meio de uma reta imaginária e desde B , traça-se à direita uma paralela indefinida à reta imaginária anterior.

Desde as extremidades da aresta Bc (fig. 1), traçam-se perpendiculares à mesma e sobre estas, transporta-se a altura H (fig. 6) da figura 2, obtendo-se assim a reta B_2c_2 que ao mesmo tempo é a grandeza real da aresta Bc da figura 1. Desde um ponto qualquer P da reta B_2c_2 , traça-se uma perpendicular à mesma, determinando sobre a reta correspondente o ponto O , a partir do qual se traça um arco que parta de P , determinando assim o ponto P_1 . O ponto P_1 (fig. 6) se projeta perpendicularmente à aresta Bc da figura 1, determinando sobre esta o ponto P_2 . Também se projeta perpendicularmente à aresta Bc o ponto O , determinando sobre a linha imaginária de origem B o ponto de intersecção O_1 e, sobre o lado BC , o ponto O_2 . Este ponto é unido com o ponto P_2 e, desde O_1 , traça-se uma reta que passe pelo ponto P_2 , determinando com a reta P_2O_2 o ângulo α que está tracejado.

O ângulo β (figuras 1 e 7) formado pelos planos $ABab$ e Aad é determinado de maneira análoga à anterior (neste caso, o ponto P_2 foi determinado sobre a aresta Aa , já que esta é a linha de intersecção dos dois planos anteriores).

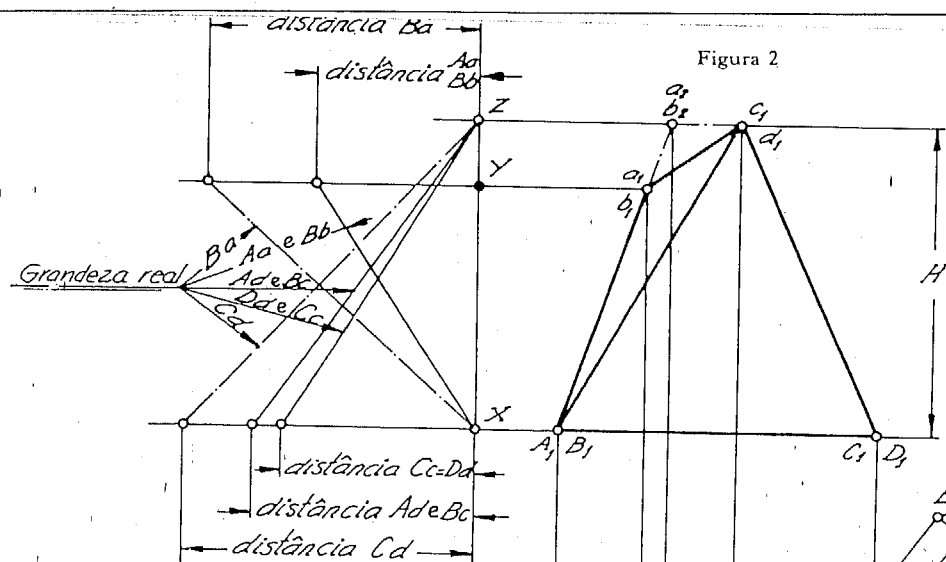


Figura 3

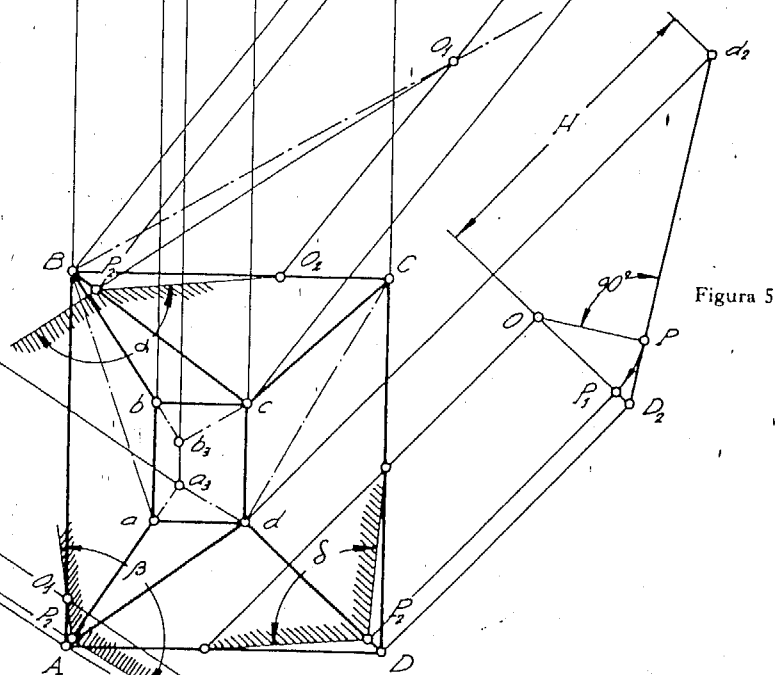
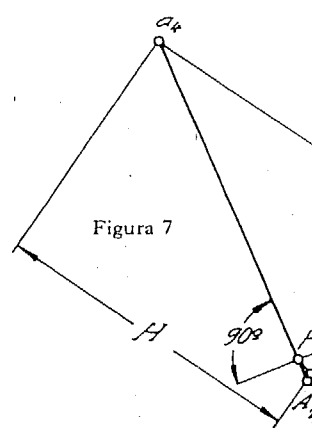
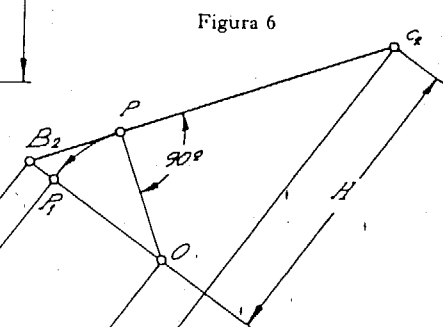
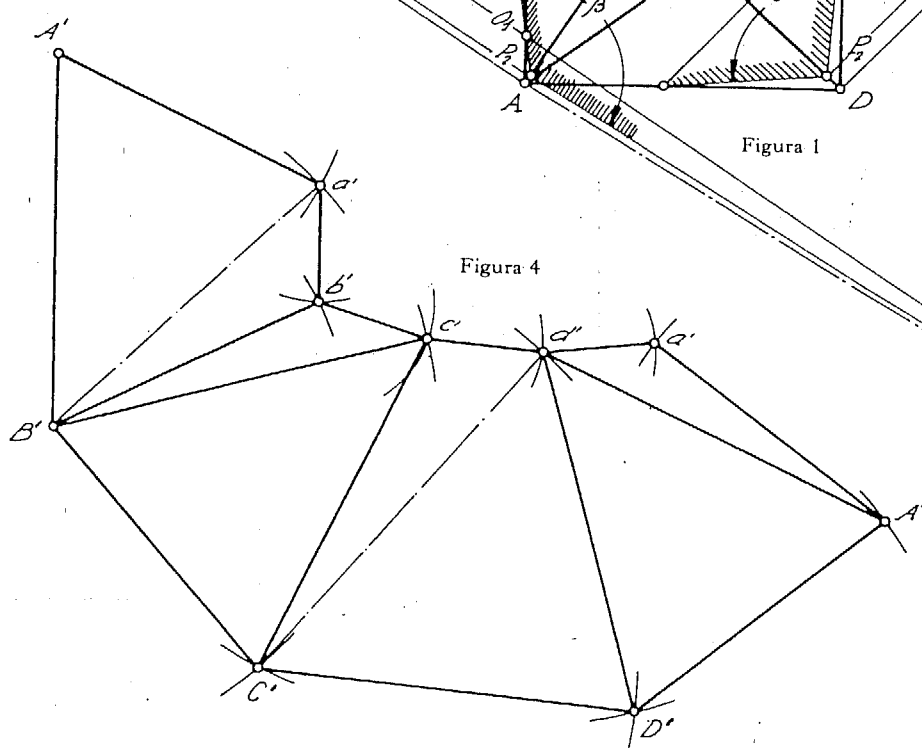


Figura 1



Tremonha especial de bocas quadradas e paralelas

Estas tremonhas são muito empregadas quando construídas de chapa fina e não têm flange na boca superior, razão porque são reforçadas com a série de curvatura.

Convém representar a tremonha com as espessuras da chapa e dimensionar todos os ressalto ou dados necessários por dentro, como se vê na figura 2 (projeção vertical).

Na figura 2 foi seccionada uma parte de tremonha para melhor apreciação de sua medida.

A figura 3 dá um detalhe das soldaduras da tremonha.

Desenvolvimento de uma face (fig. 4). Traça-se um trapézio cujas bases de comprimento A , B e altura H são tomadas da figura 2.

Nas extremidades da base superior do trapézio, traçam-se perpendiculares e depois se traça uma paralela à base superior na distância F , tomada da figura 2.

Nas extremidades desta paralela traçam-se duas retas a 45° e depois se traça outra paralela à distância C , tomada da figura 2. Nas extremidades desta outra paralela também se traçam perpendiculares à mesma, traçando depois uma paralela de distância D e que corte as perpendiculares, desde cujas extremidades traçam-se retas inclinadas a 45° (inversamente às anteriores) e a uma distância E , traça-se outra paralela à base até cortar as retas inclinadas anteriores, ficando assim desenvolvido um quarto de tremonha.

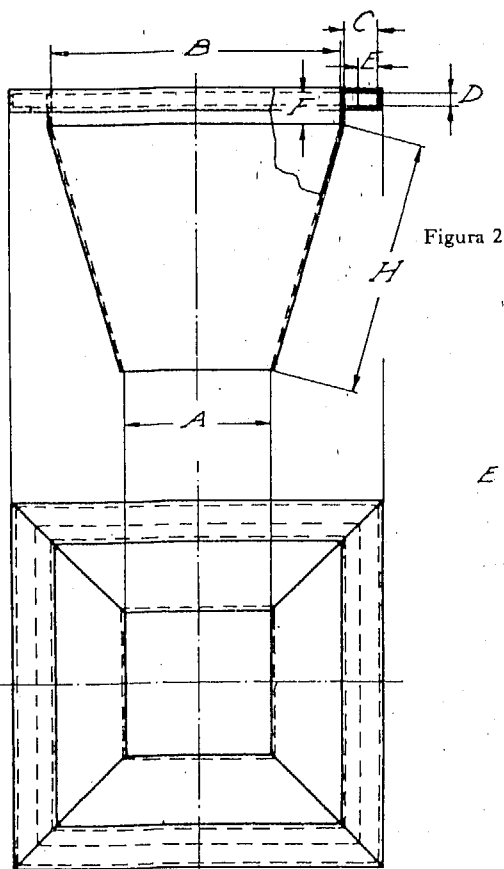


Figura 1

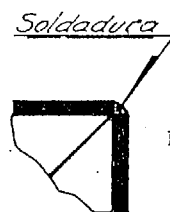


Figura 3

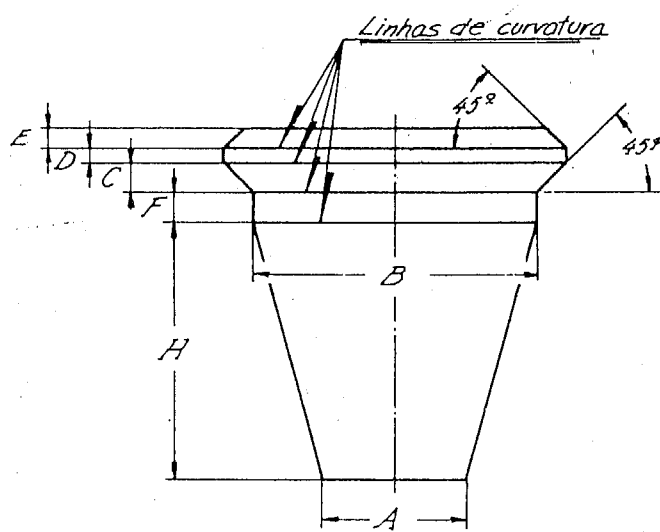


Figura 4

Carrinho

As projeções horizontal e vertical do carrinho (figs. 1 e 2) são representadas por sua fibra interna e quando se quer que suas laterais $ABab$ sejam um só plano, representar-se-á o carrinho da seguinte maneira:

Por exemplo, se conhecemos a projeção horizontal (fig. 1), desde o ponto A se traça uma reta imaginária paralela ao lado ab , determinando sobre o prolongamento da aresta bB o ponto de intersecção Y (em ambas as partes) que se une com o outro ponto Y por meio de uma reta imaginária.

Desde A_1 (fig. 2) se traça uma paralela à base do carrinho e se prolonga a reta $Y-Y$ até cortar a paralela no ponto Y_1 . Este ponto é unido por meio de outra reta imaginária com o ponto b_1 e prolonga-se o lado BB (fig. 1) até cortar a reta b_1Y_1 no ponto B_1 que se une com o ponto A_1 , ficando assim representada a projeção vertical do carrinho (os pontos a e B são unidos por meio de uma reta, decompondo a lateral em dois triângulos).

A seguir prolonga-se o lado a_1b_1 (fig. 2) e se traça uma paralela a esta desde o ponto B_1 e em uma posição qualquer, traça-se uma perpendicular a estas, cortando-as nos pontos X e B_2 (fig. 3). A partir de X traça-se o comprimento falso aB da figura 1, determinando assim o ponto a_2 que unido com o ponto B_2 , determina a grandeza real da linha anterior aB .

Desenvolvimento. Como o fundo $abba$ do carrinho (fig. 1) está em sua verdadeira grandeza na projeção horizontal, representa-se com as mesmas características na figura 4 e se traçam paralelas às retas $a'a'$ e $b'b'$ as respectivas distâncias H_1 e H_2 , tomadas das figura 2, dando a estas a grandeza M da figura 1, determinando assim os respectivos pontos A' , A' , B' e B' que se unem com a' e b' , respectivamente.

Marcando o centro em a' , descreve-se um arco (em ambas as partes) de raio igual à grandeza a_2B_2 da figura 3 e em seguida, descreve-se outro arco de centro b' e que parta de B' até cortar o anterior no ponto B'_1 . Desde a' se descreve um arco que parta de A' e tomando como centro o ponto B'_1 , descreve-se outro arco de raio igual à distância B_1A_1 da figura 2, determinando sobre o anterior o ponto A'_1 . Os pontos A'_1 e B'_1 são unidos entre si e com os pontos a' e b' . Os ângulos α e β (fig. 2) correspondem às respectivas arestas $a-a$ e $b-b$.

O ângulo δ (fig. 1) é determinado traçando uma perpendicular em um ponto qualquer da aresta ab e transportando sobre a reta imaginária AY e altura H da figura 2 a partir da perpendicular, determinando um novo ponto que unido com o anterior por meio de uma reta, formaria com a anterior o ângulo δ .

Figura 2

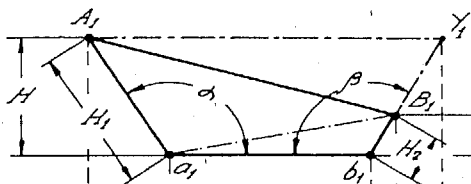


Figura 3

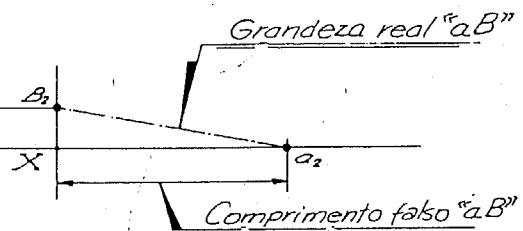


Figura 1

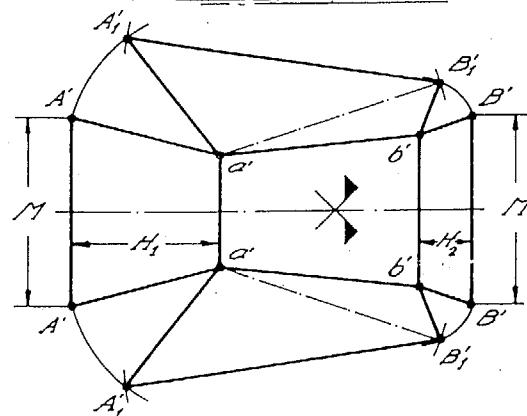
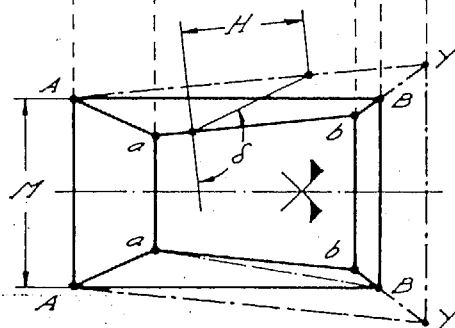


Figura 4

União de um cone em um prisma quadrado, estando ambos os eixos em um mesmo

Divide-se o arco dd (fig. 1) em um número adequado de partes iguais. Os pontos de divisão a , b , etc., são unidos com o vértice V do cone, visto em planta, determinando sobre a reta dd os pontos a_1 , b_1 , etc. Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares à base do cone (fig. 2), determinando assim os pontos a_2 , b_2 , etc. que se unem com o vértice V_1 . O ponto d (fig. 1) é girado em redor de V até cortar o eixo horizontal no ponto d_2 que é projetado perpendicularmente ao diâmetro do cone, determinando o ponto d'_2 , formando-se desta maneira o diâmetro do cone.

Os pontos a_1 , b_1 , etc. são projetados perpendicularmente ao diâmetro do cone, determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos a_3 , b_3 , etc. que se unem com os pontos d_3 por meio de uma curva contínua que, neste caso, é a linha de intersecção de ambos os corpos.

O desenvolvimento de uma das faces do prisma é a sombreada que na figura 2 está em verdadeira grandeza. As restantes são iguais.

Verdadeira grandeza das geratrizes do cone. A uma distância qualquer, traça-se uma paralela à geratriz extrema do cone (fig. 2) na qual se projetam os diâmetros do cone paralelamente à base, determinando os pontos M e P . Também se proje-

tam os pontos a_3 , c_3 e c_3 paralelamente à base até cortar a paralela nos pontos a_4 , b_4 e c_4 .

Depois se desenha a geratriz neutra do cone, cortando o eixo do cone no ponto V_2 . Desde este ponto traça-se uma perpendicular ao prolongamento da geratriz interna do cone, determinando assim o ponto V_3 , o qual é projetado paralelamente à base, cortando a paralela à geratriz extrema no ponto V_4 , determinando desta maneira todas as grandezas reais necessárias para desenvolver o cone.

Desenvolvimento do cone. Tomando como centro V'_4 (fig. 3), descreve-se um arco de raio igual à distância V_4P da figura 2. A este arco se dá o comprimento da circunferência média da base do cone ($2\pi \times R_m$) dividindo-se em vinte e quatro partes iguais neste caso. Os pontos de divisão a' , b' , c' , etc., são unidos com o ponto V'_4 por meio de retas geratrizes, sobre as quais são marcados os comprimentos V_4a_4 , V_4b_4 , etc. da figura 2, determinando assim os pontos a'_3 , b'_3 e c'_3 , que se unem com os pontos d' por meio de uma curva contínua. Por último, descreve-se um arco desde V'_4 de raio igual à distância V_4M da figura 2, ficando assim desenvolvido o cone.

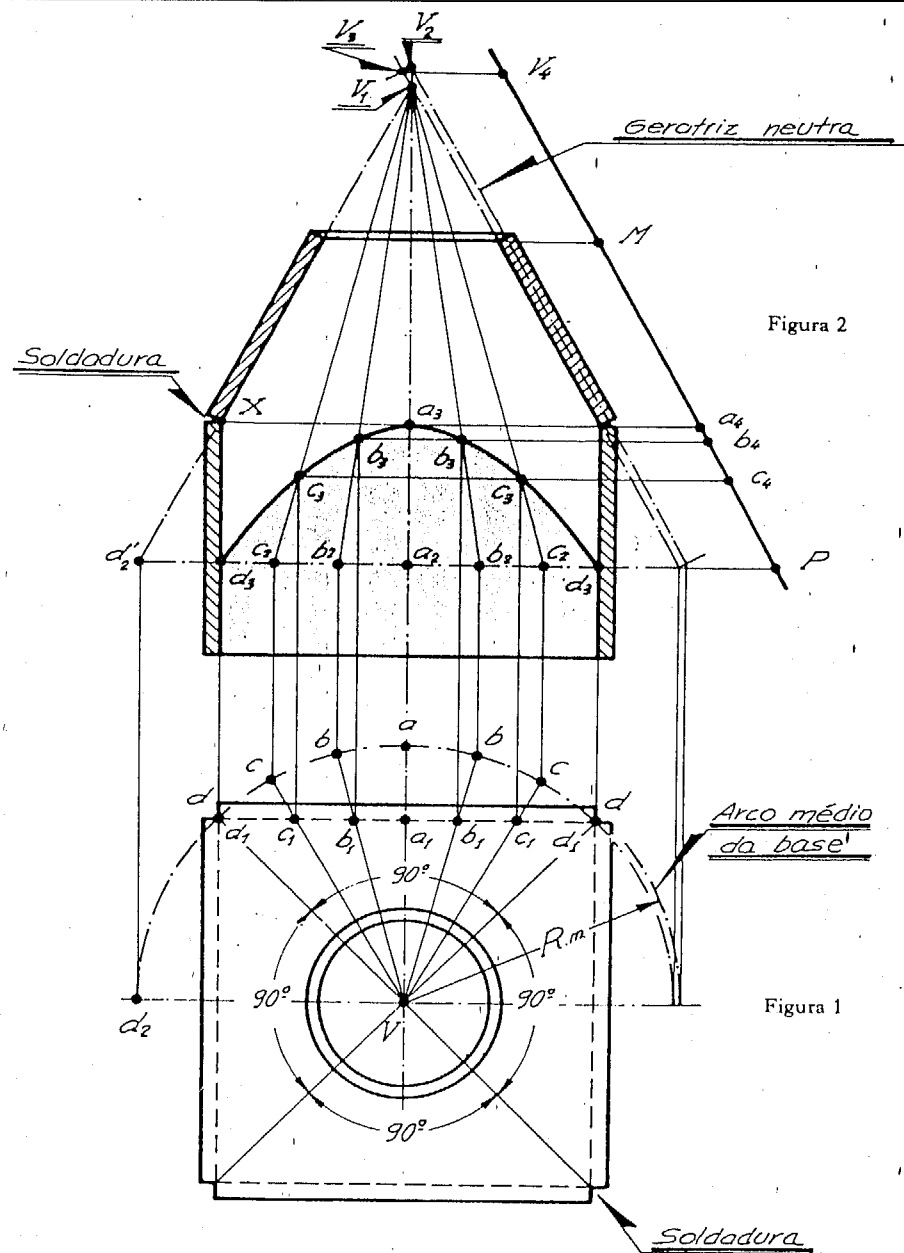


Figura 2

Figura 1

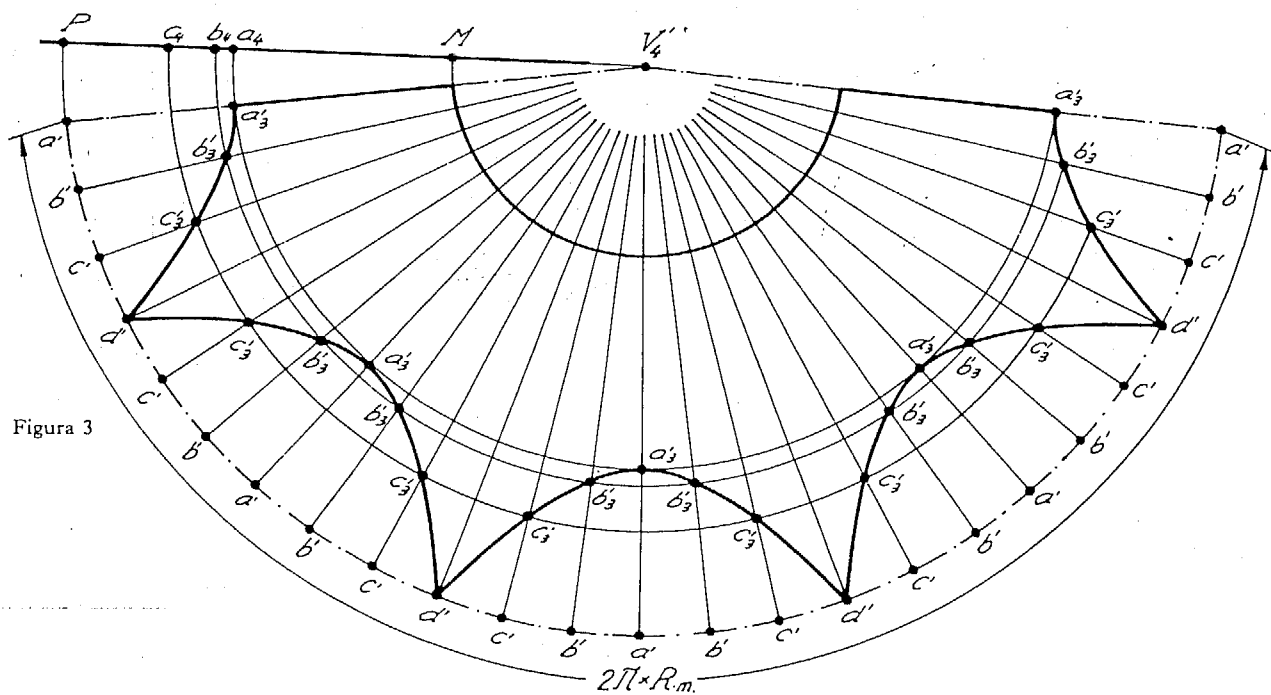


Figura 3

CONES OBLÍQUOS

EXERCÍCIO

48

Os cones oblíquos de bocas circulares são de grande utilidade devido às duas propriedades que são:

Primeira propriedade. Todos os cortes que forem paralelos à base do cone serão circulares como, por exemplo, os cortes feitos pelos planos secantes Q e Q_1 , sendo os respectivos diâmetros destes as distâncias a_3b_3 e a_5b_5 .

Segunda propriedade. Todas as circunferências que passam pelas extremidades a e b da base do cone e cortam as suas geratrizes extremas Va e Vb , deixam cortes circulares se o cone for seccionado por meio de planos secantes que passam pelos pontos de intersecção dessas circunferências sobre

as geratrizes extremas. Na ilustração representam-se quatro circunferências que passam pelos pontos extremos a e b do diâmetro da base e cujos respectivos centros são os pontos O , O_1 , O_2 e O_3 . Estas circunferências determinam sobre as geratrizes extremas do cone os pontos de intersecção a_1b_1 , a_2b_2 , a_4b_4 e a_6b_6 , pelos quais passam os respectivos planos secantes P , P_1 , P_2 e P_3 que determinam seções circulares e paralelas entre si, cujos diâmetros respectivos são iguais às distâncias a_1b_1 , a_2b_2 , a_4b_4 e a_6b_6 .

Terceira propriedade. O ângulo α formado pela base do cone e pela geratriz extrema Vb é igual ao ângulo formado pelos planos P , P_1 , P_2 e P_3 e pela geratriz extrema Va .

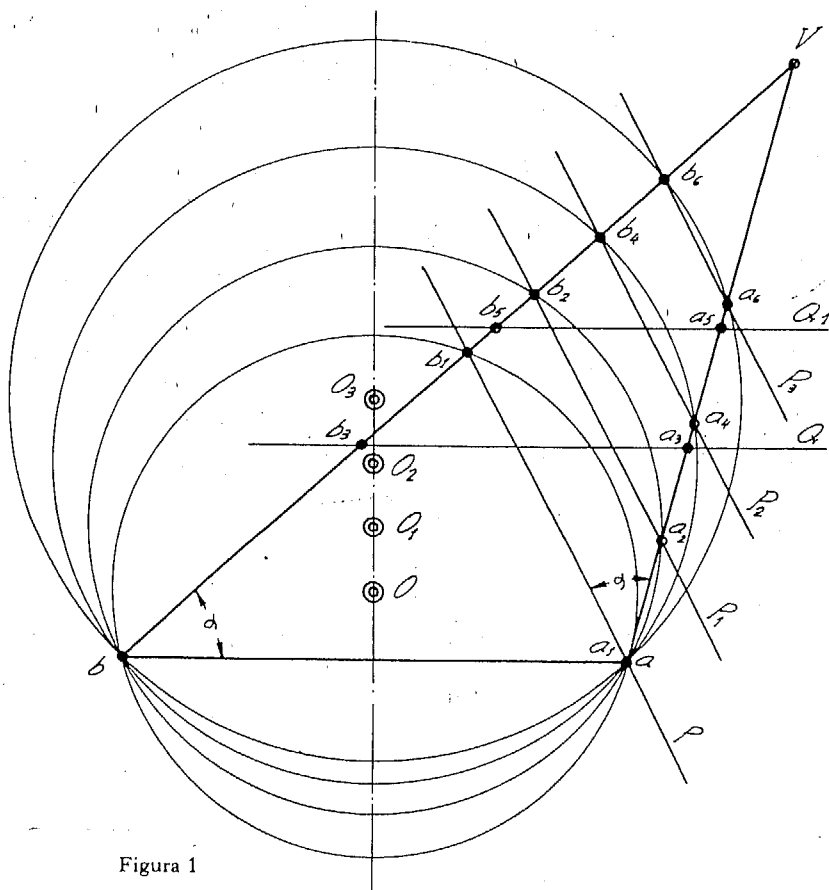


Figura 1

Cone oblíquo de base circular

O desenvolvimento do cone oblíquo de base circular difere do cone reto porque as geratrizes do cone reto são todas iguais, não ocorrendo o mesmo com as geratrizes do cone oblíquo, sendo esta a causa pela qual não se pode desenvolver a base com um só arco; pode-se, porém, desenvolvê-la traçando arcos de centro comum.

O centro comum é representado na figura 3 pela letra V' e os raios dos arcos são iguais às verdadeiras grandezas das geratrizes do cone.

Determinação das verdadeiras grandezas das geratrizes. Divide-se a semicircunferência média da base (fig. 2) em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e unem-se os pontos de divisão a, b, c , etc., com o vértice V_1 por meio de retas geratrizes, determinando assim a representação em planta das geratrizes desejadas. Tomando como centro o ponto V_1 , descrevem-se arcos que partam dos pontos de divisão até cortar o eixo horizontal da base, determinando novos pontos, a partir dos quais se traçam perpendiculares ao diâmetro (fig. 1), determinando sobre este os pontos

de divisão a_1, b_1 , etc., que são unidos com o vértice V por meio de retas geratrizes que neste caso estão em verdadeira grandeza.

Desenvolvimento lateral (fig. 3). Em uma posição adequada se traça uma reta $V'e_1$ igual à geratriz real Ve_1 da figura 1 e em ambas as partes desta reta descrevem-se arcos indefinidos de raios iguais às grandezas reais Vd_1, Vc_1, Vb_1 e Va_1 da figura 1, determinando assim a posição dos pontos da base.

em seguida, marca-se sobre uma régua flexível o desenvolvimento da circunferência média da base ($\pi \times D_m^o$) e se divide em oito partes iguais. Estes pontos de divisão serão chamados de a, b, c , etc. e coloca-se o ponto e da régua flexível sobre o ponto e_1 da figura 3, flexionando a régua até que os pontos da mesma cortem os arcos da mesma origem, determinando os pontos d'_1, c'_1 , etc.; marca-se a curva que determina essa régua ao ser flexionada e os pontos a'_1, b'_1, c'_1 , etc., são unidos com o vértice V' , ficando assim desenvolvido o cone.

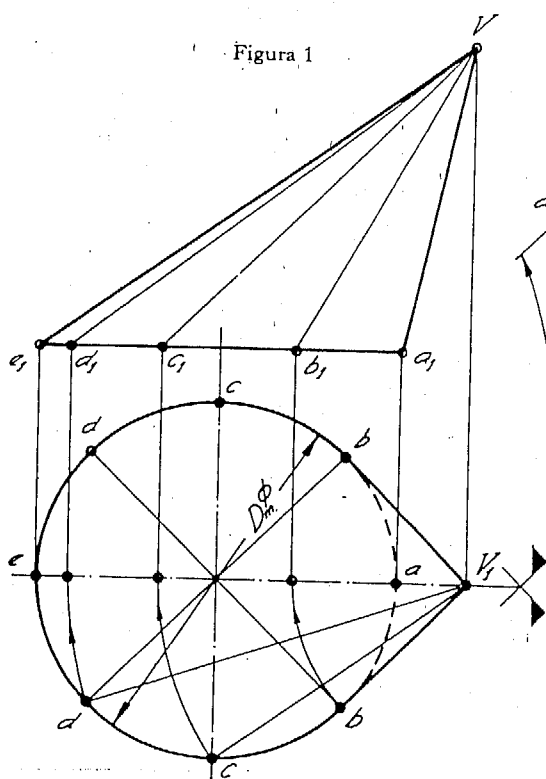


Figura 1

Figura 2

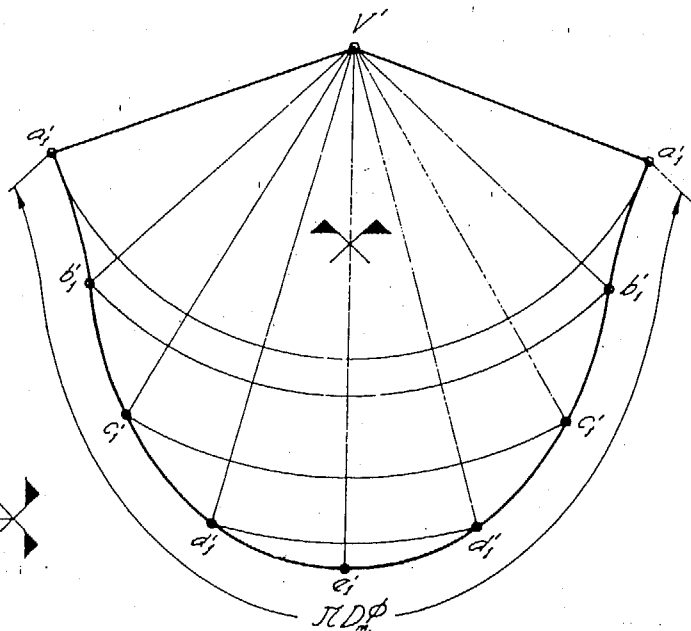


Figura 3

Tronco de cone oblíquo de bocas circulares e paralelas

O tronco de cone é representado nas figuras 1 e 2 por suas projeções vertical e horizontal, respectivamente, e como se pode ver o eixo horizontal da circunferência da base divide este cone simetricamente.

Verdadeira grandeza das geratrizes. Divide-se a circunferência média da base (fig. 2) em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo) e giram-se os pontos de divisão a, b, c , etc., em redor do ponto V_1 (V_1 é a projeção horizontal do vértice V), determinando novos pontos sobre o eixo horizontal da circunferência; a partir destes pontos traçam-se perpendiculares ao diâmetro da base do cone (fig. 1), determinando os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas que cortam o diâmetro da boca superior nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc., determinando assim as geratrizes reais de que necessitamos para desenvolver esse tronco de cone. Estas geratrizes reais também podem ser determinadas sem necessidade de representar a vista em planta do cone, pois, será suficiente descrever uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do cone e dividi-la em partes iguais, girando os pontos de divisão em redor do ponto V_1 que neste caso se en-

contra no prolongamento da base do cone (fig. 1) por ter sido projetado o ponto V sobre esta base.

Desenvolvimento lateral (fig. 3). Em uma posição adequada, traça-se a reta $V'e_1$ de comprimento igual à grandeza Ve_1 da figura 1. Depois descrevem-se arcos de centro V' e de raios iguais às grandezas Vd_1, Vc_1, Vb_1 e Va_1 da figura 1. A seguir, marca-se sobre uma régua flexível o desenvolvimento da circunferência média da base que é dividida em oito partes iguais neste caso, colocando-se letras nestes pontos de divisão de maneira que o ponto central tenha a letra e que se coloca sobre o ponto e_1 do desenvolvimento; flexiona-se a régua até que os pontos de divisão desta cortem os arcos da mesma origem, determinando os pontos d'_1, c'_1 , etc., que se unem com o ponto V' . Desenha-se a curva formada pela régua flexível para determinar esses pontos, ficando assim desenvolvido a curva da base.

Tomando como centro o ponto V' , descrevem-se arcos de raios iguais às grandezas Va_2, Vb_2, Vc_2 , etc. da figura 1, determinando sobre as retas da mesma origem os pontos de intersecção a'_2, b'_2, c'_2 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido o tronco de cone.

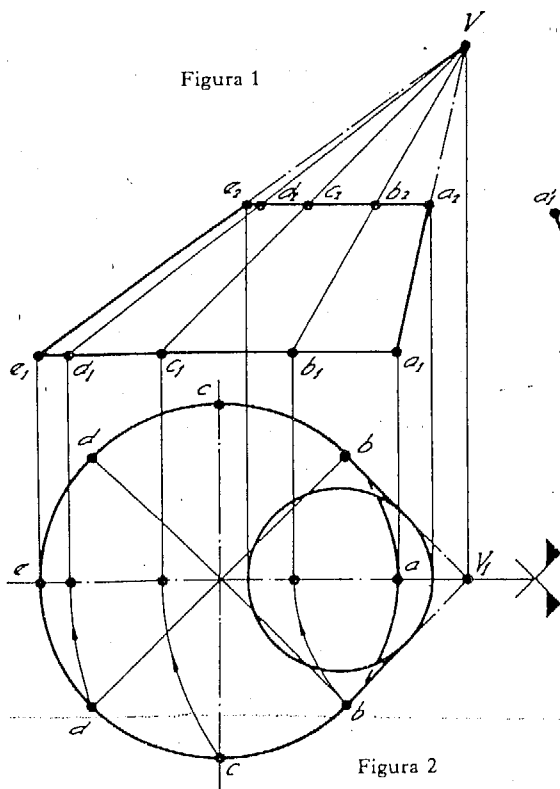


Figura 1

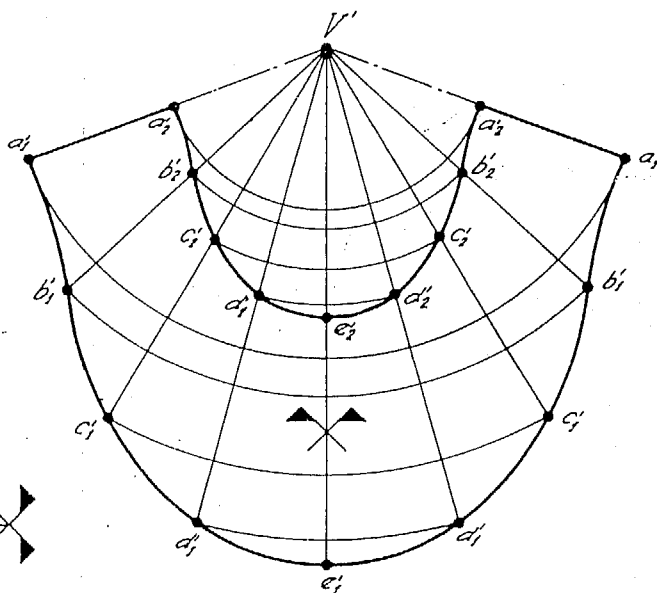


Figura 3

Calça de bocas circulares e paralelas

Esta peça é formada pela intersecção de dois troncos de cones iguais e oblíquos de bocas circulares e paralelas.

Representação das geratrizes. Divide-se a circunferência média da base (fig. 2) em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro médio da base do cone, cortando-o nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc. que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes, determinando sobre a linha de intersecção os pontos D e E . Como se pode ver, não é necessário representar as geratrizes da parte direita da linha de intersecção.

Verdadeira grandeza das geratrizes. Os pontos de divisão da circunferência da base (figura 2) são girados em redor do ponto V_1 (V_1 é a projeção do ponto V , perpendicularmente ao eixo horizontal da circunferência), determinando novos pontos sobre o eixo horizontal da circunferência. A partir

destes pontos traçam-se perpendiculares ao diâmetro médio do cone (fig. 1), determinando os pontos de intersecção a_2, b_2 , etc., que se unem com o vértice V , cortando o diâmetro médio da boca superior nos pontos a_3, b_3 , etc., determinando-se assim as verdadeiras grandezas das geratrizes.

Desde o ponto D traça-se uma paralela até cortar a geratriz real Vd_2 no ponto D_1 (caso haja mais pontos o procedimento será o mesmo).

Desenvolvimento lateral (fig. 3). Primeiramente desenvolve-se o tronco de cone completo da mesma maneira como no exercício anterior e, depois, descrevem-se arcos de centro V' de raios iguais às distâncias VD_1 e VE (fig. 1), determinando sobre as retas da mesma origem do desenvolvimento os pontos de intersecção D' e E' que se unem com o ponto c'_2 por meio de uma curva contínua, determinando assim o desenvolvimento de um braço que ao mesmo tempo serve de gabarito para marcar o outro.

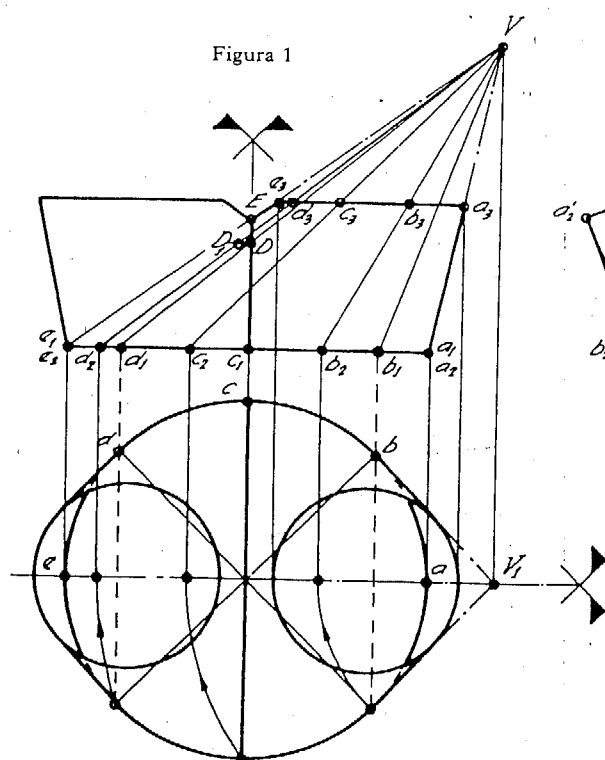


Figura 2

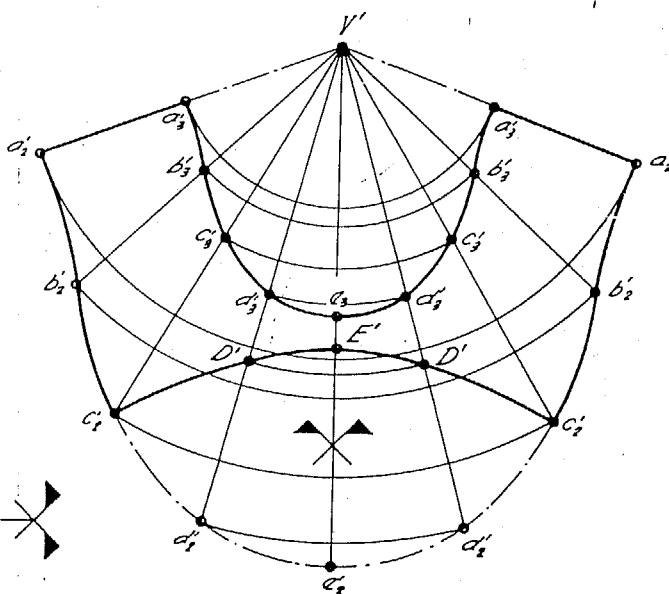


Figura 3

Calça de bocas circulares e paralelas entre si, cujos eixos estão em diferentes planos

Esta peça de união serve para unir duas tubulações de igual diâmetro com outra tubulação de maior diâmetro, instaladas ambas na parede de um edifício.

As figuras 1 e 2 representam as vistas em elevação e em planta, respectivamente; desta peça de união que é formada pela intersecção de dois cones oblíquos iguais, dos quais somente um será desenvolvido, já que o mesmo serve de gabarito para marcar o outro, procurando-se curvâ-lo do lado contrário do primeiro.

Traçado das geratrizes reais. Projeta-se o vértice V (fig. 1) perpendicularmente à base do cone, determinando sobre o eixo do mesmo visto em planta (fig. 2) o ponto de intersecção V_1 (este ponto também é determinado prolongando-se as geratrizes extremas da projeção horizontal).

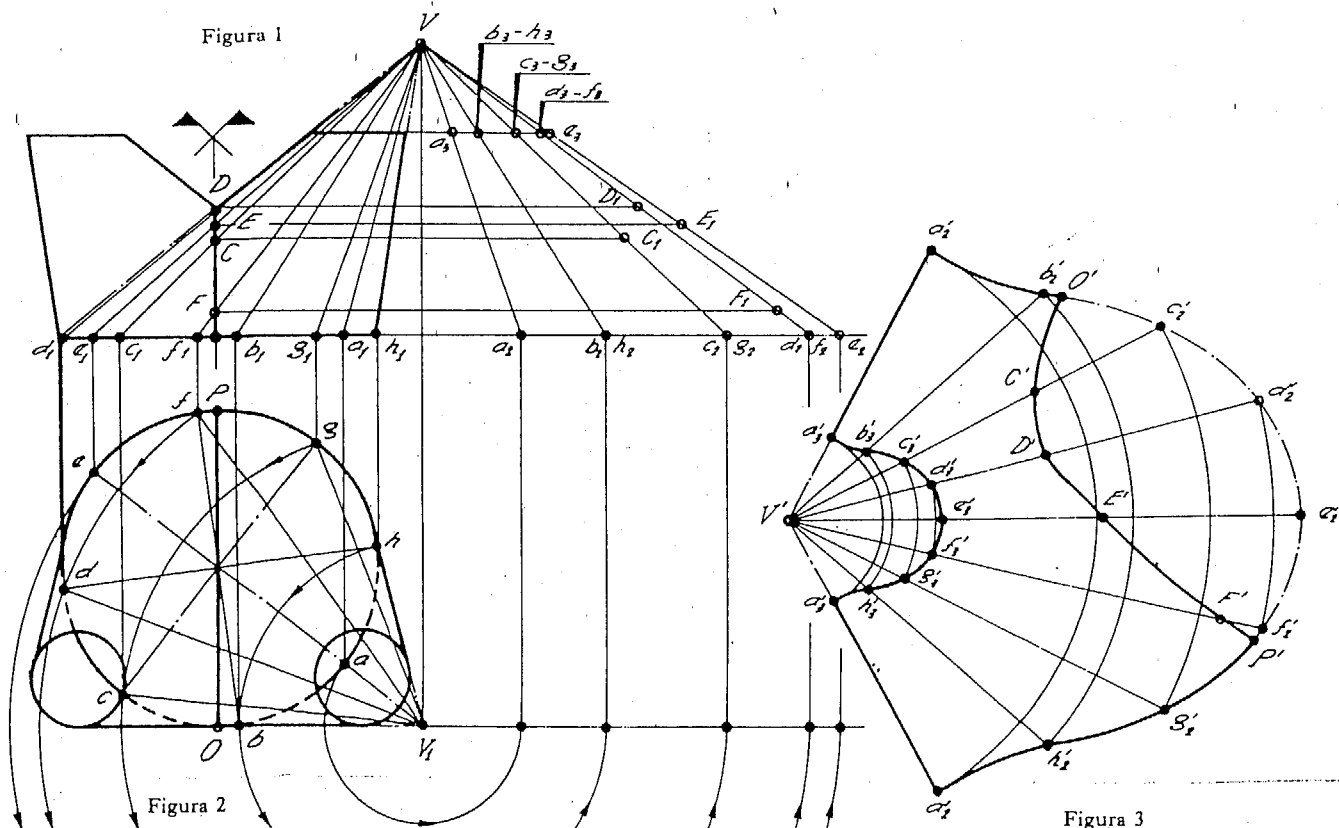
Em seguida, divide-se a circunferência média da base do cone em certo número de partes iguais (oito, por exemplo). Os pontos de divisão a, b, c , etc., se unem com o vértice V_1 (embora não seja necessário), determinando as geratrizes V_1a, V_1b, V_1c , etc. Estes mesmos pontos de divisão a, b, c ,

etc., são projetados perpendicularmente ao diâmetro da base da calça (fig. 1), determinando os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc., que unidos ao vértice V determinam sobre a linha de intersecção os pontos C, D, E e F .

Depois traça-se uma horizontal indefinida que parta de V_1 (fig. 2) e marcando-se o centro neste ponto descrevem-se arcos que partam dos pontos de divisão a, b, c , etc., formando novos pontos sobre a horizontal anterior, a partir dos quais são traçadas perpendiculares ao prolongamento da base da calça, cortando-a nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. (fig. 1). Estes pontos são unidos com o vértice V determinando sobre o prolongamento da boca menor os pontos a_3, b_3, c_3 , etc., determinando-se assim as geratrizes em sua verdadeira grandeza.

Os pontos C, D, E e F são projetados horizontalmente, determinando sobre as geratrizes reais da mesma origem os pontos C_1, D_1, E_1 e F_1 .

Desenvolvimento lateral (fig. 3). O desenvolvimento é feito de forma análoga ao exercício anterior (o comprimento $b_2'O' = f_2P'$ do desenvolvimento é igual ao arco $bo = fP$ da figura 1).



Calça de três bocas circulares e paralelas à base

A peça que tratamos de desenvolver é formada pela intersecção de três troncos de cones oblíquos iguais, de bocas circulares e paralelas entre si, cujas linhas de intersecção na vista em planta formam um ângulo de 120° .

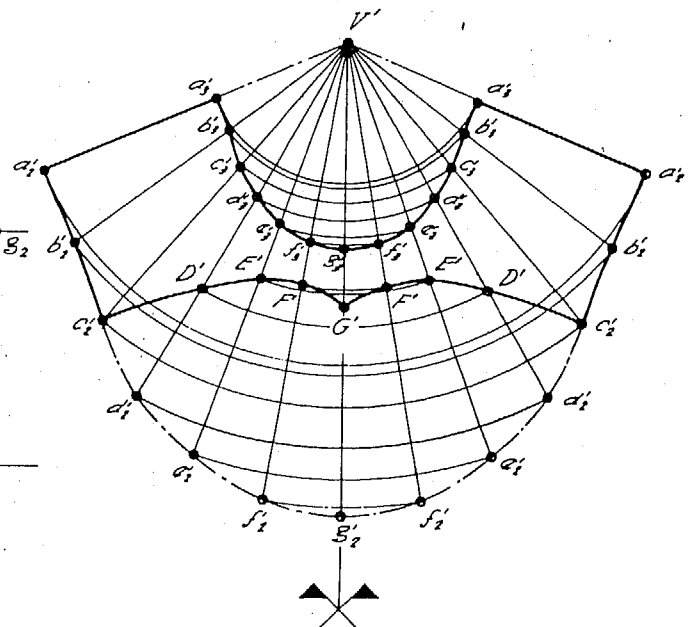
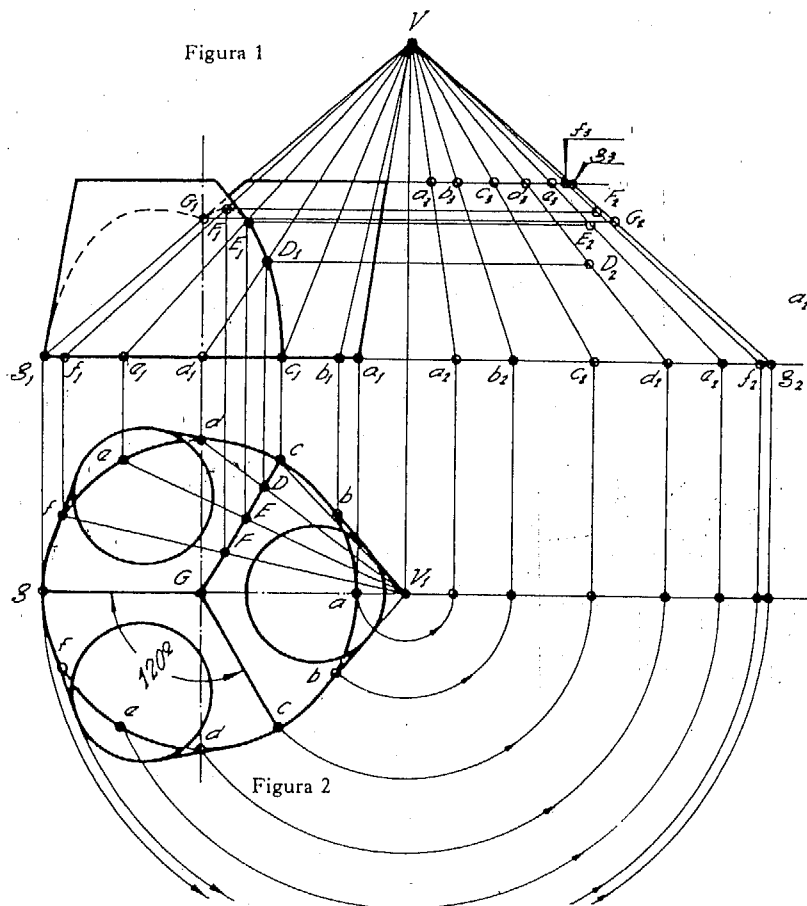
Traçado das geratrizes reais. Divide-se a circunferência média da base em certo número de partes iguais (doze, por exemplo) e unem-se os pontos de divisão a, b, c , etc. com o ponto V_1 (este ponto foi determinado projetando-se o vértice V da figura 1 ou prolongando-se as geratrizes extremas da figura 2), determinando sobre a linha de intersecção os pontos D, E e F ; os pontos de divisão a, b, c , etc., são projetados perpendicularmente ao diâmetro da calça (fig. 1), cortando-a nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com o vértice V , ficando assim representadas as geratrizes na vista em elevação.

Tomando como centro o ponto V_1 (fig. 2), descrevem-se arcos que partam dos pontos de divisão a, b, c , etc., determinando novos pontos sobre a

horizontal que parte de V_1 , a partir dos quais se traçam perpendiculares ao prolongamento da base da calça, cortando-a nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc., que se unem com o vértice V , formando sobre o prolongamento da boca superior os pontos a_3, b_3, c_3 , etc., ficando assim determinadas as geratrizes reais de que precisamos para desenvolver uma das pernas da calça.

Traçado da curva de intersecção. Projetam-se os pontos D, E e F (fig. 2) perpendicularmente ao diâmetro da base da calça, determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos D_1, E_1 e F_1 , que se unem com G_1 e c_1 por meio de uma curva contínua, ficando representada assim a curva de intersecção. Os pontos D_1, E_1, F_1 e G_1 são projetados paralelamente à base da calça, determinando sobre as geratrizes reais da mesma origem os pontos D_2, E_2, F_2 e G_2 .

O desenvolvimeto (fig. 3) é feito da mesma maneira como nos exercícios anteriores.



Tronco de cone oblíquo de bocas circulares e inclinadas entre si

Para que este cone possa ser desenvolvido por linhas radiais é necessário que a circunferência descrita desde o ponto O passe pelas extremidades dos diâmetros das bocas (o ponto O é o ponto de intersecção dos eixos das bocas).

Este cone pode ser desenvolvido por dois procedimentos.

Primeiro procedimento. Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da base (fig. 1) e dividimo-la em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre este os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes que cortam o diâmetro da boca menor nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. (o vértice V é determinado prolongando-se as geratrizes extremas do tronco de cone).

Traçado das geratrizes reais. Prolonga-se a base do cone e se projeta nela o vértice V , determinando sobre esta base o ponto de intersecção V_1 , a partir do qual, tomando-se como centro, descrevem-se arcos que partam dos pontos de divisão a, b, c , etc., determinando sobre o diâmetro da base os pontos de intersecção a_3, b_3, c_3 , etc., que se unem com o vértice V , determinando-se assim as geratrizes reais do cone.

Depois traçam-se paralelas à base a partir dos pontos a_2, b_2 , etc., determinando sobre as geratrizes reais da mesma origem os pontos b_4, c_4 , etc.

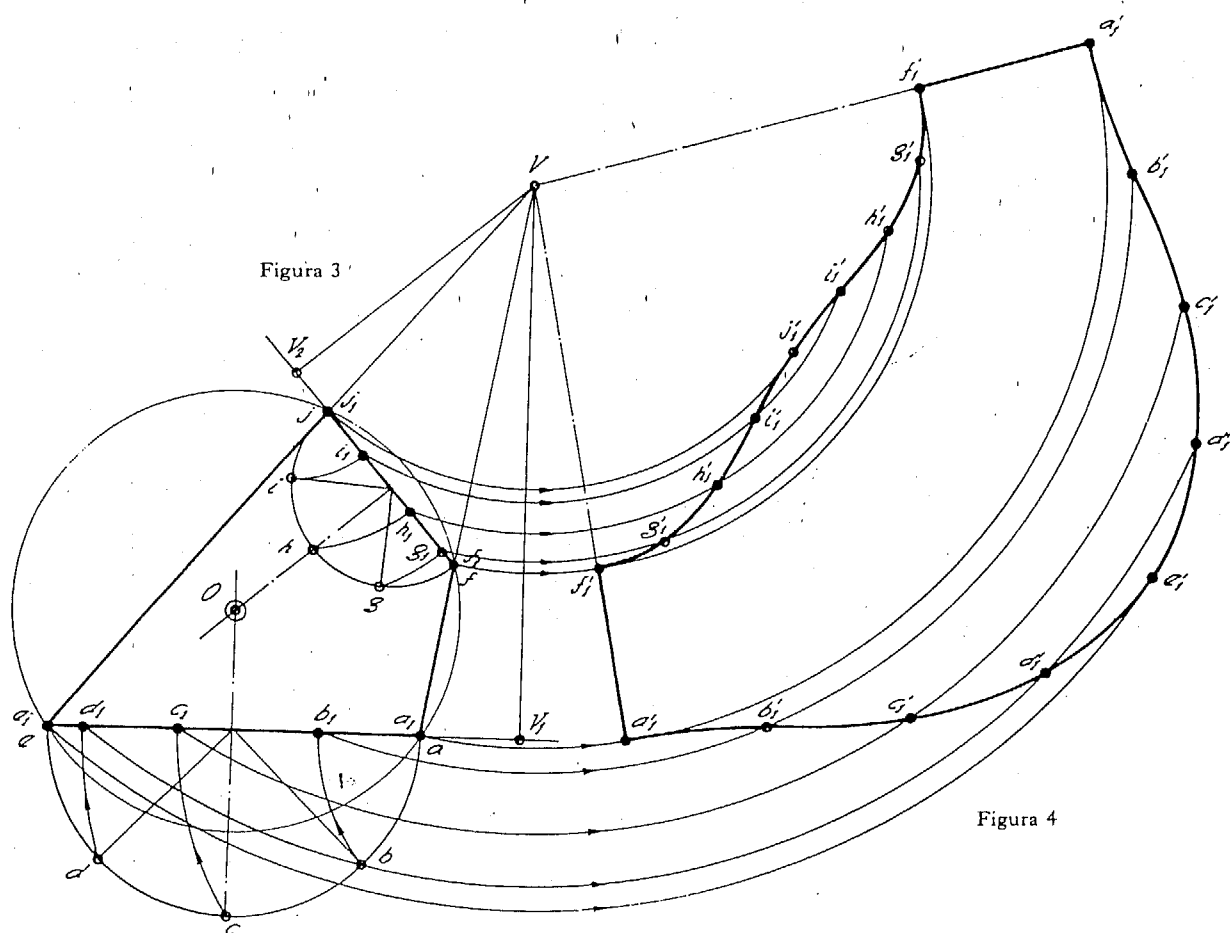
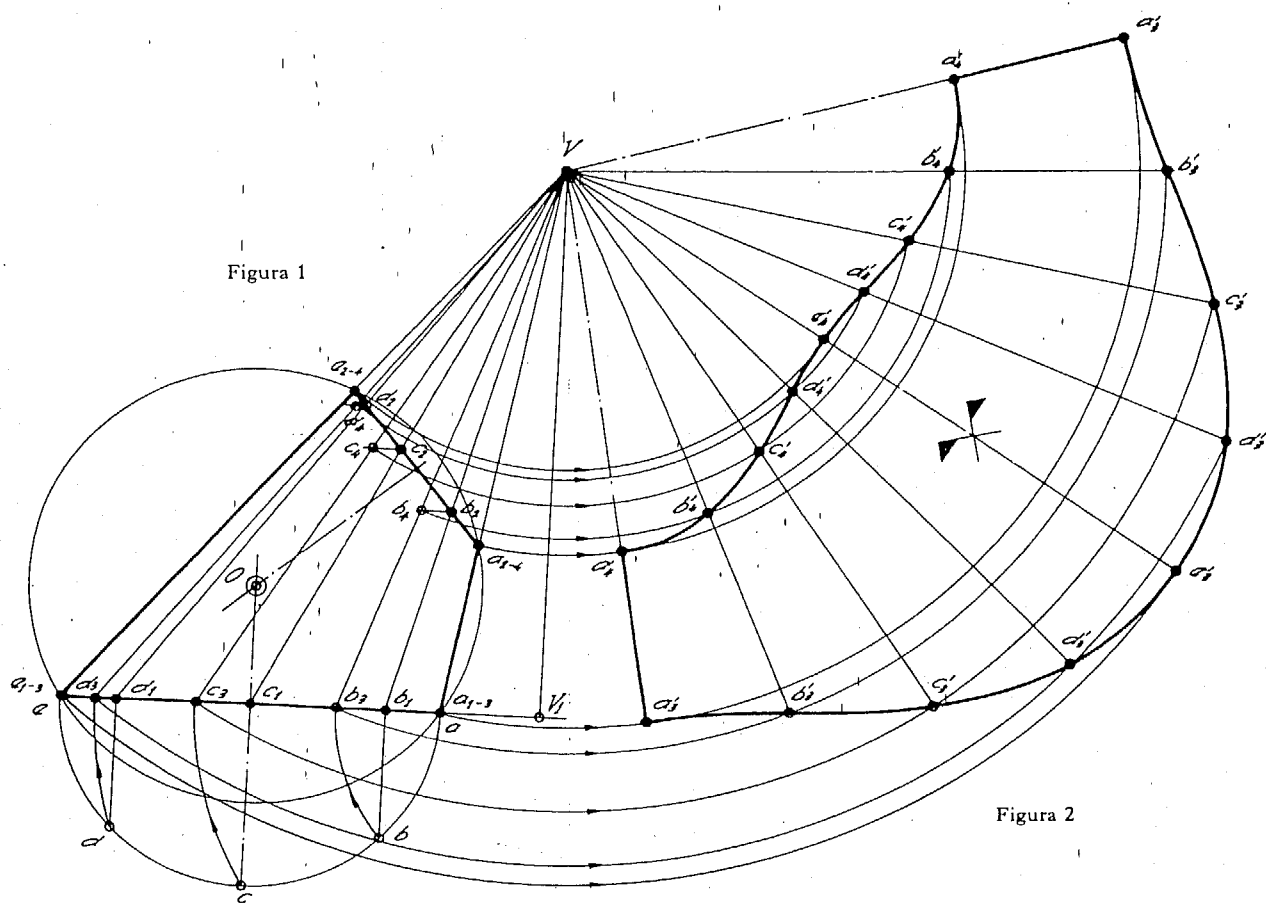
Desenvolvimento lateral (fig. 2). Marcando-se o centro em V , descrevem-se arcos indefinidos que partam dos pontos a_3, b_3, c_3 , etc. e se transporta sobre uma régua flexível o desenvolvimento da circunferência média da base, dividindo-a em oito partes iguais. Esta régua flexível transporta-se ao desenvolvimento, flexionando-se de modo que os pontos da mesma coincidam com os arcos correspondentes traçados anteriormente, determinando os pontos a'_3, b'_3, c'_3 , etc.; a curva formada pela régua é traçada com um traçador.

Estes pontos são unidos com o ponto V por meio de retas geratrizes. Depois descrevem-se arcos de centro V que partam dos pontos a_4, b_4, c_4 , etc., determinando sobre as geratrizes da mesma origem do desenvolvimento os pontos de intersecção a'_4, b'_4, c'_4 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido o tronco de cone.

Segundo procedimento (fig. 3). Sobre os diâmetros médios das bocas descrevem-se semicircunferências divididas em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). Prolongam-se os diâmetros das bocas e projeta-se nelas o vértice V , determinando os respectivos pontos V_1 e V_2 . Marcando centro nestes pontos, descrevem-se arcos desde os respectivos pontos de divisão a, b, c , etc. e f, g, h , etc., determinando sobre os diâmetros das bocas os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc. e f_1, g_1, h_1 , etc.

Desenvolvimento lateral. (fig. 4). Marcando o centro no vértice V , descrevem-se arcos que partam dos pontos a_1, b_1, c_1, d_1 e e_1 e sobre estes arcos transporta-se uma régua flexível onde se marcou o desenvolvimento da circunferência média da base, tendo-se dividido em oito partes iguais, flexionando-se de modo que os pontos da mesma coincidam com os arcos correspondentes, determinando os pontos a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 e e'_1 . Para determinar estes pontos desenha-se a curva formada pela régua flexível. As extremidades a'_1 são unidas com o vértice V .

Em seguida, descrevem-se arcos de centro V e que partam dos pontos f_1, g_1, h_1 , etc. e transporta-se sobre estes uma régua flexível onde se marca o desenvolvimento da circunferência média da boca superior, dividindo-a em oito partes iguais e flexionando a régua até que os pontos de divisão coincidam com os arcos correspondentes, formando assim os pontos f'_1, g'_1, h'_1 , etc. e desenhando-se a curva formada pela régua.



Cotovelo formado por virolas cônicas e oblíquas

Representação do cotovelo (fig. 1). Conhecendo o raio-eixo do cotovelo e os diâmetros médios das extremidades do mesmo, divide-se o arco-eixo em um número adequado de partes iguais (três, por exemplo), determinando os pontos de divisão 1, 2, 3 e 4. A partir destes pontos traçam-se tangentes ao arco-eixo, determinando por intersecção entre estas os pontos de intersecção O , O_1 e O_2 .

Marcando o centro nos respectivos pontos O e O_2 , descrevem-se arcos que passem pelos pontos ab e gh . Em seguida, traça-se uma vertical (fig. 3) marcada por um ponto em qualquer posição e, a partir deste ponto e para cima, marcam-se as distâncias R e R_2 iguais aos raios R e R_2 da figura 1, determinando dois novos pontos. A distância existente entre estes dois pontos é dividida em duas partes iguais, determinando assim a distância R_1 . Com um raio igual a esta distância, descreve-se uma circunferência de centro O_1 , determinando

sobre as distâncias anteriores os pontos de intersecção c , d , e e f .

Os pontos a , b , c , d , e , f , g , e h são unidos por meio de retas, como se pode ver na ilustração, ficando assim representado o cotovelo (a figura 2 representa a vista de perfil).

Teoricamente, pode-se calcular o raio R_1 assim:

$$R_1 = R_2 + \frac{R - R_2}{2} = R - \frac{R - R_2}{2}$$

Uma vez representados os cones oblíquos que formam o cotovelo, desenvolvem-se estes da mesma maneira como foi explicado no exercício anterior.

Nota. Caso o raio de algum cone não seja acessível ao compasso, o desenvolvimento será feito por triangulação, como se explica na quarta parte deste livro.

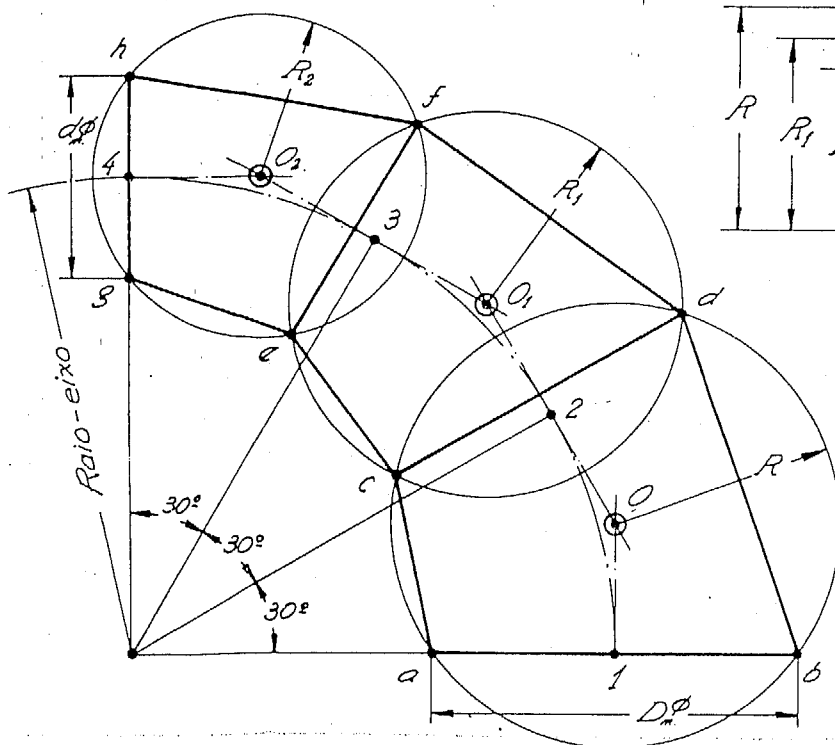


Figura 1

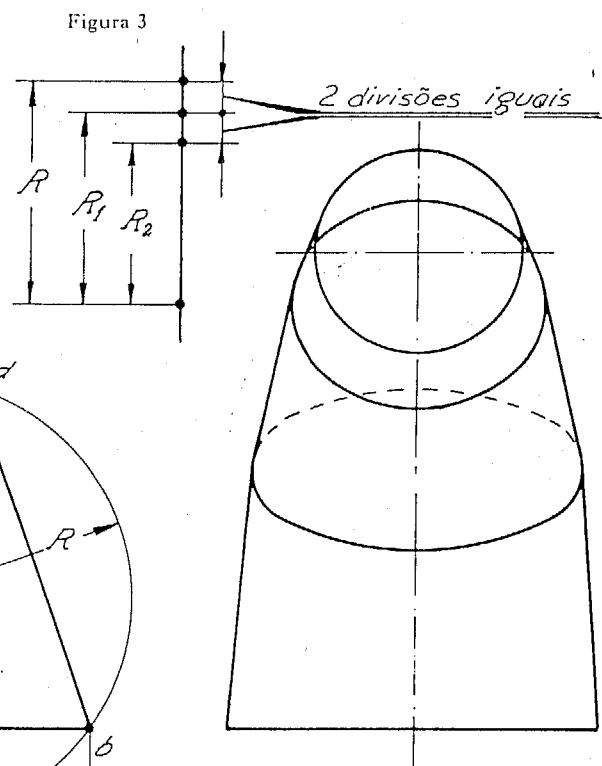


Figura 2

*Tronco de cone de bocas circulares,
perpendiculares e tangentes entre si*

Determinação do vértice V (fig. 1). Une-se o ponto a de tangência das duas bocas com o ponto O de intersecção dos eixos destas por meio de uma reta e no ponto a , traça-se uma perpendicular a esta reta, cortando o prolongamento da geratriz extrema $e-e_2$ no ponto V , sendo esta o vértice do cone.

Desenvolvimento lateral (fig. 2). O desenvolvimento pode ser feito seguindo qualquer um dos dois procedimentos do exercício 54. Neste caso, o desenvolvimento foi feito pelo primeiro procedimento.

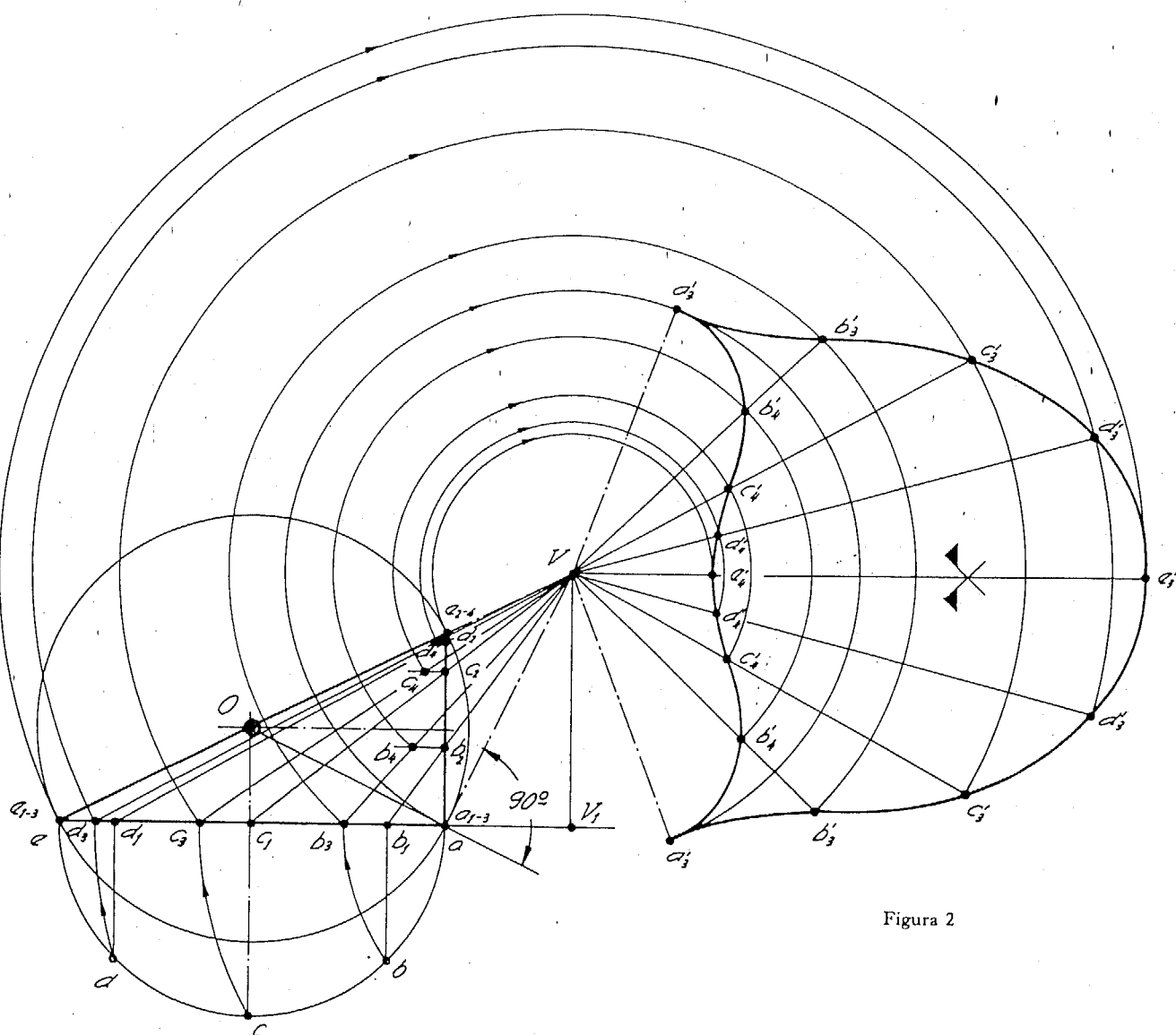


Figura 1

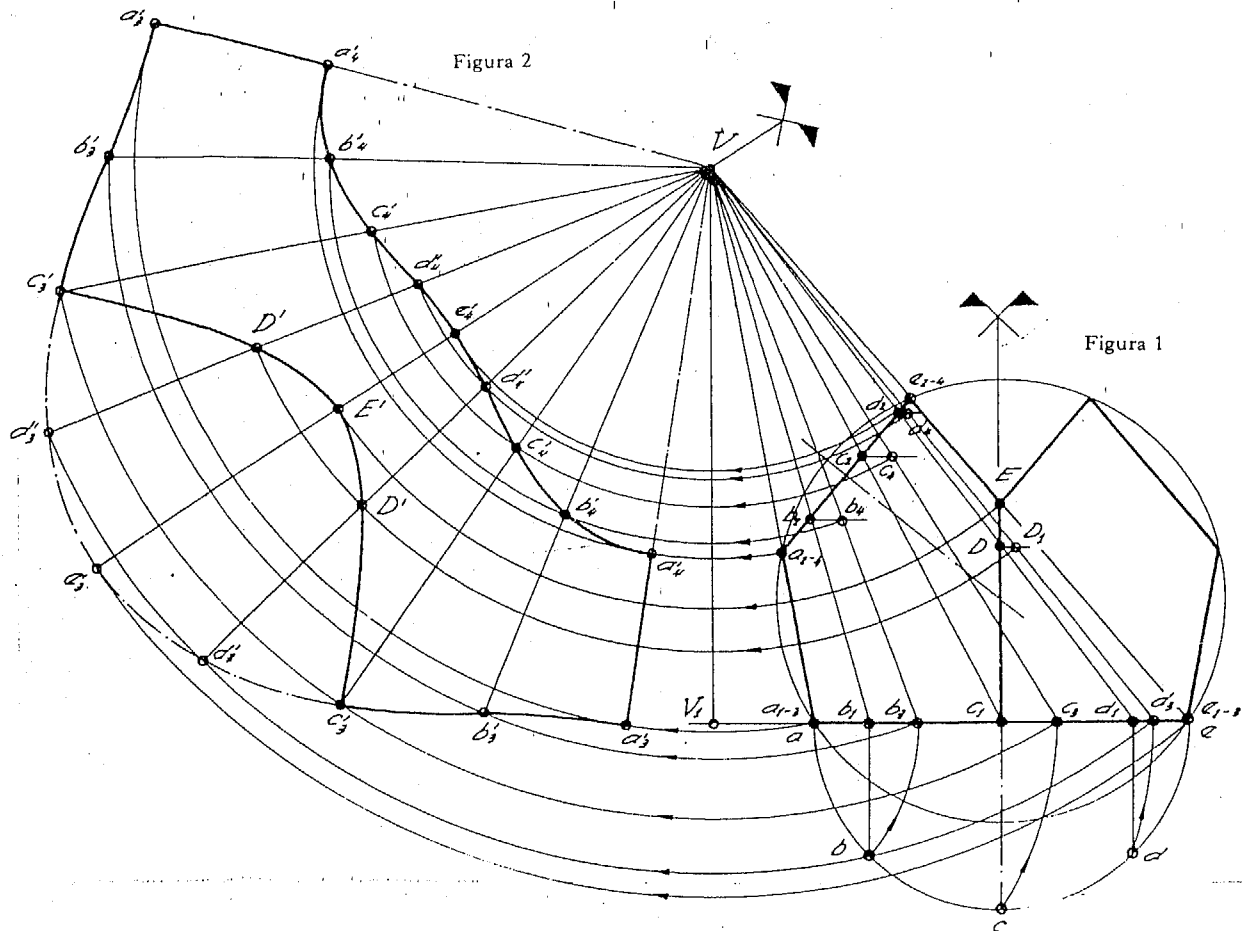
Figura 2

Calça de bocas circulares e inclinadas entre si

Como se vê facilmente na figura 1, esta peça é composta pela intersecção de dois troncos de cones oblíquos iguais, de bocas circulares e inclinadas entre si, só sendo necessário desenvolver um dos troncos de cone que ao mesmo tempo serve de gabarito para marcar o outro.

Para que este tronco de cone oblíquo possa ser desenvolvido por linhas radiais é necessário que pelos pontos extremos de suas bocas passe uma circunferência, cujo centro seja o ponto de intersecção dos eixos dessas bocas.

O desenvolvimento é feito da mesma maneira como se explica no exercício 54 (primeiro procedimento), procurando-se transportar sobre o desenvolvimento as distâncias VD_1 e VE da figura 1, determinando sobre as geratrizes da mesma origem (figura 2) os pontos D' e E' que se unem com o ponto a'_3 por meio de uma curva contínua, ficando assim desenhado o tronco de cone oblíquo. O ponto E (fig. 1) é determinado pelas geratrizes extremas dos dois cones que formam a calça e o ponto D_1 é determinado traçando uma paralela à base a partir do ponto D até cortar a geratriz real Vd_3 .



Calça de três bocas circulares e inclinadas com respeito à base

Esta peça é composta por três troncos de cones oblíquos iguais, de bocas circulares e inclinadas com respeito à base.

Para facilitar o desenvolvimento de um dos cones que formam a calça, a representação é feita da mesma maneira como ilustra a figura 1.

A figura 2 representa a circunferência média da base, a linha de intersecção que forma este cone com os outros dois (120°) e um certo número de geratrizes necessárias para desenvolver o tronco de cone.

Representação da curva de intersecção. Uma vez representadas as geratrizes necessárias nas projeções horizontal e vertical, projetam-se os pontos D, E, F e G perpendicularmente, determinando sobre as geratrizes da mesma origem (fig. 1) os pontos de intersecção D_1, E_1, F_1 e G_1 que se unem com o ponto c_1 por meio de uma curva contínua,

ficando assim representada a curva de intersecção.

Traçado das geratrizes reais. Prolonga-se o eixo horizontal (fig. 2) e giram-se os pontos a, b, c , etc., em redor do ponto V_1 até cortar o prolongamento do eixo horizontal, determinando novos pontos que são projetados perpendicularmente ao prolongamento da base da calça, cortando-a nos pontos a_3, b_3, c_3 , etc. Estes pontos são unidos com o ponto V , determinando assim as geratrizes reais do cone.

Os pontos a_2, b_2 , etc. e D_1, E_1 , etc., são projetados paralelamente à base da calça, determinando sobre as geratrizes reais da mesma origem os respectivos pontos a_4, b_4 , etc. e D_2, E_2 , etc., obtendo-se assim todos os dados necessários para desenvolver o cone.

Este desenvolvimento é feito de forma análoga à dos anteriores.

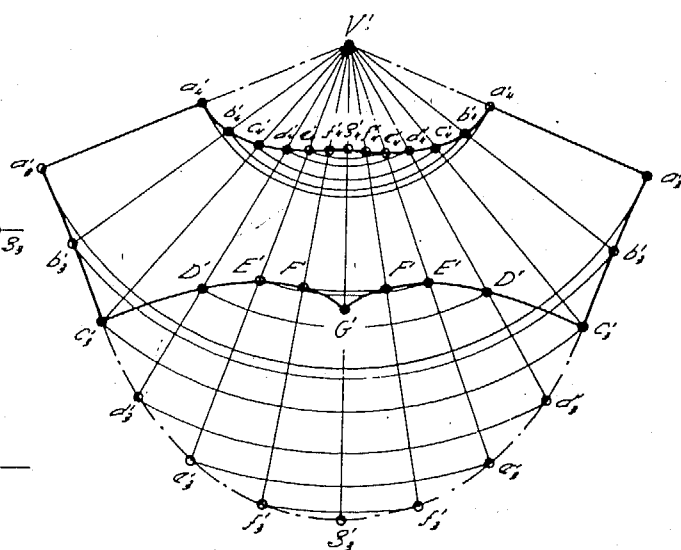
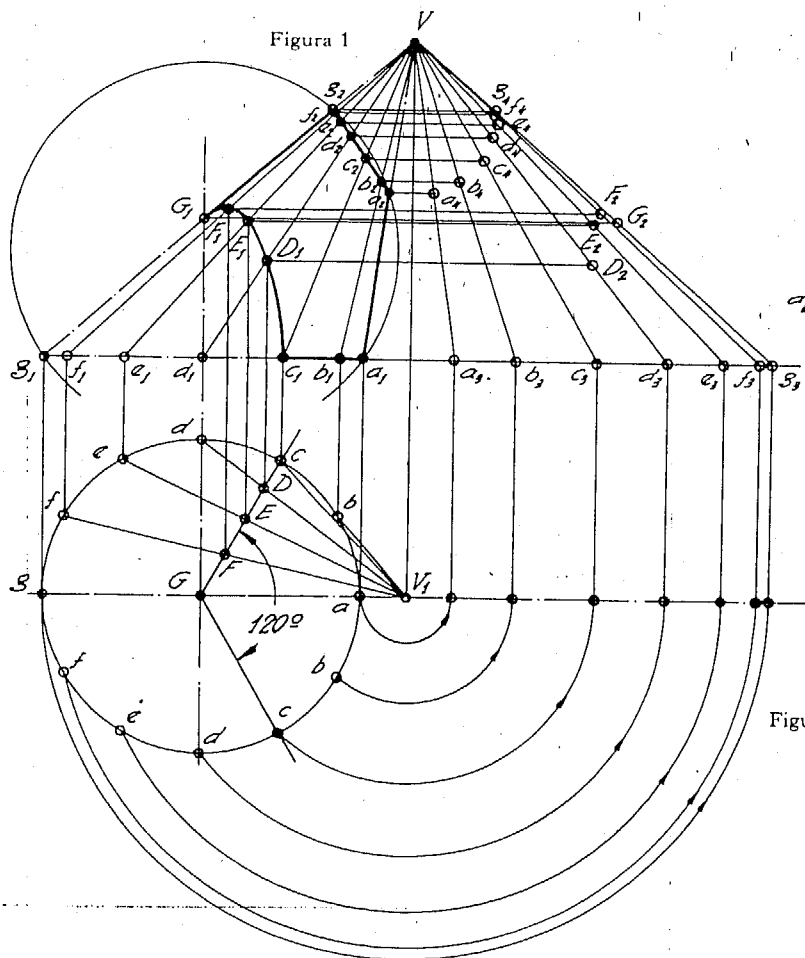


Figura 3

Calça formada por dois troncos de cones oblíquos desiguais

Esta peça de união é formada pela intersecção de um tronco de cone oblíquo de bocas circulares e paralelas e por outro tronco de cone oblíquo de bocas circulares e inclinadas entre si. Os vértices V e W dos respectivos cones oblíquos são determinados prolongando-se suas respectivas geratrizes extremas e a linha de intersecção é determinada unindo os pontos de intersecção 7 e 8 das geratrizes extremas de ambos os cones. A reta que une estes pontos corta o diâmetro da base no ponto 9, sendo, portanto, a reta 7-9 a linha de intersecção.

Para que o tronco de cone de vértice W possa ser desenvolvido por linhas radiais é necessário que pelas extremidades de seus diâmetros passe uma circunferência, assim como se vê na figura 1.

Estes troncos de cones desenvolvem-se separadamente e representam-se, tal como se vê nas figuras 2 e 4, tomando todos os dados necessários da figura 1 (as letras G e P dos cones das figuras 3 e 4 substituem os pontos 7 e 9, respectivamente, da figura 1).

Sobre o diâmetro médio da base do tronco de cone (fig. 2), descreve-se uma semicircunferência, dividindo-a em certo número de partes iguais (seis, por exemplo), determinando os pontos de divisão a, b, c , etc. Os pontos d, e e f são projetadas perpendicularmente ao diâmetro da base, cortando-a nos pontos d_1, e_1 e f_1 que, ao serem unidos com o vértice V por meio de retas geratrizes, determinam sobre a linha de intersecção os pontos D, E e F .

Depois projeta-se o ponto V perpendicularmente ao prolongamento da base, determinando sobre esta o ponto de intersecção V_1 , a partir do qual, tomando-o como centro, descrevem-se arcos que partam dos pontos de divisão b, c , etc. até cortar a base nos pontos b_2, c_2 , etc.

Estes pontos são unidos com o vértice V , determinando assim as geratrizes reais necessárias para

desenvolver o cone. Depois projetam-se os pontos D, E e F paralelamente à base do cone, determinando sobre as geratrizes reais da mesma origem os pontos de intersecção D_1, E_1 e F_1 , achando-se desta maneira todos os dados necessários para desenvolver este tronco de cone.

Sobre uma régua flexível marca-se o desenvolvimento da circunferência média da base do tronco de cone da figura 2, dividindo-a em doze partes iguais.

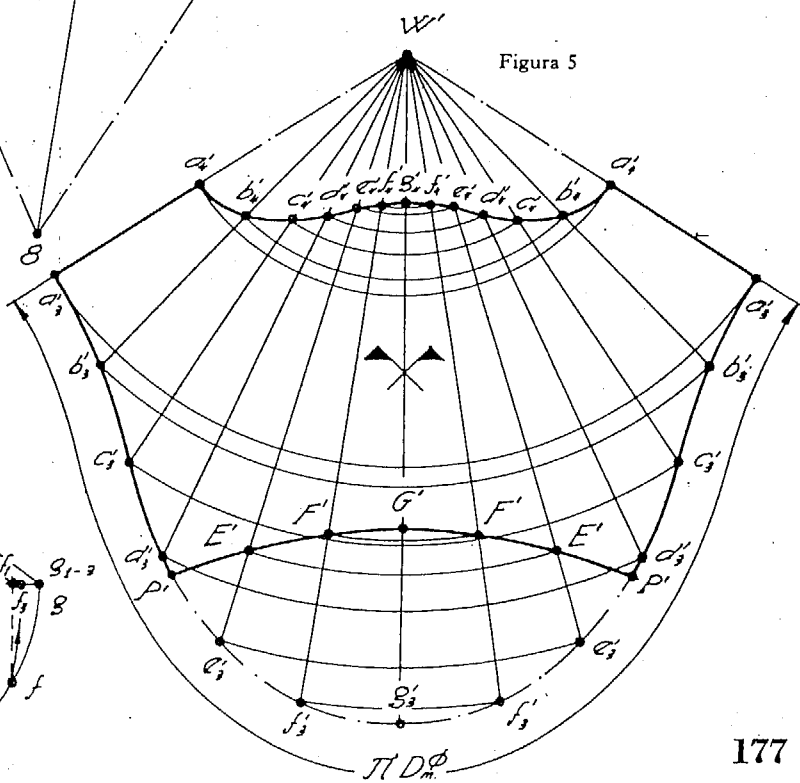
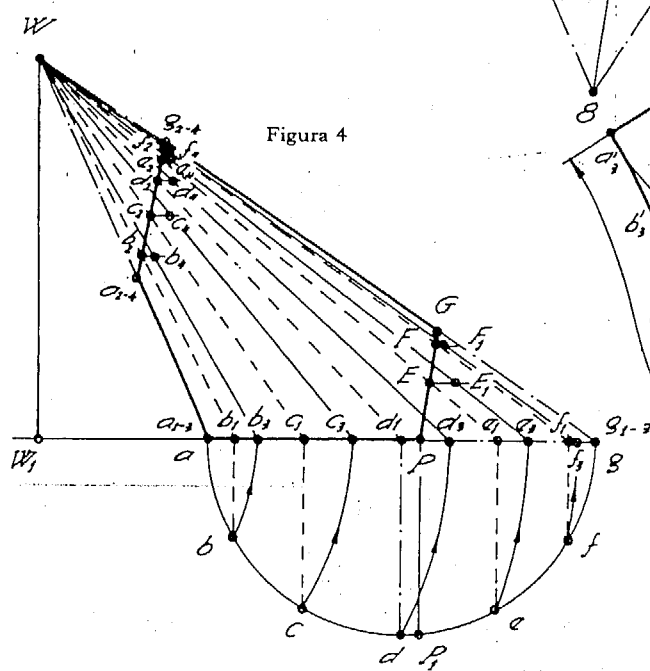
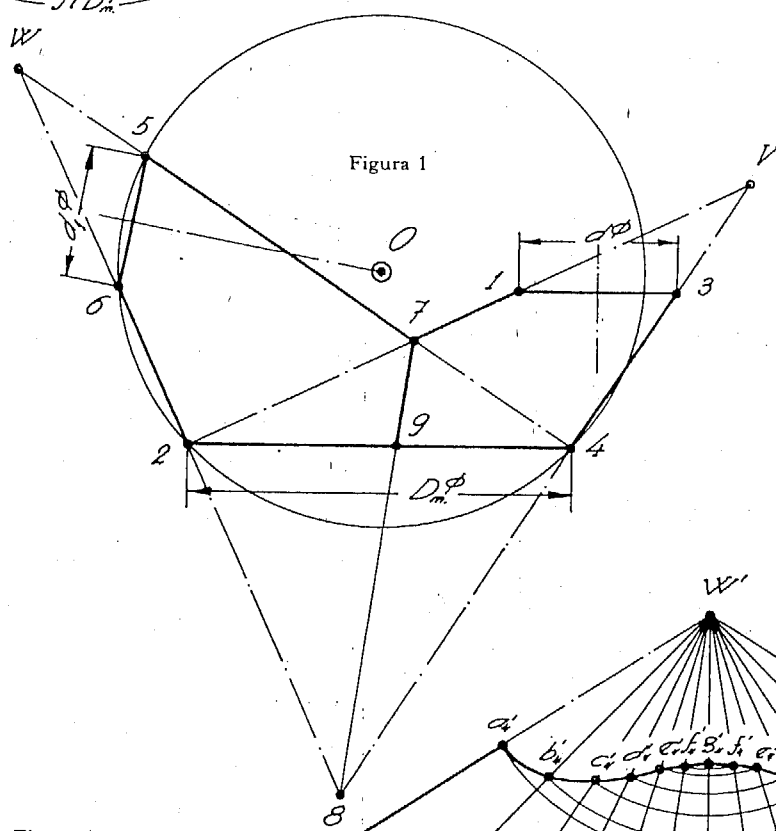
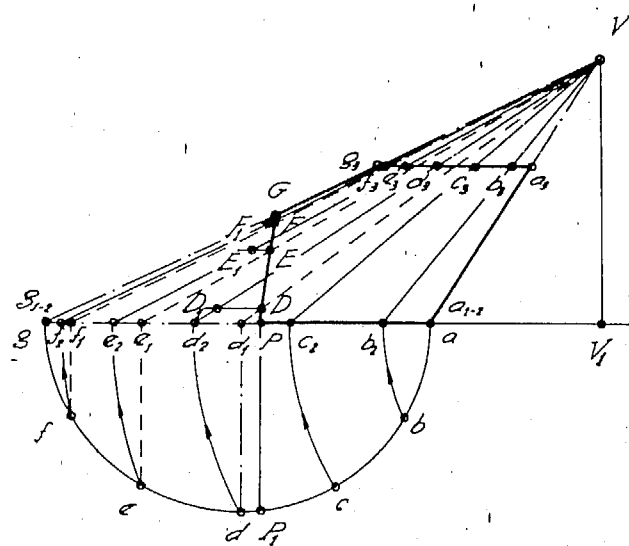
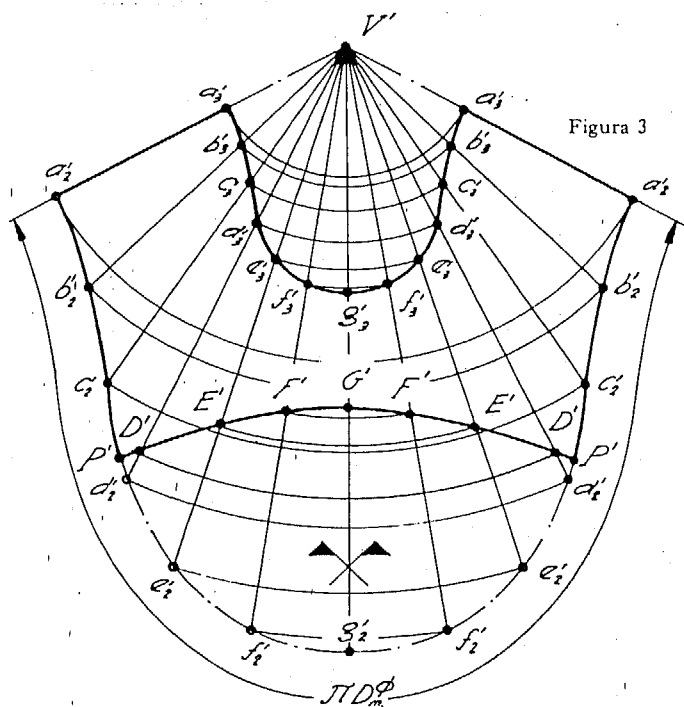
Em seguida, descrevem-se arcos de centro V' (fig. 3) e de raios iguais aos comprimentos das geratrizes reais Va_2, Vb_2, Vc_2 , etc., da figura 2, flexionando a régua flexível de tal forma que os arcos de divisão coincidam com os arcos correspondentes, determinando assim os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc., que se unem por meio de retas geratrizes com o ponto V' (desenha-se a curva formada pela régua ao ser flexionada).

Com raios iguais às geratrizes reais Va_3, Vb_3, Vc_3 , etc. da figura 2, descrevem-se arcos de centro V' (fig. 3) cortando as geratrizes da mesma origem nos pontos a'_3, b'_3, c'_3 , que se unem entre si por meio de outra curva contínua.

Também, marcando o centro no ponto V' , descrevem-se arcos de raios iguais às geratrizes VD_1, VE_1, VF_1 e VG da figura 2, cortando as geratrizes da mesma origem nos pontos D', E', F' e G' que se unem com o ponto P' por meio de uma curva contínua.

A distância d'_2P' traçada em arco (fig. 3) é igual ao comprimento do arco dP_1 da figura 2. O ponto P_1 é determinado traçando-se uma perpendicular ao diâmetro do cone a partir do ponto P até cortar a semicircunferência em P_1 .

O desenvolvimento do outro tronco de cone (figs. 4 e 5) é feito de forma análoga à do primeiro considerando-se que a operação deve sempre ser feita com os diâmetros médios.



Tremonha de boca circular e base ovalada, paralelas entre si

A representação desta peça é feita pela sua fibra neutra.

Na figura 1 (projeção horizontal) desenhou-se o oval da base da mesma maneira como se explicou na primeira parte do livro e também se desenhou a boca circular. Não é necessário desenhar o oval completo, já que o desenho de um quadrante (como o da boca circular) é suficiente para determinar os dados necessários para desenvolver esta tremonha.

Esta peça é formada por quatro partes de cones oblíquos de bases circulares iguais, duas a duas. Estas partes são limitadas pelas retas que unem os centros O_1 , O'_1 , O_2 , O'_2 dos arcos do oval.

Determinação dos dados necessários. Os arcos ac e ce (fig. 1) são divididos cada um em certo número de partes iguais (duas, por exemplo). Depois traça-se desde o centro O uma paralela à reta O_2c , determinando sobre a circunferência média da boca o ponto de intersecção P .

A partir do ponto c traça-se uma reta geratriz que passe pelo ponto P , determinando sobre os eixos vertical e horizontal os respectivos pontos V e W , sendo estes os vértices dos troncos de cones vistos em planta.

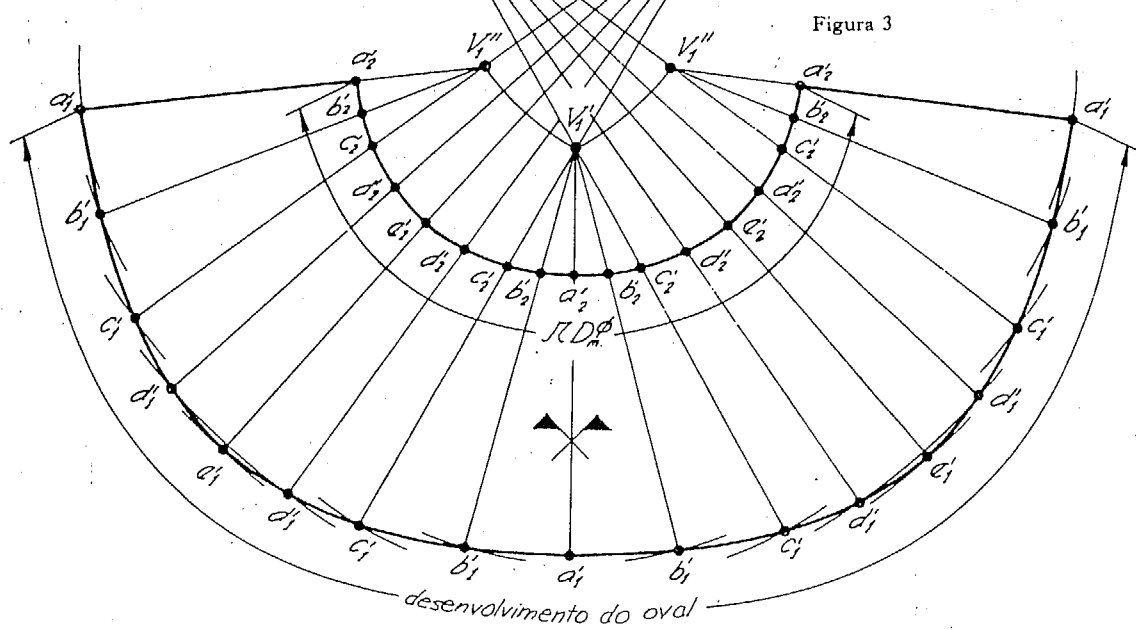
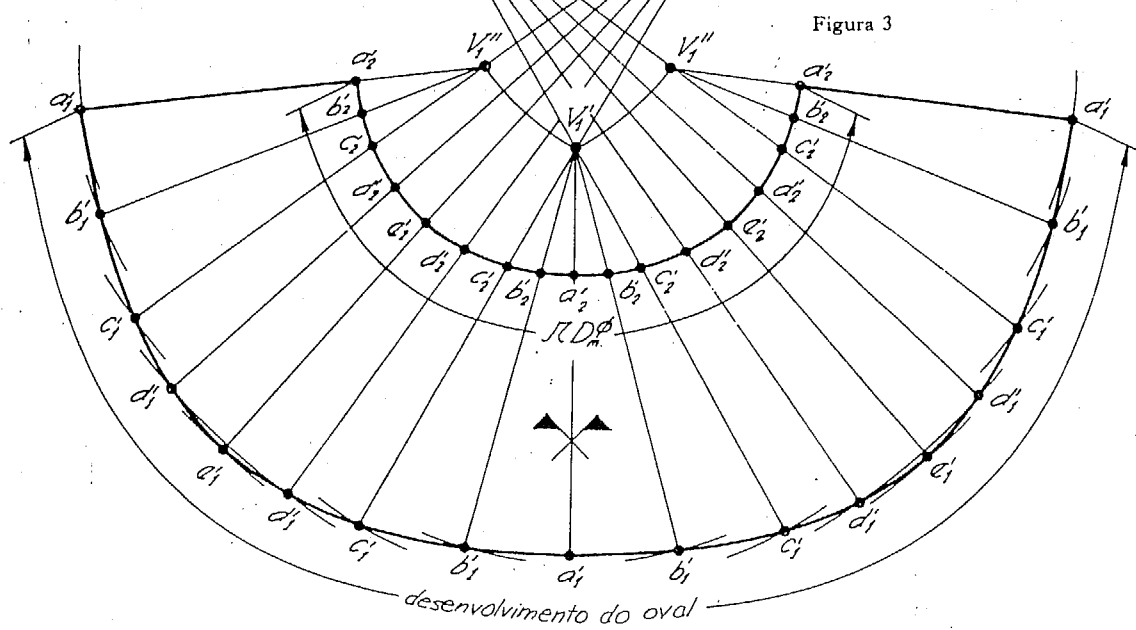
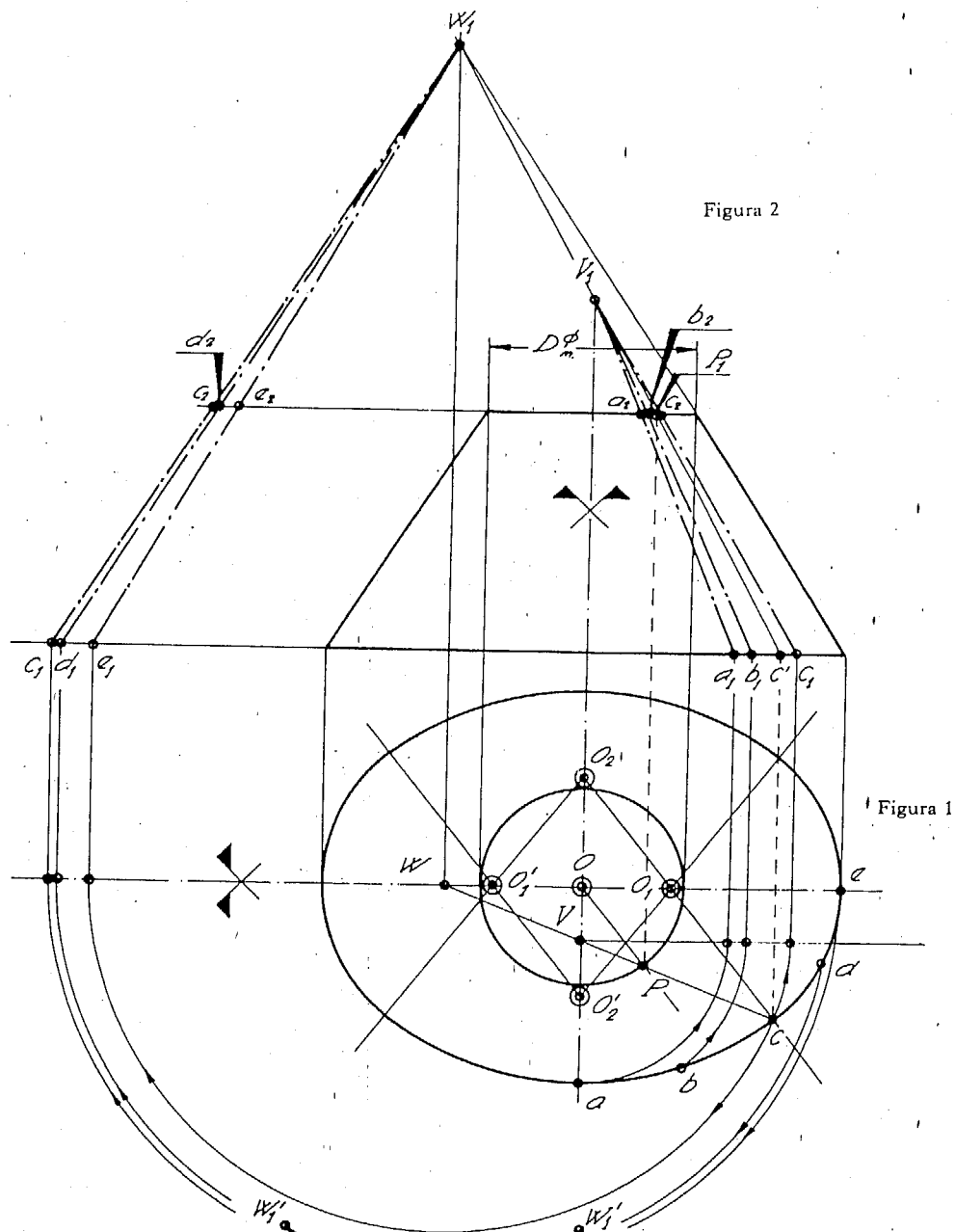
Desde o ponto W traça-se uma perpendicular à base da tremonha até cortar o prolongamento da geratriz extrema no ponto W_1 (fig. 2). O ponto c (fig. 1) é projetado à base da tremonha, determinando o ponto c' que se une com o ponto W_1 por meio de uma reta geratriz, cortando o eixo vertical no ponto V_1 , ficando assim representados os vértices W_1 e V_1 das partes de troncos de cones em sua projeção vertical. O ponto P (fig. 1) projetado no diâmetro da boca (fig. 2) cortará este em P_1 e a geratriz V_1c' no mesmo ponto.

Depois traça-se uma paralela ao eixo horizontal que parta do ponto V (fig. 1) e giram-se os pontos a , b e c em redor deste ponto, determinando sobre a paralela novos pontos a partir dos quais se traçam perpendiculares à base da tremonha (fig. 2), determinando os pontos de intersecção a_1 , b_1 e c_1 que se unem com o ponto V_1 , cortando o diâmetro da boca da tremonha nos pontos a_2 , b_2 e c_2 , ficando assim determinadas as geratrizes reais de uma das partes cônicas.

Marcando o centro no ponto W (fig. 1), descrevem-se arcos que partam dos pontos c , d e e , determinando novos pontos sobre o eixo horizontal, a partir dos quais se traçam perpendiculares à base da tremonha (fig. 2), determinando os pontos c_1 , d_1 e e_1 . Unem-se estes pontos com o ponto W_1 por meio de retas que cortam o prolongamento da boca nos pontos c_2 , d_2 e e_2 , determinando assim as geratrizes reais da outra parte cônica.

Desenvolvimento lateral (fig. 3). Flexiona-se uma régua até acoplá-la ao quadrante do oval e marcam-se nela os pontos de divisão a , b , c , d e e ; desta maneira temos sobre a régua flexível só a quarta parte do desenvolvimento do oval e, portanto, marca-se nela o desenvolvimento completo de tal maneira que os pontos de divisão da régua correspondentes a este desenvolvimento sigam a ordem a , b , c , d , e , d , c , b , a , b , c , d , e , d , c , b , a .

Marcando o centro no ponto V'_1 (fig. 3), descrevem-se arcos de raios iguais às geratrizes reais V_1a_1 , V_1b_1 e V_1c_1 , flexionando a régua flexível de tal forma que os pontos de divisão desta coincidam com os arcos da mesma origem, determinando os pontos de divisão a'_1 , b'_1 e c'_1 , (traça-se a curva formada pela régua). Estes pontos são unidos com o ponto V'_1 , prolongando as retas $c'_1V'_1$ e dando-lhes a distância $c'_1W'_1$ igual ao comprimento c_1W_1 da figura 2. Marcando o centro no ponto W'_1 , descrevem-se arcos de raios iguais às geratrizes reais W_1d_1 e W_1e_1 , flexionando a régua até que os pontos desta coincidam com os arcos da mesma origem, determinando os pontos d'_1 e e'_1 (em ambas as partes) que se unem com o ponto W'_1 . Marcando o centro neste ponto descreve-se um arco (em ambas as partes) que parta de V'_1 , determinando o ponto V''_1 sobre a reta W'_1c' . Desde V''_1 como centro descrevem-se arcos de raios iguais às geratrizes reais V_1b_1 e V_1a_1 , flexionando a régua até que os pontos b e a desta cortem os arcos correspondentes, determinando os pontos b'_1 e a'_1 . A partir dos pontos a'_1 , b'_1 , c'_1 , d'_1 , etc., transportam-se as geratrizes da mesma origem às respectivas distâncias a_1a_2 , b_1b_2 , c_1c_2 , etc., da figura 2, determinando os pontos a'_2 , b'_2 , c'_2 , d'_2 , etc., que são unidos por meio de uma curva contínua.



Tremonha de boca circular e de base em forma de ferradura

Uma vez determinadas as projeções horizontal e vertical desta peça (figs. 1 e 2), a primeira coisa que devemos determinar são as partes desdobráveis que a compõem. Para isto, operaremos da seguinte maneira:

Traçam-se retas desde o ponto O_2 (fig. 1 bis) que passem pelos pontos O_1 (em ambas as partes), determinando o ponto d_1 . Depois traçam-se retas que partam do ponto O e que sejam paralelas às retas anteriores, obtendo sobre a circunferência superior os pontos de intersecção d , unindo depois os pontos d e d_1 por meio de retas geratrizes.

Em seguida traça-se uma reta tangente aos arcos de centro O_1 , determinando os pontos de tangência f_1 que se unem com o ponto f por meio de retas geratrizes.

Também se unem os pontos O_1 e O_3 por meio de uma reta, formando os pontos de inflexão 1-1 que se unem com o ponto f por meio de retas geratrizes.

Desta forma são determinadas as geratrizes que limitam as partes desdobráveis que compõem a tremonha em questão.

Representação das geratrizes. Uma vez determinadas as geratrizes de limitação representadas na figura 1, as bocas devem ser representadas por suas linhas neutras, assim como na figura 1 bis. Representaremos as geratrizes de meia tremonha da seguinte maneira:

Prolongam-se as geratrizes de separação dd_1 e ff_1 , determinando assim os pontos V e W , dividindo-se o arco médio ad em certo número de partes iguais (três, por exemplo) e, a partir do ponto V , traçam-se retas geratrizes que passem pelos pontos de divisão a' , b , etc., determinando sobre o arco médio da base os pontos a_1 , b_1 , etc.

Depois divide-se o arco df em um número adequado (dois, por exemplo) e unem-se os pontos de divisão com o ponto W , determinando, neste caso, o ponto e_1 .

Também se divide o arco 1-3 em um número adequado de partes iguais e se unem estes pontos de divisão com o ponto f , ficando assim representadas as geratrizes necessárias para desenvolver a tremonha. Na outra metade da tremonha representaram-se várias geratrizes para dar uma idéia de como se deve curvar esta peça.

Traçado das geratrizes reais. Projetam-se os pontos d , d_1 , f e f_1 da figura 1 sobre a figura 2, determinando os pontos d' , d'_1 , f' e f'_1 que se unem por meio de retas geratrizes que determinam por seu prolongamento os pontos de intersecção V_1 e W_1 . Depois traçam-se paralelas aos prolongamentos das bocas (fig. 3) desde os pontos V_1 e W_1 e, a uma distância qualquer destas, traça-se uma perpendicular às mesmas, determinando os pontos de intersecção V_2 , Z , X e W_2 .

A partir do ponto X e à esquerda do prolongamento da base transportam-se as distâncias Va_1 , Vb_1 , Vc_1 e Vd_1 da figura 1, determinando os pontos a_2 , b_2 , c_2 e d_2 que se unem com o ponto V_2 por meio de retas que cortam o prolongamento da boca nos pontos a_3 , b_3 , c_3 e d_3 .

Desde o ponto Z e à esquerda (fig. 3) transportam-se as distâncias Wd , We e Wf da figura 1, determinando os pontos d_2 , e_2 e f_2 que, ao serem unidos com o ponto W_2 , determina-se os pontos d_3 , e_3 e f_3 .

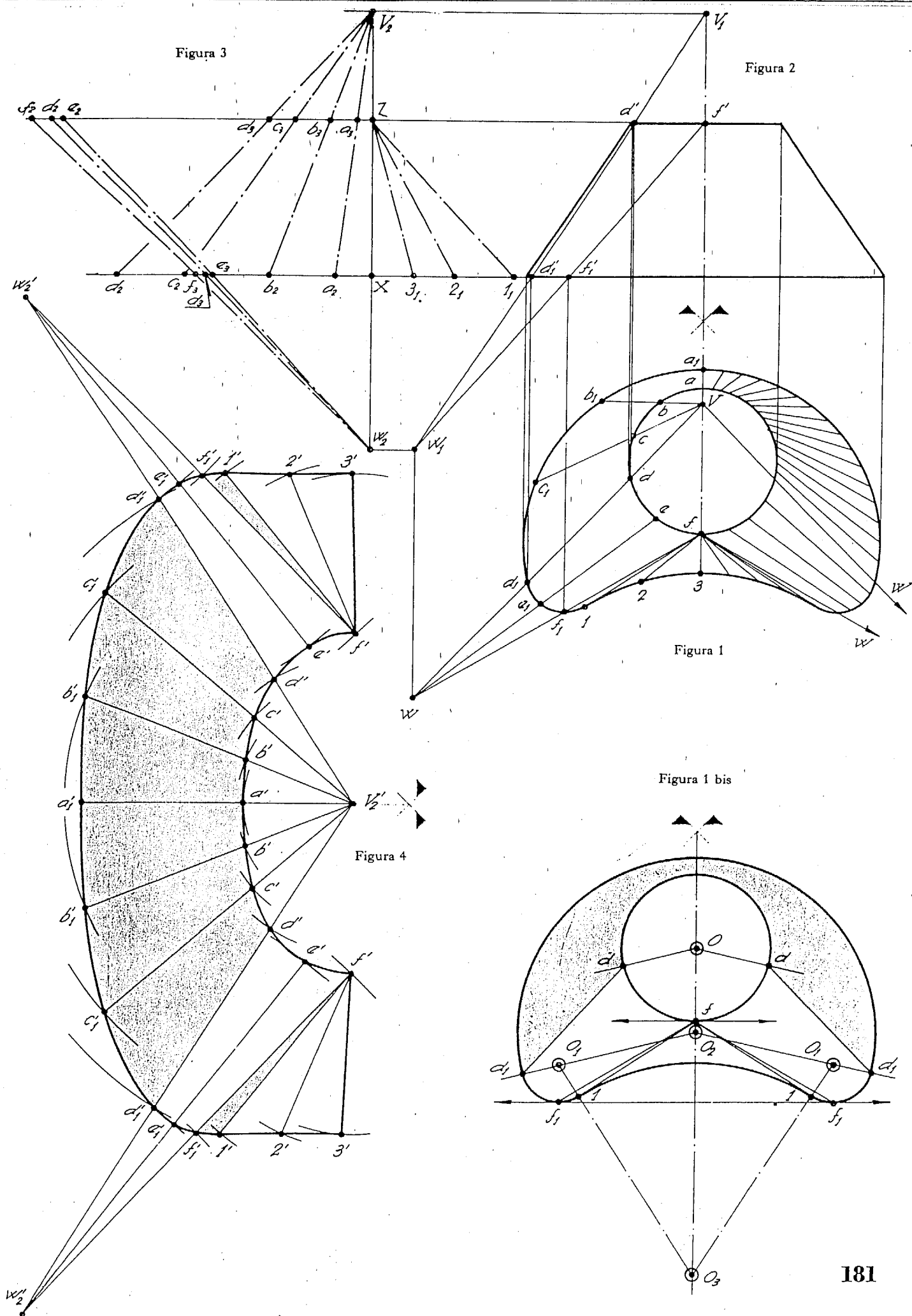
A partir de X transportam-se as distâncias $f-1$, $f-2$ e $f-3$, determinando os pontos 1_1 , 2_1 e 3_1 que se unem com o ponto Z , ficando assim determinadas todas as geratrizes que precisamos para desenvolver a tremonha.

Desenvolvimento lateral. Primeiramente flexiona-se uma régua até acoplá-la à curva neutra da base da figura 1 e marca-se nela os pontos a_1 , b_1 , c_1 , d_1 , e_1 , etc., (o desenvolvimento completo) e em seguida se traça uma reta $V'_2a'_1$ (fig. 4) de comprimento igual ao comprimento da geratriz real V_2a_2 da figura 3. Marcando o centro no ponto V'_2 (fig. 4) e em ambas as partes de a'_1 , descrevem-se arcos de raios iguais aos comprimentos das geratrizes reais V_2b_2 , V_2c_2 e V_2d_2 da figura 3. Depois coloca-se o ponto a_2 da régua flexível sobre o ponto a'_1 , flexionando-se a régua até que os pontos b_2 , c_2 e d_2 da mesma coincidam com os arcos anteriores da mesma origem, determinando os pontos b'_1 , c'_1 e d'_1 que se unem com o ponto V'_2 (traça-se a curva formada pela régua). As distâncias V_2a_3 , V_2b_3 , V_2c_3 e V_2d_3 da figura 3 são transportadas sobre as geratrizes da mesma origem da figura 4, determinando os pontos de intersecção a' , b' , c' e d' .

Sobre o prolongamento da geratriz $V'_2d'_1$ transporta-se a partir do ponto d'_1 a distância d_3W_2 da figura 3, determinando o ponto W'_2 a partir do qual se traçam arcos de raios iguais aos comprimentos das geratrizes reais W_2e_3 e W_2f_3 da figura 3, flexionando a régua até que os pontos e_2 e f_2 desta coincidam com os arcos da mesma origem nos pontos e'_1 e f'_1 , traçando a curva formada pela régua. Desde W'_2 traçam-se retas que passem por estes pontos de comprimentos iguais às geratrizes reais W_2e_2 e W_2f_2 da figura 3, determinando os pontos e' e f' que serão unidos por meio de uma curva contínua. Marcando o centro no ponto f' , descrevem-se arcos de raios iguais às geratrizes reais Z_21_1 , Z_22_1 e Z_23_1 , flexionando a régua até que os pontos 1, 2 e 3 desta coincidam com os arcos da mesma origem, determinando os pontos $1'$, $2'$ e $3'$ que se unem com o ponto f' por meio de retas geratrizes (também se traça a curva determinada pela régua), ficando assim desenvolvida a tremonha.

Figura 3

Figura 2



TRANSFORMADORES

EXERCÍCIO

62

Os transformadores são peças mais frequentemente construídas em oficinas de caldeiraria em virtude de suas múltiplas aplicações. Por conseguinte, neste capítulo vamos expor diversos tipos de transformadores cuja forma, como é fácil de observar, é quase sempre a mesma para todos.

Para que estes transformadores sejam desenvolvidos e trabalhados com a maior garantia, é necessário que sejam feitos como se explica a seguir.

Todos os dados que forem precisos para desenvolver esses transformadores serão representados por sua fibra interna (salvo quando for indicado o contrário, como será feito em alguns casos), assim como vemos no quadrante inferior direito (fig. 1) e na projeção vertical (fig. 2), já que as geratrizes de meio desenvolvimento de um transformador (fig. 3) ficariam da forma como se vê nos outros três quadrantes (fig. 1); portanto, nunca se deve representar pela fibra média os transformadores semelhantes a este, pois a base ficaria maior depois de ser curvada.

Para achar o diâmetro médio ($D_m^{\varnothing}$) do transformador, devemos representar a projeção vertical de forma análoga à da figura 2, sempre que a boca for maior ou menor que a base. (No exercício 19, correspondente ao tronco de cone, explica-se o motivo).

Para facilitar o trabalho de dobragem do transformador, vamos desdobrá-lo em duas metades, como se pode ver na figura 3, fazendo um pequeno corte como o da ilustração do detalhe A (fig. 4) pois, do contrário, tornar-se-ia muito custoso deixar em vértice a intersecção dos lados da base, principalmente em se tratando da construção de transformadores com chapa de mais de 6 mm.

Também é muito importante considerar a es-

pessura do flange da boca na hora de desenvolver o transformador.

As figuras 5 e 7 dão dois detalhes de como o flange pode ficar, embora haja também outras formas que, no entanto oferecem menor garantia quanto à qualidade de fixação. Quando o detalhe do flange for feito como na figura 5, o transformador será desenvolvido como se vê na figura 6. Neste caso, ao montar o flange, convém pontilhá-lo pela parte inferior, a fim de que a fixação do colo P_1 não coincida com nenhum ponto de soldadura.

Se o detalhe do flange for feito como se vê na figura 7, determinam-se todos os dados do transformador a partir da linha de curvatura do ressalto da base e desenvolve-se o transformador como um transformador normal, como o da figura 3, acrescentando depois o ressalto correspondente, como se vê na figura 8.

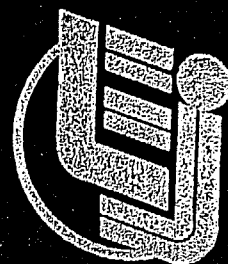
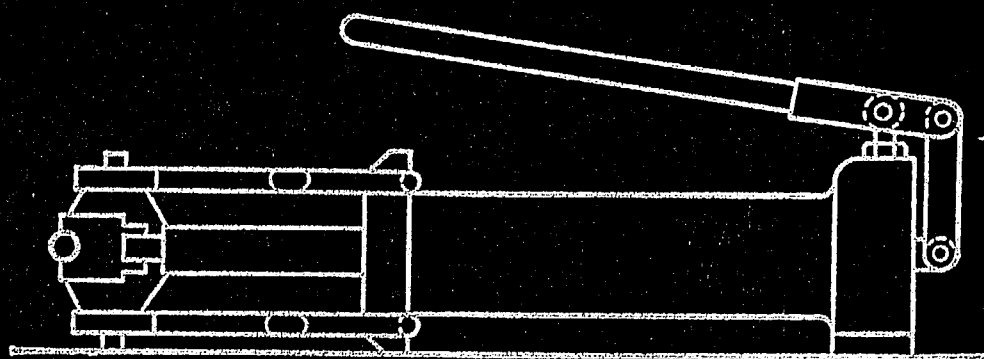
No momento de curvar estes transformador, devemos dobrar primeiro os ressaltos pela sua linha de curvatura. Depois fazemos a dobragem a partir das geratrizes das extremidades, tomando cuidado, porém, para não curvar o transformador desde a extremidade até o centro. A dobragem deve ser feita por etapas, curvando-se, por exemplo, um terço a partir de uma extremidade e começando depois pela outra extremidade, curvando então dois terços. Depois ainda passa-se para a outra extremidade para efetuar a curvatura até o centro. Finalmente, passe-se para a outra extremidade e se conclui a dobragem do transformador.

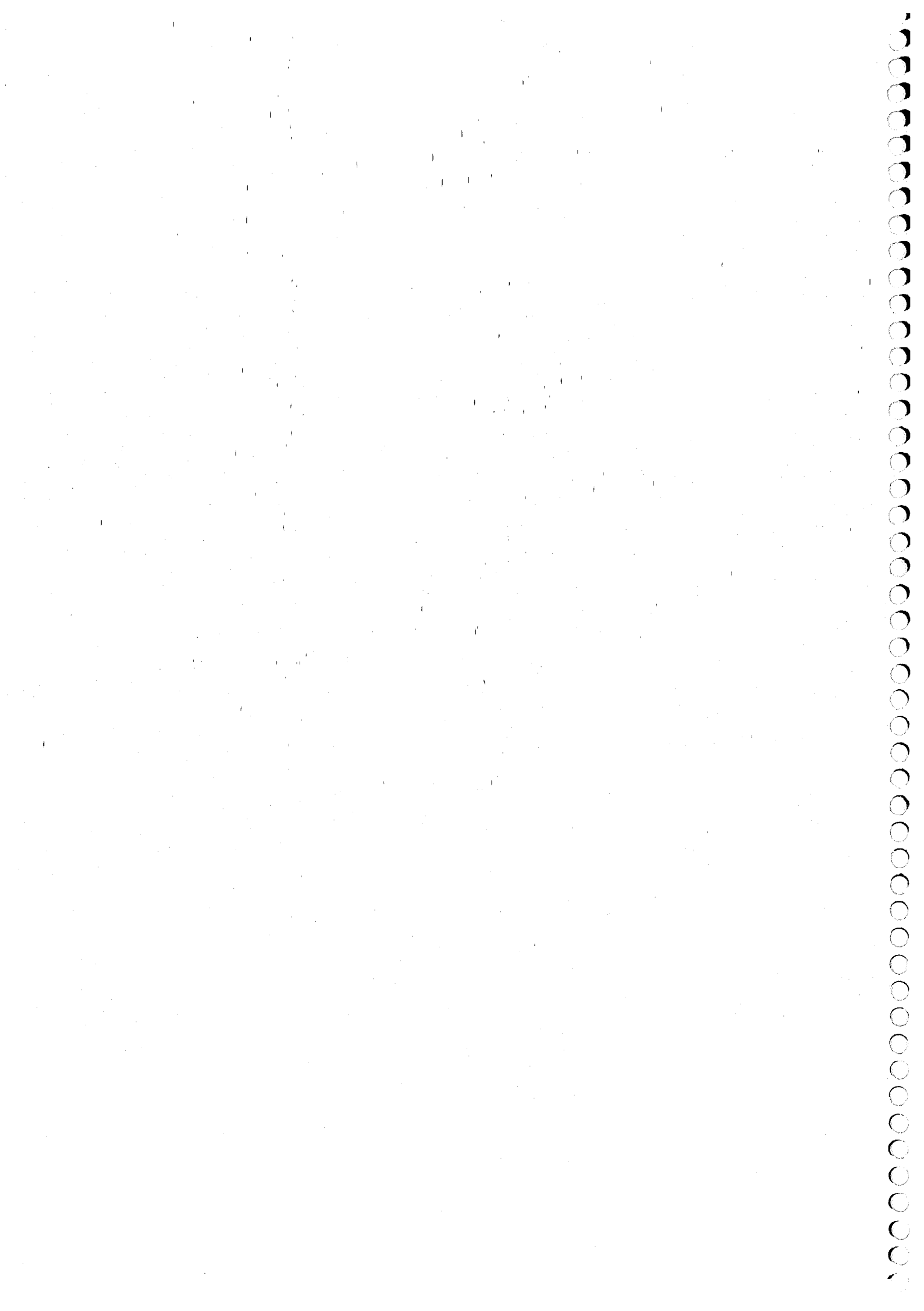
No caso desses transformadores, a dobragem apresenta reais dificuldades. O mais prático então é deixá-los um pouco fechados a fim de podermos através de golpes pela parte de fora atingir a forma satisfatória.

Angel Jorge Ayala

MANUAL TÉCNICO DE CALDEIRARIA

TEORIA E PRÁTICA





MANUAL TÉCNICO
DE
CALDEIRARIA

Teoria e Prática

VOL.
II

*Traduzido
por
Tatiana M. Dimitroff de Bragança Soares*

Angel Jorge Ayala

MANUAL TÉCNICO DE CALDEIRARIA

TEORIA E PRÁTICA

A. JORGE AYALA

Chefe de Oficinas de Construções

ALJU, S.A. Caldeiraria do aço-carbono.

Caldeiraria do aço inoxidável.

San Salvador del Valle (Vizcaya)



LEJ — LIVRARIA E EDITORA JÁCOMO LTDA.

Av. Ipiranga, 1267 — 11º andar

São Paulo

1985

DEDICADO À MINHA ESPOSA E FILHOS

(Angel Jorge Ayala)

Editores: Jácomo Mastrochirico

Vito Antonio Mastrochirico

Tradutora: Tatiana M. Dimitroff de Bragança Soares

Composição: Aura Brasil Produções Gráficas Ltda.

Título original em língua espanhola:

TECNICA Y PRACTICA DE CALDERERIA

© URMO, S.A. de Ediciones. Bilbao

© 1985 copyright da tradução em português da

LEJ — Livraria e Editora Jácomo Ltda.

Av. Ipiranga, 1267 - 11º andar

Primeira Edição Brasileira, 1985

Proibida toda e qualquer reprodução para a língua portuguesa.

Dépósito Legal: Bl. 1830-1975

ISBN: 84-314-0258-X

Impresso no Brasil

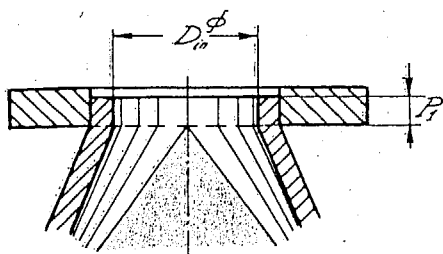
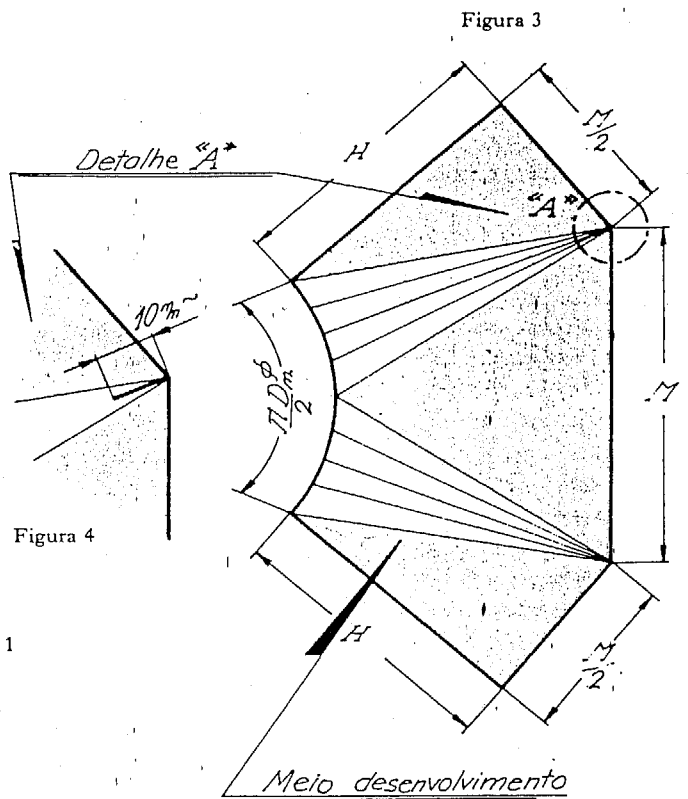
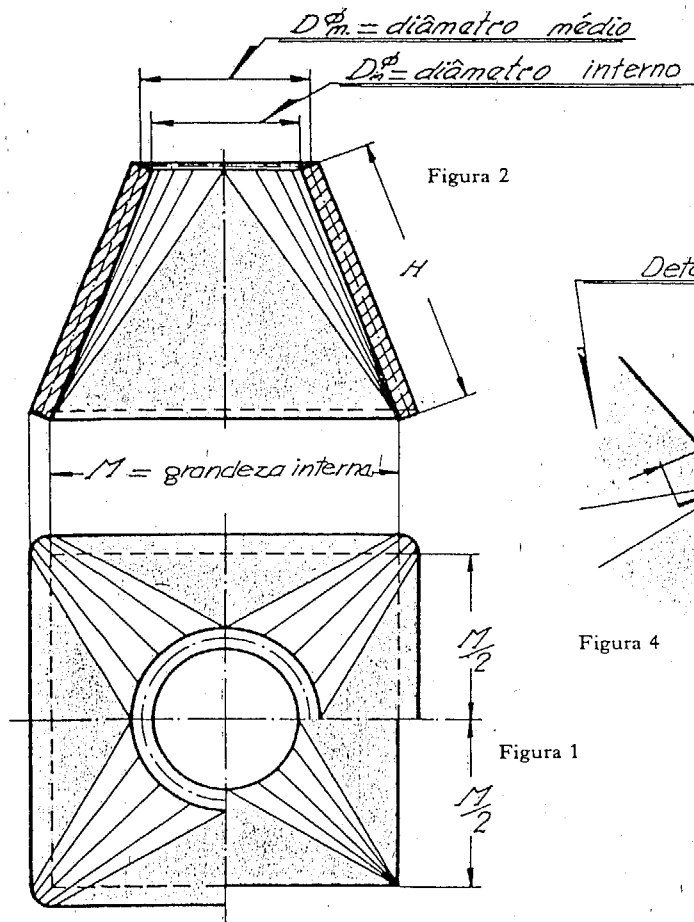


Figura 5

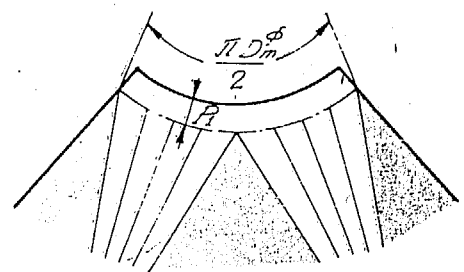


Figura 6

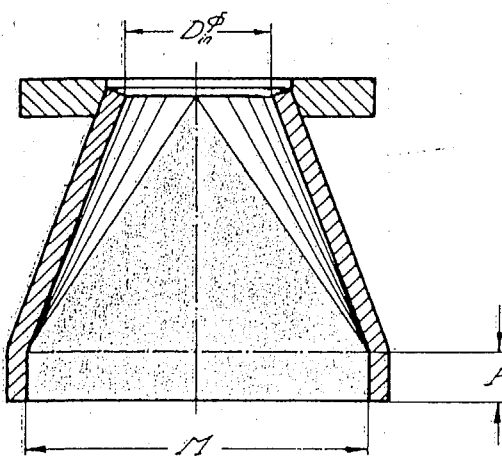


Figura 7

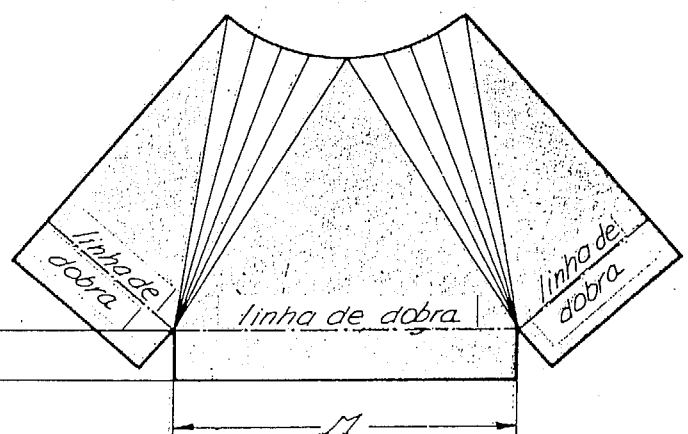


Figura 8

Transformador de boca circular e de base quadrada e paralela, situada em um mesmo eixo

Este transformador compõe-se de quatro segmentos de cones oblíquos iguais e de quatro superfícies planas triangulares também iguais. Nas projeções horizontal e vertical (figs. 1 e 2) o transformador foi representado por sua fibra interna.

Como os quatro segmentos de cones são iguais, só determinaremos os dados de um deles; portanto, dividiremos o quadrante interno de circunferência (fig. 1) em um número de partes iguais (dois, por exemplo), unindo depois os pontos de divisão a , b e c com o ponto A por meio de retas geratrizes. Estas geratrizes são giradas em redor do ponto A , determinando novos pontos sobre o prolongamento do lado $A-A$. A partir destes pontos traçam-se perpendiculares, ao prolongamento da boca superior (fig. 2), cortando-a nos pontos a_1 , b_1 e c_1 . (O ponto a_1 e c_1 é o mesmo, já que as geratrizes Aa e Ac são iguais).

Os pontos a_1 , b_1 e c_1 são unidos com o ponto A_1 , ficando assim determinadas as geratrizes reais que precisamos para desenvolver o transformador (ver "Rotações" na primeira parte do livro).

Desenvolvimento (fig. 3). Em uma posição adequada traça-se a reta $A'-A'$ de comprimento igual ao comprimento interno M do lado da base do transformador (fig. 1) e, marcando o centro nos pontos A' , descrevem-se arcos de raios iguais à ge-

ratriz real A_1a_1 da figura 2, determinando, pela intersecção de ambos, o ponto a' . Depois descrevem-se arcos desde os pontos A' e em ambas as partes de a' com raios iguais às geratrizes reais A_1b_1 e A_1c_1 , determinando assim a posição dos pontos da curva da boca.

Em seguida, transporta-se sobre uma régua flexível meio desenvolvimento da circunferência mé-

dia da boca $\frac{\pi' \times D_m^{\phi}}{2}$ dividindo-se em quatro

partes iguais neste caso. Estes pontos de divisão são chamados a , b e c e colocaremos o ponto a da régua sobre o ponto a' do desenvolvimento, flexionando a régua até que os pontos b e c da mesma coincidam com os arcos da mesma origem, determinando os pontos b' e c' que se unem com os pontos A' , marcando ao mesmo tempo a curva deixada pela régua flexível.

Marcando o centro no ponto c' (em ambas as partes) descreve-se um arco de raio H , tomado da figura 2, e traçando outro arco desde o ponto A' de raio igual à metade do lado interno da base ($M/2$) determinaremos, por intersecção com o outro arco, o ponto B' que se une com os pontos A' e c' , ficando assim desenvolvido meio transformador. (As superfícies planas são sombreadas).

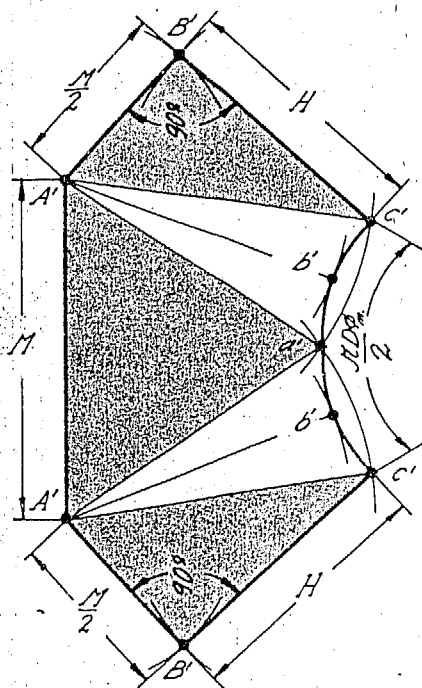


Figura 3

Figura 2

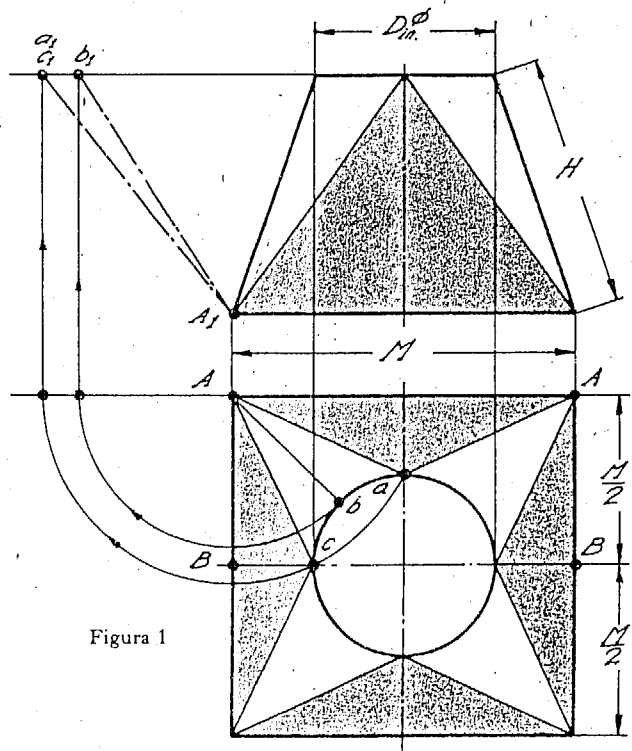


Figura 1

Transformador de boca circular e de base quadrada e paralela com os vértices arredondados

As figuras 1 e 2 dão as representações horizontal e vertical, respectivamente, do transformador em questão que é visto claramente formado por quatro troncos de cones oblíquos iguais e por quatro superfícies planas triangulares também iguais.

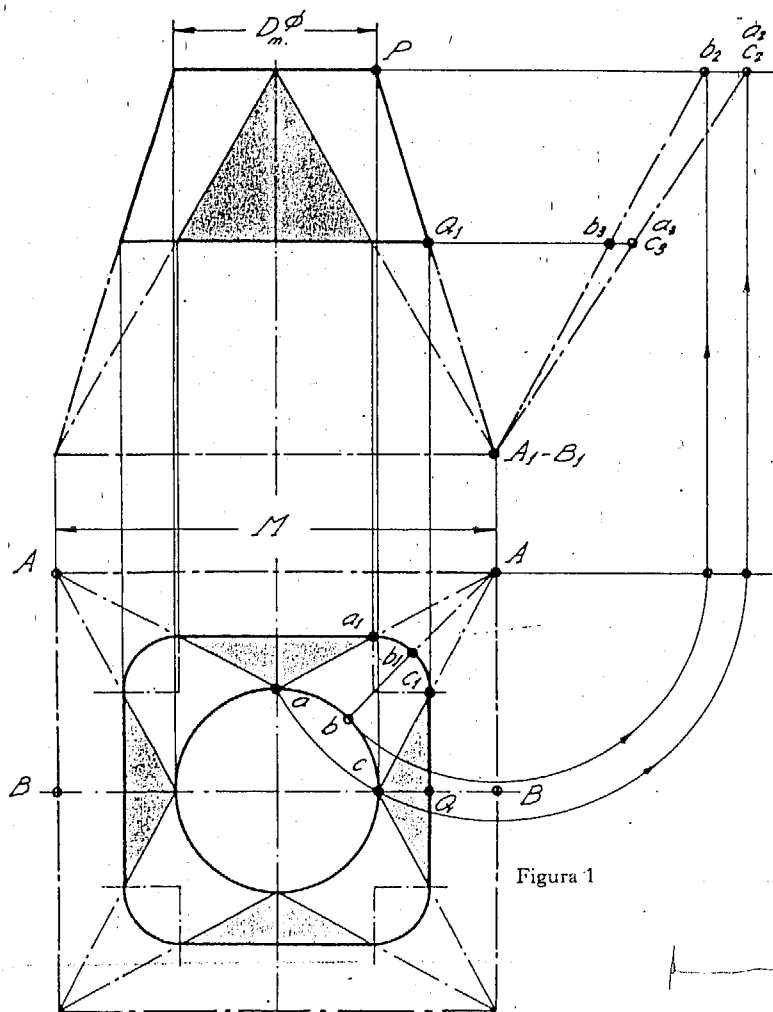
A representação deste transformador é feita por sua fibra média como qualquer outro que seja semelhante.

Prolongando as geratrizes aa_1 e cc_1 determinaremos o ponto A , sendo este ponto o vértice de um dos segmentos de cone oblíquo que forma o transformador.

Para desenvolver este transformador vamos representá-lo como se fosse um transformador como o do caso anterior, com a base desenhada por linhas imaginárias.

A representação das geratrizes e suas verdadeiras grandezas são determinadas da mesma maneira.

Desenvolvimento (fig. 3). Desenvolveremos meio transformador, como o do exercício anterior e transportaremos sobre as geratrizes $A'a'$, $A'b'$ e $A'c'$ as distâncias A_1a_1 , A_1b_1 e A_1c_1 , determinando os respectivos pontos a'_1 , b'_1 e c'_1 que se unem por meio de uma curva contínua e os pontos $a'_1-a'_1$ por meio de uma reta. A partir do ponto B' traça-se sobre a reta $B'c'$ a distância B_1Q_1 da figura 2, determinando o ponto Q'_1 que se une com o ponto c'_1 por meio de uma reta.



Transformador de boca circular e de base retangular paralela, situada em um mesmo eixo

A representação das projeções horizontal e vertical (figs. 1 e 2) é feita por sua fibra interna.

Tratando-se de um transformador composto de quatro segmentos de cones oblíquos e simétricos entre si e por quatro superfícies planas e triangulares iguais duas a duas, só serão representadas as geratrizes de um quadrante de transformador, achando depois as geratrizes reais da mesma maneira como as do exercício 63.

Desenvolvimento lateral (fig. 3). Este transformador, como os anteriores, é desenvolvido em duas metades para facilitar o trabalho ao ser curvado, desenvolvendo-se de forma análoga às anteriores.

Nota. Todas as superfícies planas dos transformadores das extremidades do desenvolvimento devem ser triângulos retângulos, como, por exemplo, os triângulos $A'B'C'$ deste exercício.

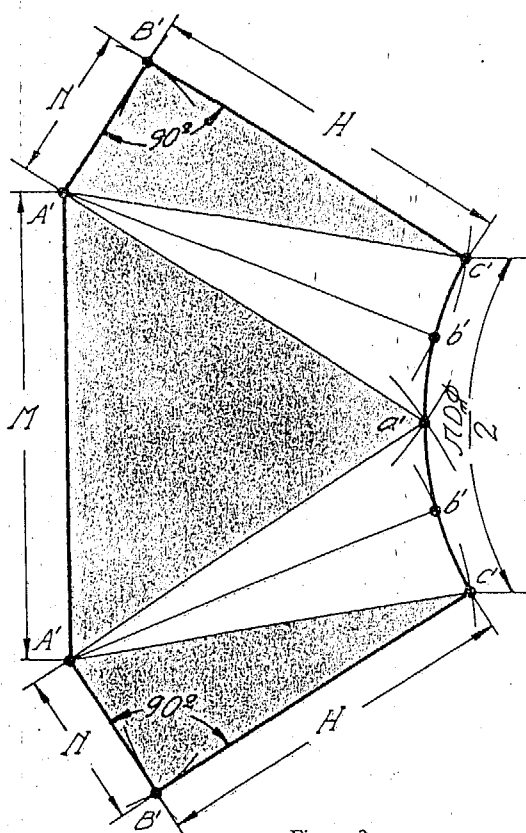


Figura 3

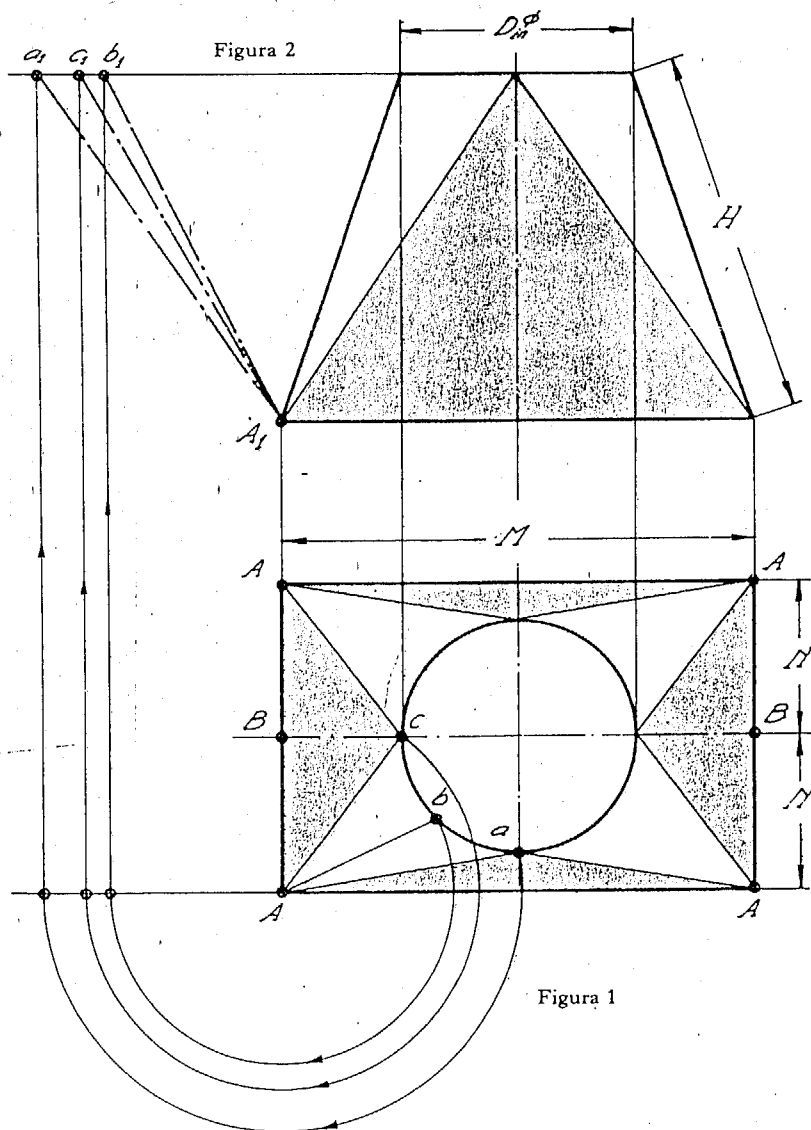


Figura 1

Transformador de boca circular e de base retangular e paralela, situada em eixo diferente

Este transformador é composto de quatro superfícies planas triangulares e de quatro segmentos de cones oblíquos, simétricos dois a dois.

Representa-se o transformador por suas fibras internas e todos os dados necessários para desenvolvê-lo são determinados da mesma maneira como nos exercícios anteriores. Com uma simples observação das figuras 1, 2, 3 e 4 veremos claramente a forma de determinar estes dados.

Desenvolvimento lateral (fig. 5). Em uma posição adequada, traça-se a reta $A'B'$ de comprimento M igual à grandeza M da figura 1 (medida interna).

Marcando o centro nos respectivos pontos A' e B' da reta, descrevem-se arcos de raios iguais às geratrizes A_1c_1 (fig. 3) e B_1c_1 (fig. 4), determinando pela intersecção de ambos o ponto c' .

Sobre uma régua flexível marca-se a metade do desenvolvimento da circunferência média, dividindo-a em quatro partes iguais neste caso. Depois descrevem-se arcos desde A' e B' em ambas as partes do ponto c' com raios iguais às respectivas gera-

trizes A_1b_1 , A_1a_1 e B_1d_1 , B_1e_1 , flexionando a régua até que os pontos de divisão desta coincidam com os arcos correspondentes, determinando os pontos b' , a' e d' , e' e traçando ao mesmo tempo a curva formada pela régua. Os pontos a' , b' , etc., são unidos por meio de retas com os respectivos pontos A' e B' .

Marcando o centro nos pontos A' e B' , descreve-se um arco de raio igual à distância N da figura 1 e desde a' descreve-se outro arco de raio igual à grandeza H da figura 2, determinando sobre o arco de centro A' o ponto de intersecção C' que se une com os pontos A' e a' por meio de retas. Tomando como centro o ponto e' , descreve-se outro arco de raio igual à grandeza H_1 da figura 2, determinando sobre o arco de centro B' o ponto de intersecção D' e que, ao mesmo tempo, será unido com o ponto B' e e' , ficando assim desenvolvido meio transformador que serve de gabarito para, marcar a outra metade, observando-se que um deve ser curvado contrariamente ao outro por serem simétricos.

Figura 4

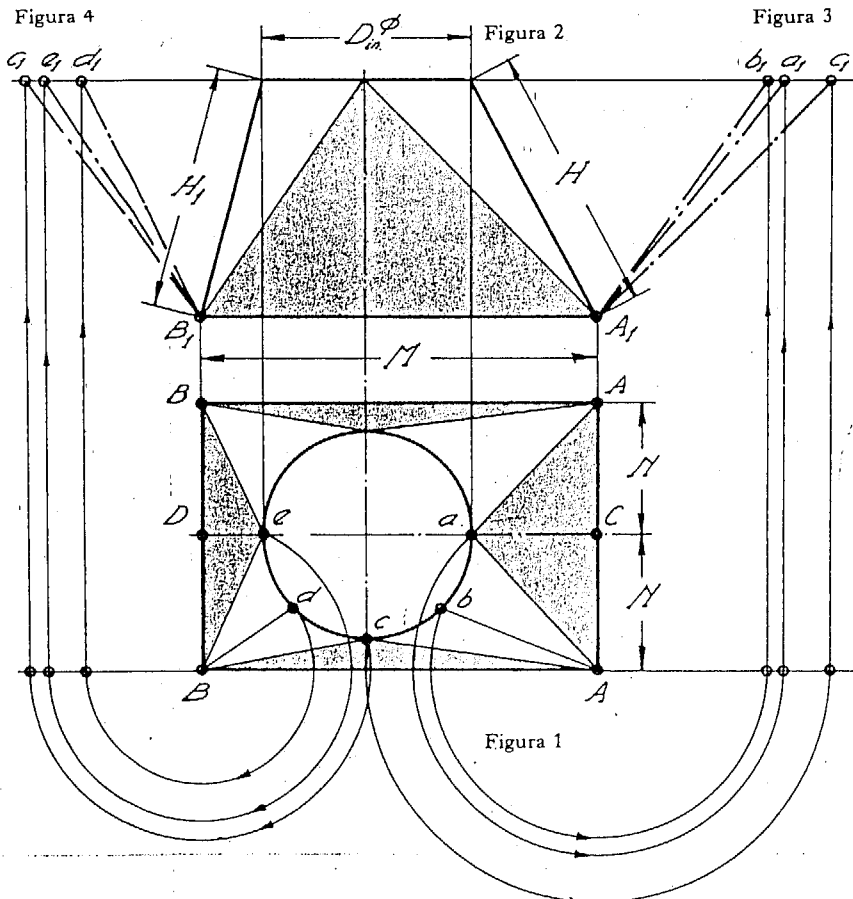


Figura 3

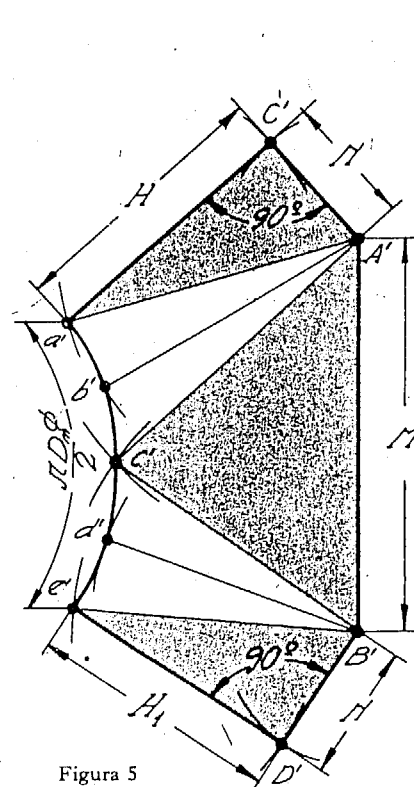


Figura 5

Transformador de boca circular e de base retangular paralelas entre si, sendo seus eixos situados em plano diferente

Uma vez representado o transformador por suas fibras internas, divide-se a circunferência interna da boca em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo) e unem-se os pontos de divisão a, b, c etc., com os respectivos pontos A, B, C e D por meio de retas geratrizes.

Marcando o centro nos respectivos pontos C e D (fig. 1), descrevem-se arcos que partam dos pontos e, f, g e g, h, a , determinando novos pontos sobre o prolongamento do lado CD . Desde estes pontos, traçam-se perpendiculares ao prolongamento da boca circular (fig. 2), cortando-a nos pontos c_1, f_1, g_1 e g_1, h_1, a_1 , respectivamente, que se unem por meio de retas com os pontos C_1 e D_1 , respectivamente, determinando assim as geratrizes C_1e_1, C_1f_1, C_1g_1 e D_1g_1, D_1h_1, D_1a_1 em sua verdadeira grandeza (figs. 5 e 6).

Em seguida, descrevem-se arcos de centros A e B , respectivamente, partindo dos pontos de divisão a, b, c e c, d, e , determinando sobre o prolongamento do lado AB e sobre o mesmo lado os pontos a partir dos quais são traçadas perpendiculares a uma paralela do mesmo lado à distância H (figs. 4 e 5) igual à altura H do transformador visto em elevação (fig. 2), cortando-a nos pontos a_1, b_1, c_1 e c_1, d_1, e_1 , respectivamente, que se unem com os pontos A e B , como se pode ver na ilustração, conseguindo-se desta forma as geratrizes reais Aa_1, Ab_1, Ac_1 e Bc_1, Bd_1, Be_1 , respectivamente.

Desenvolvimento lateral. Marca-se sobre uma régua flexível o desenvolvimento da circunferência média da boca, dividindo-a em oito partes iguais, colocando sobre os pontos de divisão as letras $a, h, g, f, e, d, c, b, a$.

Depois traça-se a reta $A'B'$ (fig. 7) de comprimento igual à distância M da figura 2. Marcando o centro nos respectivos pontos A' e B' , descrevem-se arcos de raios iguais às respectivas geratrizes reais Ac_1 (fig. 3) e Bc_1 (fig. 4), determinando pela intersecção de ambos os arcos o ponto c' . Este ponto é unido por meio de retas com os pontos A'

e B' , ficando assim desenvolvida uma das superfícies planas triangulares.

Depois descrevem-se arcos de centros A' e B' em ambas as partes do ponto c' , com raios iguais às respectivas geratrizes Ab_1, Aa_1 da figura 3 e Bd_1, Be_1 da figura 4.

Faz-se coincidir o ponto c da régua flexível anterior com o ponto c' do desenvolvimento, flexionando a régua até que os pontos b, a e d, e da mesma coincidam com os arcos da mesma origem, determinando assim os pontos b', a' e d', e' , respectivamente, que se unem com os pontos A' e B' , como se pode ver na ilustração.

Marcando o centro no ponto A' , descreve-se um arco de raio igual à distância N da figura 1 e marcando o centro no ponto a' descreve-se outro arco de raio igual à distância H_1 da figura 2, determinando sobre o arco anterior o ponto de intersecção E' que se une com os pontos A' e a' por meio de retas.

O ponto C' é determinado pela intersecção dos arcos de centros B' e e' de raios iguais às respectivas distâncias $L + N$ da figura 1 e e_1C_1 da figura 5. Este ponto é unido por meio de retas com os pontos B' e e' , ficando assim desenvolvida outra das superfícies planas. Tomando como centro o ponto C' , descrevem-se arcos de raios iguais às geratrizes reais C_1f_1 e C_1g_1 da figura 5 e flexionando a régua anterior de forma que os pontos de divisão f e g desta coincidam com os arcos da mesma origem, determinam-se os pontos f' e g' . Continua-se desta mesma maneira até terminar o desenvolvimento do transformador, como se pode ver na figura 7, traçando ao mesmo tempo a curva formada pela régua flexível para determinar os pontos a', b', c', d' , etc.

Nota. Embora na figura 7 tenha-se representado o desenvolvimento completo do transformador, o mais conveniente é fazê-lo em duas metades, assim como foram feitos os anteriores.

Figura 5

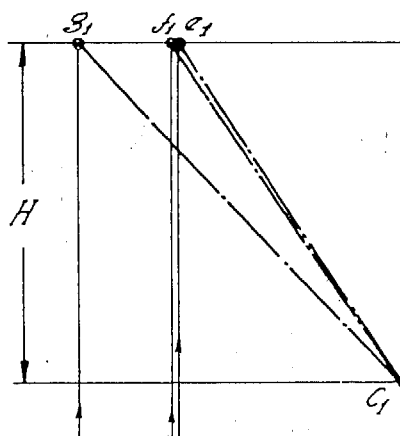


Figura 2

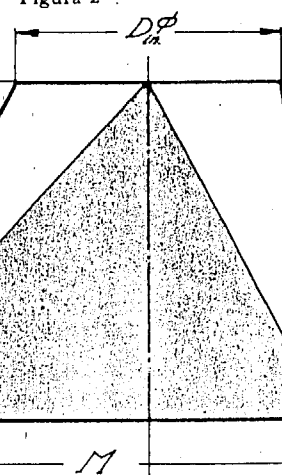


Figura 6

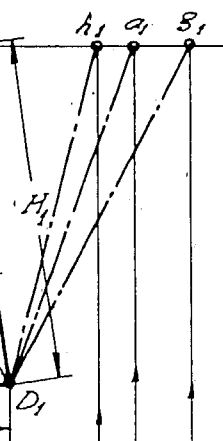


Figura 1

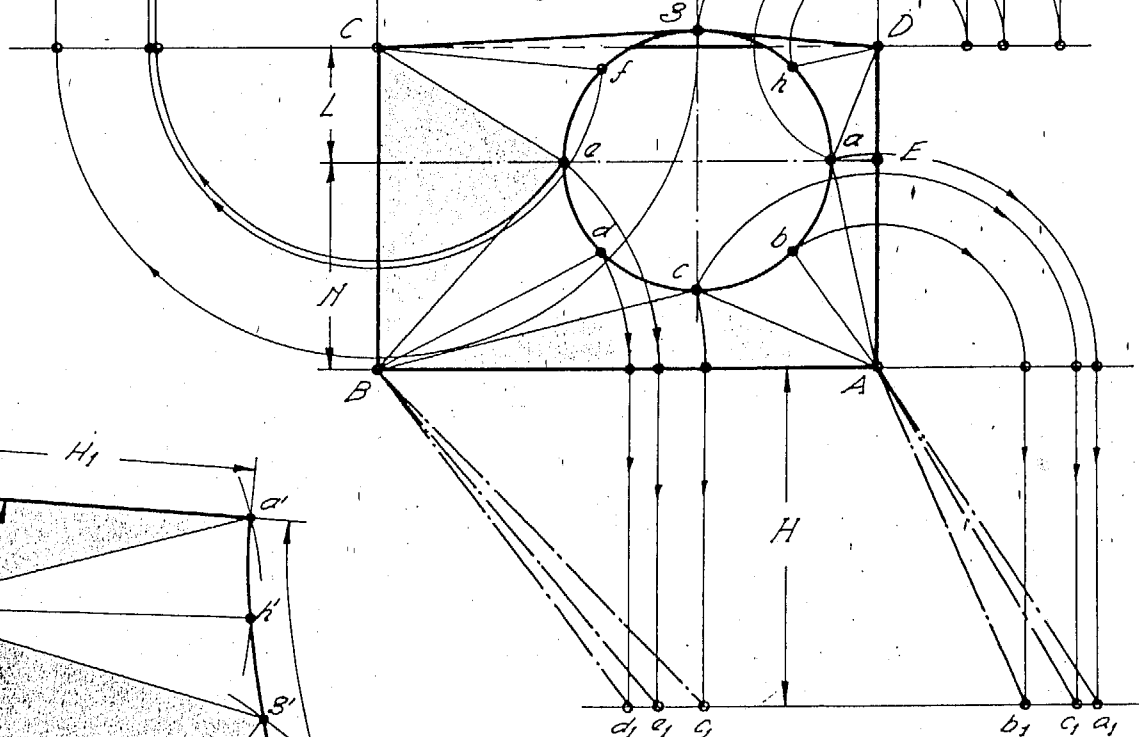


Figura 7

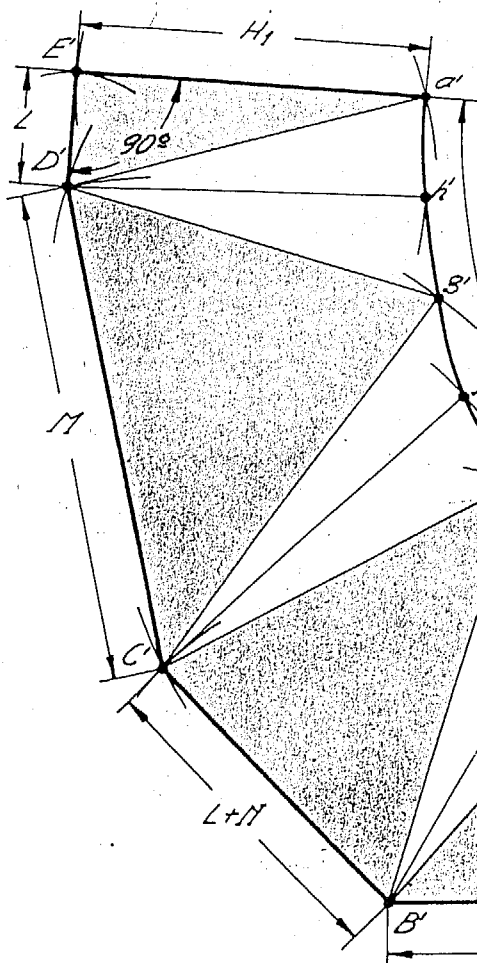


Figura 4

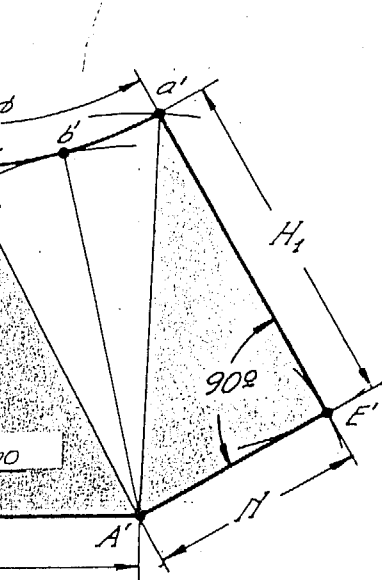


Figura 3

Tracado externo

Transformador de boca circular e de base trapezoidal e paralela

Uma vez representado o transformador em suas projeções horizontal e vertical por suas fibras internas, acharemos as geratrizes de separação das partes cônicas e superfícies planas da seguinte maneira:

Desde o centro O da boca (fig. 1), traçam-se perpendiculares aos lados da base, determinando sobre a circunferência interna da boca os pontos de intersecção a , i , f e c . Unindo estes pontos com os respectivos pontos A , B , C e D da base, determinaremos as geratrizes de separação.

Uma vez achadas as geratrizes de separação, representa-se um número adequado de geratrizes, assim como se vê na figura 1. (Os arcos ac , cf , etc. são divididos em certo número de partes iguais e são unidos com os respectivos pontos A , C , etc.).

Traçado das verdadeiras grandezas das geratrizes. Em uma posição qualquer, traça-se uma reta indefinida que parta do ponto A (fig. 1) e marcando o centro neste ponto descrevem-se arcos que partam dos pontos de divisão a , b e c , determinando novos pontos sobre essa reta a partir dos quais se traçam perpendiculares à mesma, cortando uma paralela à mesma de distância H (fig. 3) igual à altura H do transformador da figura 2 nos pontos a_1 , c_1 e b_1 , que são unidos com o ponto A , ficando assim determinadas as verdadeiras grandezas Aa_1 , Ab_1 , Ac_1 . As geratrizes reais Ba_1 , Bi_1 e Bj_1 (fig. 4) são determinadas de forma análoga às anteriores.

Depois traça-se uma paralela indefinida à base do transformador da figura 2, desde o ponto C (fig. 1), girando-se em redor deste ponto os pontos c , d , e e f , determinando alguns pontos sobre esta reta, a partir dos quais se traçam perpendiculares ao prolongamento da boca do transformador (fig. 5), determinando os pontos de intersecção c_1 , d_1 , e_1 e f_1 que, ao mesmo tempo, são unidos com o ponto C_1 por meio de retas, ficando assim determinadas as geratrizes reais C_1c_1 , C_1d_1 , C_1e_1 e C_1f_1 . Para achar as geratrizes reais D_1f_1 , D_1g_1 , D_1h_1 e D_1i_1 (fig. 6), operaremos de forma semelhante.

Desenvolvimento lateral. A primeira coisa que devemos fazer é descrever uma circunferência de centro O (fig. 1) de diâmetro igual ao diâmetro

médio da boca e traçar retas que partam do ponto O e passem pelos pontos a , b , c , d , etc. (não é necessário representar esta circunferência), determinando novos pontos sobre a circunferência média. Depois flexiona-se uma régua flexível até ajustá-la à circunferência média, marcando os pontos antes mencionados que serão marcados com as letras a , b , c , etc.

Em seguida, traça-se uma reta $C'D'$ (fig. 7) de comprimento igual à grandeza CD da figura 1 (medida interna) e marcando o centro nos pontos C' e D' , descrevem-se arcos de raios respectivos iguais às geratrizes reais C_1f_1 e D_1f_1 das respectivas figuras 5 e 6, determinando pela intersecção de ambos os arcos o ponto f' que se une com os pontos C' e D' , ficando assim determinada uma das superfícies planas.

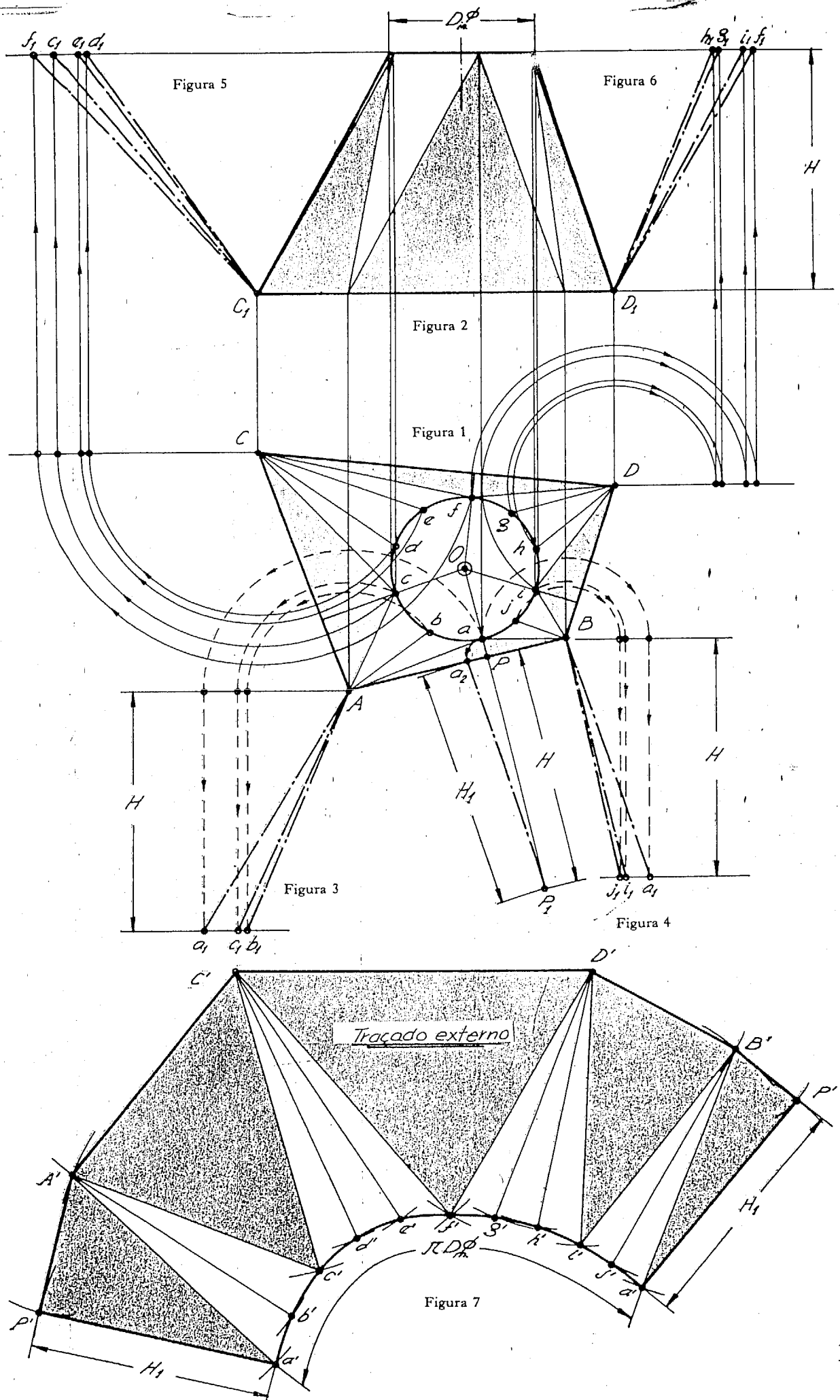
Marcando o centro nos respectivos pontos C' e D' , descrevem-se arcos de raios iguais às respectivas geratrizes reais C_1c_1 , C_1d_1 , C_1e_1 e D_1g_1 , D_1h_1 , D_1i_1 .

Em seguida, faz-se coincidir o ponto f da régua flexível anterior com o ponto f' do desenvolvimento e flexiona-se a régua até que os pontos e , d , c e g , h , i da mesma coincidam com os arcos da mesma origem, determinando os pontos e' , d' , c' e g' , h' , i' , que se unem com os respectivos pontos C' e D' por meio de retas geratrizes. Ao mesmo tempo que se flexiona a régua, traça-se a curva formada por esta.

Continua-se desta mesma maneira o desenvolvimento do transformador até completá-lo, tendo-se que dividi-lo em duas partes para melhor manejo na hora de curvâ-lo.

Nota. A distância H_1 da figura 7 é igual à distância H_1 da figura 4, tendo-se determinado esta ao girar o ponto a em redor do ponto P , determinando o ponto a_2 e unindo este ponto com o ponto P_1 .

O ponto P_1 (fig. 4) é determinado traçando-se desde o ponto O uma perpendicular ao lado AB , cortando a paralela de distância H no ponto P_1 . (A distância H é igual à altura H do transformador).



Transformador de boca elíptica e de base retangular e paralela

Este transformador é representado como os anteriores por sua fibra interna (figs. 1 e 2), dividindo-se o quadrante da elipse em um número adequado de partes iguais (três, por exemplo), determinando os pontos de divisão a , b , c e d que se unem com o ponto A por meio de retas geratrizes.

As grandezas reais das geratrizes são determinadas de forma análoga à dos exercícios anteriores.

Desenvolvimento lateral de meio desenvolvimento (fig. 3). O desenvolvimento é determinado

da mesma maneira como se foi fazendo até agora com os transformadores anteriores, procurando-se traçar um quadrante de elipse correspondente à boca por seu eixo neutro e dividindo-o com um mesmo número de partes iguais que às da elipse interna.

Uma vez obtidos os pontos de divisão do quadrante da elipse neutra da boca, acopla-se a esta curva uma régua flexível e marcam-se nela os pontos de divisão, sendo esta a régua transportada ao desenvolvimento.

Figura 2

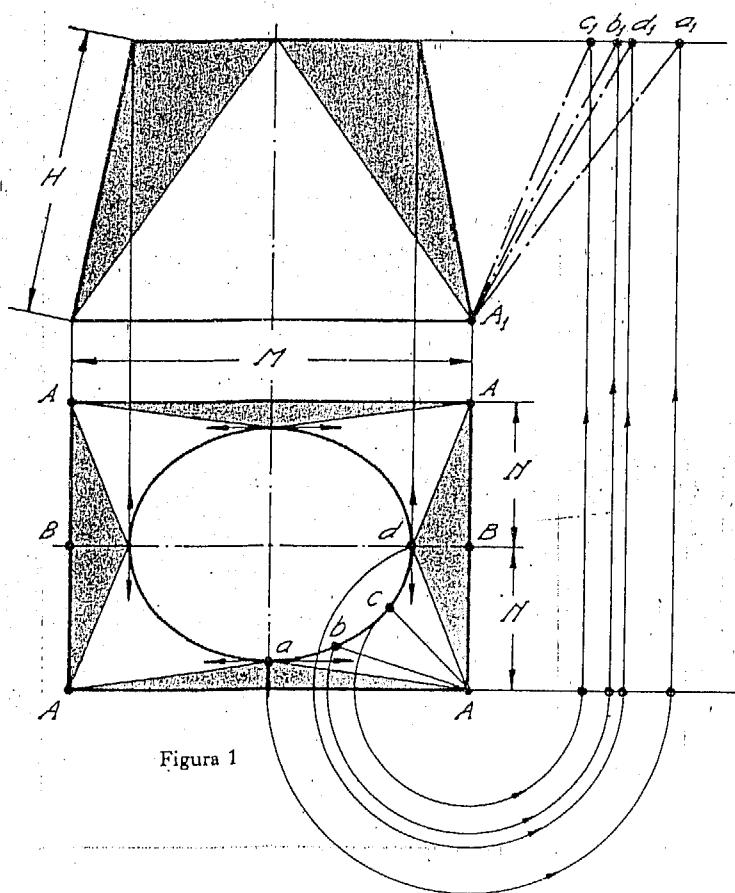
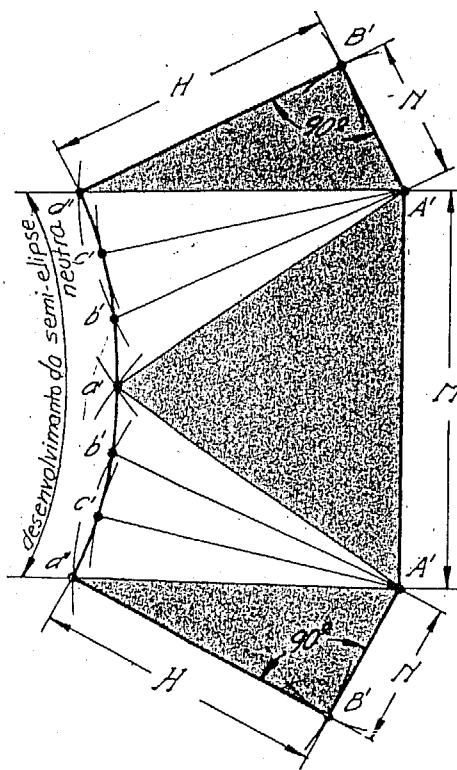


Figura 1

Figura 3



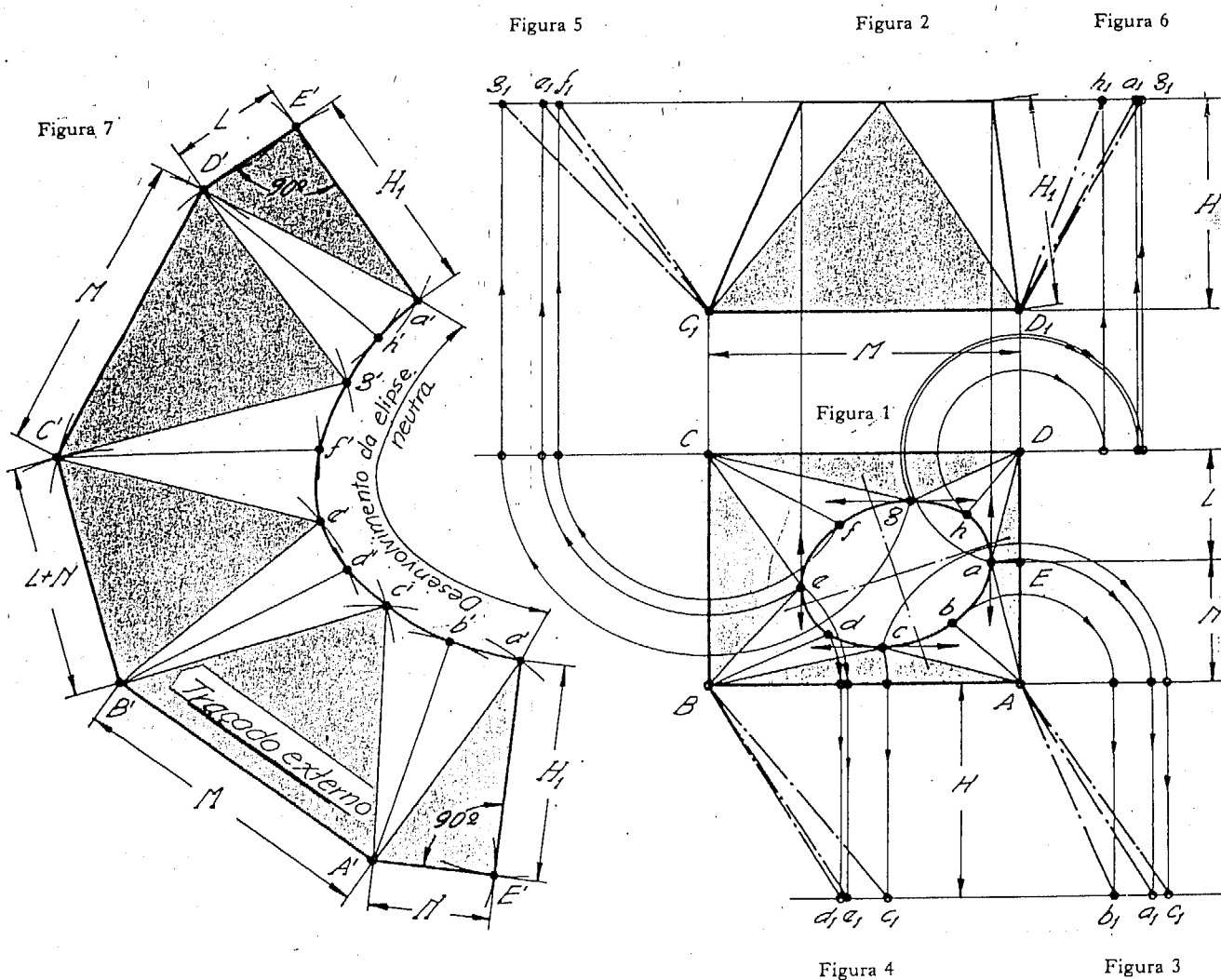
Transformador de boca elíptica e de base retangular, sendo os eixos da primeira oblíquos aos lados da base

A representação horizontal e vertical deste transformador (figuras 1 e 2) é feita por sua fibra interna e, paralelamente aos lados da base (fig. 1), traçam-se tangentes à elipse, determinando os pontos a , c , e e g que se unem com os respectivos pontos A , B , C e D , determinando assim as geratrizes de separação.

As grandezas reais e o desenvolvimento são de-

terminados da mesma maneira como no exercício 67, transportando sobre uma régua flexível o desenvolvimento da elipse neutra da boca de forma análoga à do exercício anterior.

Nota. Para facilitar o trabalho da dobragem do transformador, divide-se o desenvolvimento do mesmo em duas partes.



Transformador de boca circular e de base semicircular retangular, situada em eixo diferente

Este transformador é formado por meio tronco de cone oblíquo de bases circulares e paralelas, por dois quadrantes de cones oblíquos iguais de bases circulares e três superfícies planas e triangulares.

O transformador é representado em suas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) da seguinte maneira:

Primeiro representa-se o meio tronco oblíquo por sua fibra média, determinando-se seu vértice V_1 (fig. 1), prolongando a geratriz de separação c_1c até cortar o eixo horizontal em V_1 e o vértice V , prolongando a geratriz extrema a_2a_3 e a geratriz de separação c'_1c' , determinando pela intersecção de ambas o ponto V . Uma vez feita esta representação, determinam-se todos os dados neces-

sários, assim como foi explicado nos capítulos de cones oblíquos.

Depois de representar os outros dois segmentos de cones oblíquos e as superfícies planas por sua fibra interna, acham-se os dados necessários como nos casos anteriores.

O desenvolvimento (fig. 3) é feito de forma análoga aos exercícios anteriores, procurando fazer com que o tronco de cone oblíquo fique no centro.

Nota. Nas representações das figuras 1 e 2, as fibras médias do tronco de cone oblíquo confundem-se com as fibras internas do resto do transformador, já que o desenho foi feito assim para evitar a dificuldade de desenhar as espessuras da chapa, o que poderia causar confusão aos estudantes.

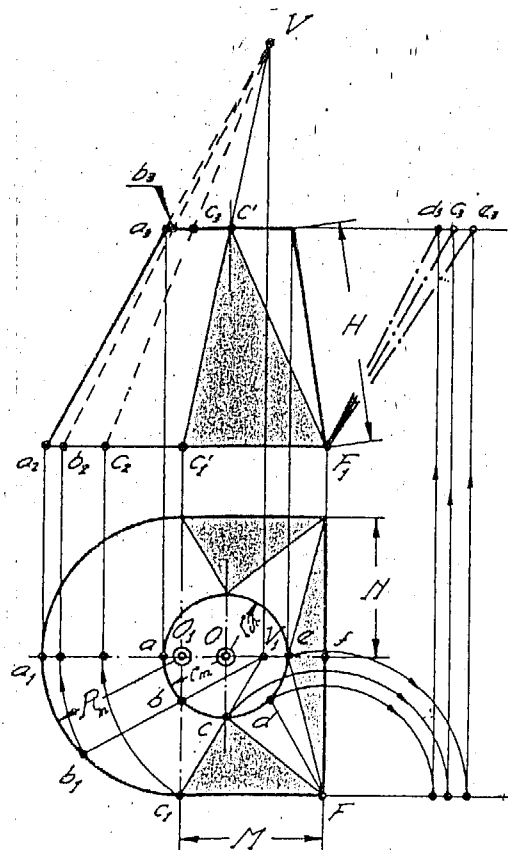


Figura 1

Figura 2

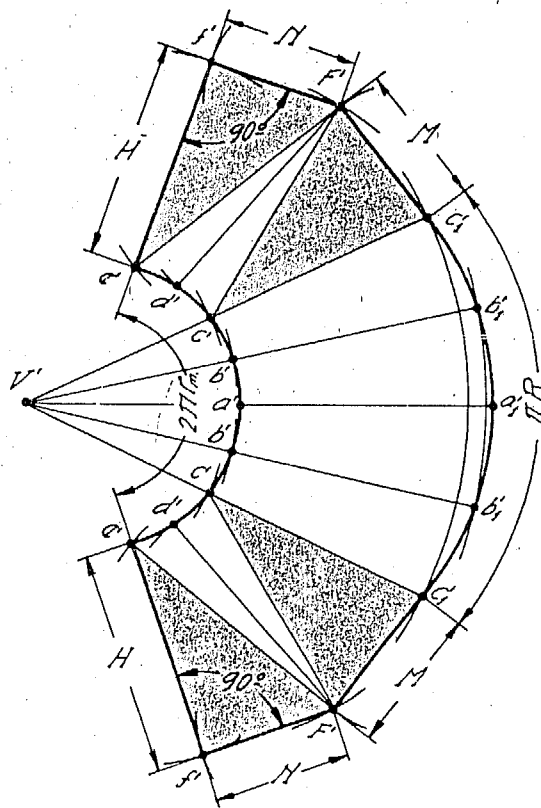


Figura 3

Transformador de boca circular e de base semicircular retangular, situada no mesmo eixo

As figuras 1 e 2 dão as representações horizontal e vertical do transformador que, como se pode ver, é formado por meio tronco de cone reto, de dois segmentos de cone oblíquo de base circular e de três superfícies planas e triangulares.

A representação do transformador é feita da mesma maneira como no caso anterior e os dados necessários para desenvolvê-lo são feitos de forma parecida, pois, uma simples inspeção ocular será suficiente para resolver este caso, já que se trata

de desenvolver meio cone reto e meio transformador qualquer.

o desenvolvimento é feito como se vê na figura 3.

Nota. Neste desenvolvimento, como no anterior ou nos parecidos com este, curvam-se primeiro as extremidades, deixando-as bem alinhadas e depois curva-se a parte central (neste caso, o tronco de cone é reto).

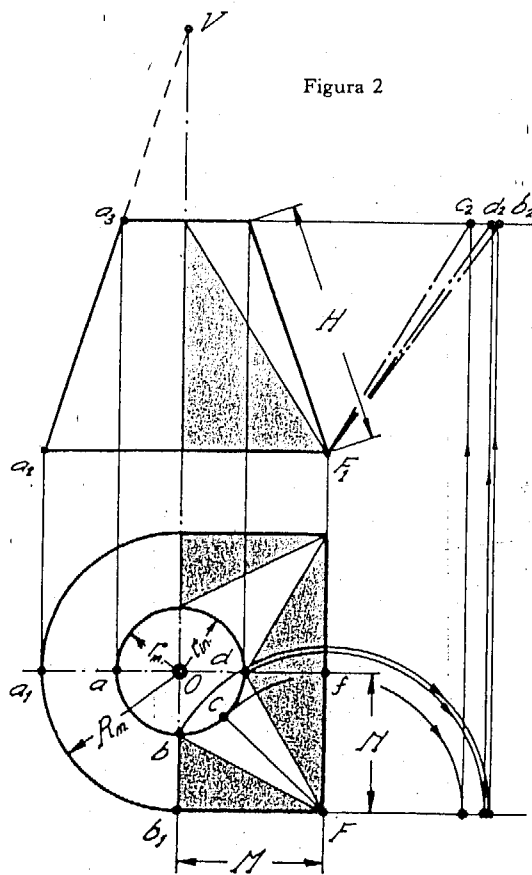


Figura 1

Figura 2

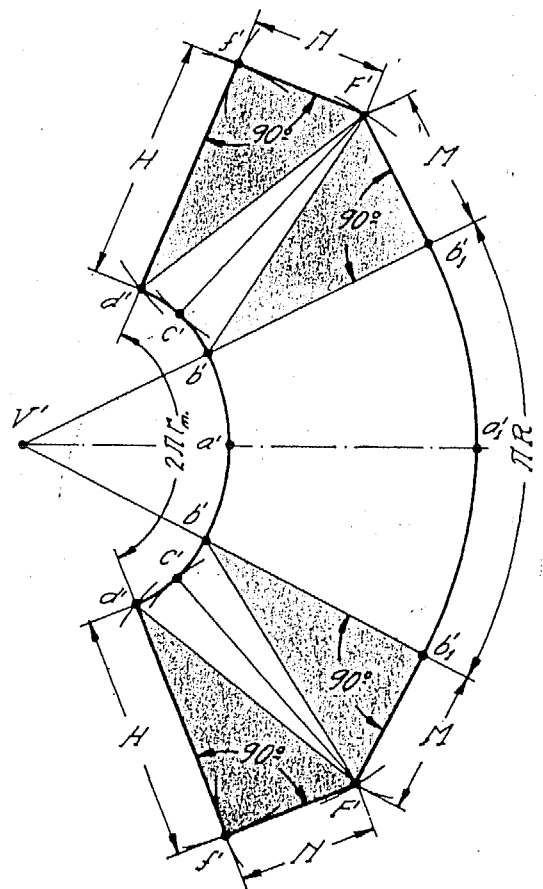


Figura 3

Transformador de boca circular e de base formada por duas semicircunferências unidas por retas

Este transformador é formado por dois troncos de cones oblíquos iguais, de bocas circulares e por duas superfícies planas iguais e triangulares.

As representações horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) deste transformador são feitas por sua fibra média.

Determinação dos dados necessários. Primeira-mente determina-se o vértice V do cone oblíquo, prolongando a geratriz extrema d_1d_2 (fig. 2) e a geratriz de separação $a_1a'_1$ até ser cortada em V . Este ponto é projetado perpendicularmente ao eixo horizontal da figura 1, cortando-se em V_1 .

Depois divide-se um quadrante da base em certo número de partes iguais (três, por exemplo),

determinando os pontos de divisão a, b, c e d que se unem com o ponto V_1 por meio de retas geratrizes. Em redor deste ponto giram-se os pontos de divisão a, b , etc., determinando novos pontos sobre o eixo horizontal, a partir dos quais se traçam perpendiculares à base do transformador (fig. 2), cortando-a nos pontos a_2, b_2 , etc. Estes pontos são unidos com o vértice V por meio de retas que cortam o diâmetro da boca nos pontos a_3, b_3 , etc., determinando assim as geratrizes reais que precisamos para desenvolver o transformador.

Na figura 3 representou-se meio desenvolvimento do transformador, podendo-se ver claramente o procedimento para traçá-lo, já que é semelhante aos casos anteriores.

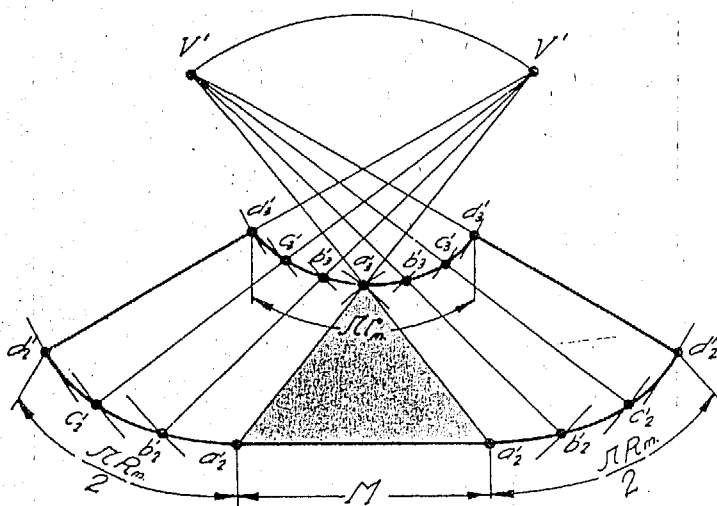


Figura 3

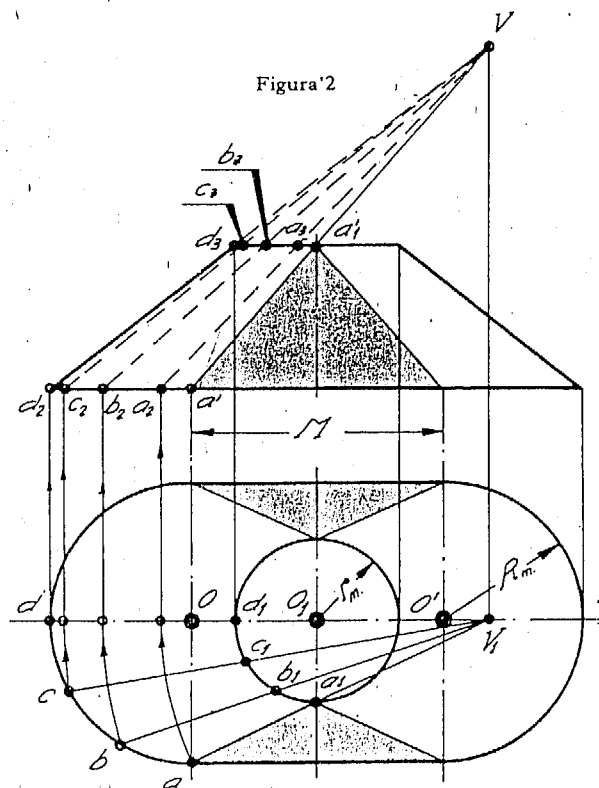


Figura 1

Transformador de boca circular e de base, formado por arcos de circunferência de raio diferente unidos por retas

As projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) são representadas por sua fibra média.

Como se pode deduzir de suas projeções, este transformador é composto de uma parte de tronco de cone reto, de outra parte de tronco de cone oblíquo de bocas circulares e de duas superfícies planas iguais e triangulares.

Primeiramente determinam-se as geratrizes de separação e para isto traça-se desde o ponto O uma perpendicular ao lado Nc_1 da base (fig. 1), determinando sobre o mesmo o ponto N e sobre a

circunferência média da boca o ponto de intersecção c . Desde O_1 traça-se outra perpendicular ao mesmo lado, cortando-o em c_1 que, unido com o ponto c , determina a geratriz de separação cc_1 , sendo a outra a geratriz cN .

Os dados necessários para desenvolver o transformador são determinados da mesma maneira que viemos estudando até agora. O desenvolvimento também é determinado como nos casos anteriores, pois, uma inspeção ocular da figura 3 bastará para saber como desenvolvê-lo.

Figura 2

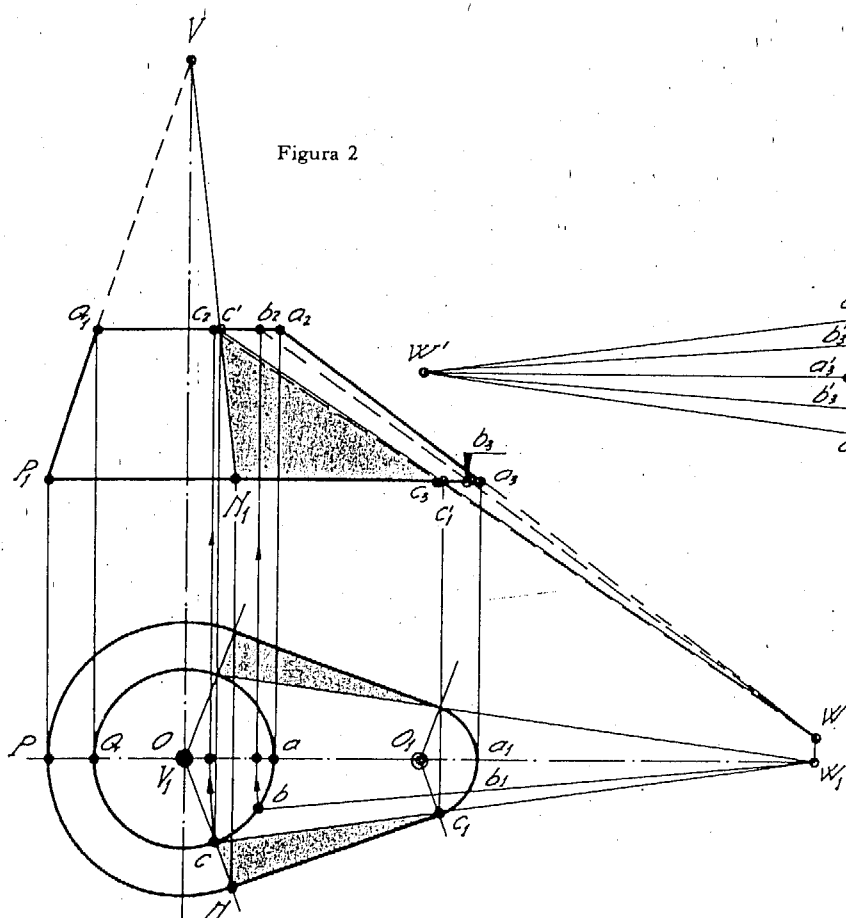
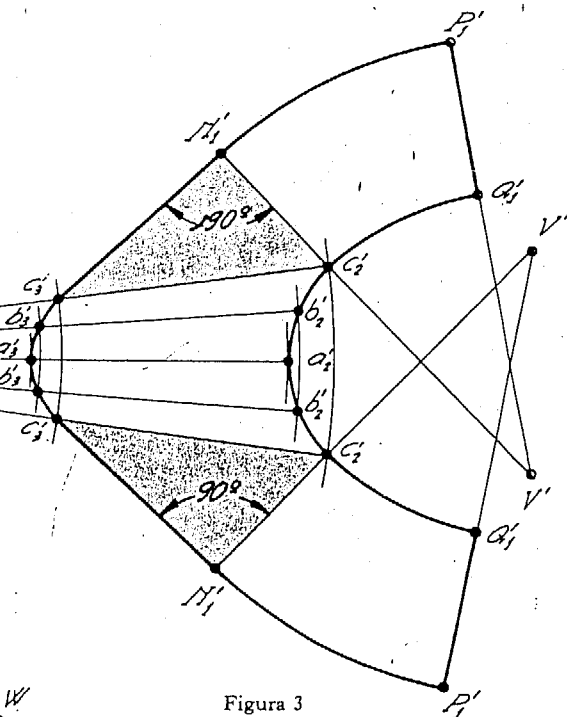


Figura 1

Figura 3



Calça de bocas circulares e de base retangular paralela

As representações horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) da calça são feitas por sua fibra interna, como no caso dos transformadores.

Esta calça é composta pela intersecção de dois transformadores iguais de boca circular e base retangular de modo que só é necessário achar os dados de um deles.

Determinação dos dados necessários. Divide-se a semicircunferência interna da boca (fig. 1) em um número adequado de partes iguais (seis, por exemplo) e unem-se os pontos de divisão a, b, c e d com o ponto A e os pontos d, e, f e g , com o ponto B , ficando assim representadas as geratrizes em planta.

Os pontos a, b, c etc. são projetados perpendicularmente ao diâmetro interno da boca (fig. 2), determinando sobre este os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com os respectivos pontos A_1 e B_1 por meio de retas geratrizes. As geratrizes B_1d_1, B_1e_1, B_1f_1 e B_1g_1 determinam sobre a linha de intersecção os pontos $1, 2, 3$ e 4 .

Depois prolongam-se a boca e a base da calça (fig. 3) e traça-se uma perpendicular a estes prolongamentos, determinando os pontos A_2 e X . A partir deste último ponto, transportam-se à esquerda do prolongamento da boca superior as distâncias Aa, Ab, Ac e Ad da figura 1, determinando os pontos a_2, b_2, c_2 e d_2 que se unem com o ponto A_2 , determinando-se assim as geratrizes reais das geratrizes da mesma origem.

Marcando o centro no ponto B (fig. 1), descrevem-se arcos que partam dos pontos d, e, f e g até cortar o prolongamento do lado AB , determinando-se assim novos pontos que se projetam perpendicularmente ao prolongamento da boca da calça (fig. 4), determinando sobre esta os pontos de intersecção d_2, e_2, f_2 e g_2 , que se unem com o ponto

B por meio de retas, determinando-se assim as geratrizes reais restantes.

Uma vez determinadas todas as geratrizes reais que precisamos para desenvolver um dos transformadores que compõem a calça, projetam-se os pontos $1, 2, 3$ e 4 paralelamente à base, determinando sobre as geratrizes reais da mesma origem (fig. 4) os pontos de intersecção $1_1, 2_1, 3_1$ e 4_1 .

Desenvolvimento lateral (fig. 5). Desenvolve-se o transformador completo, assim como se vê na ilustração e depois transporta-se desde o ponto B' (em ambas as partes) e sobre as geratrizes da mesma origem, as respectivas distâncias B_11_1, B_12_1, B_13_1 e B_14_1 da figura 4, determinando os pontos $1', 2', 3'$ e $4'$ que se unem através de uma régua flexível.

O lado $A'B'$ do desenvolvimento (em ambas as partes) é dividido em duas partes iguais, determinando o ponto E' que será unido com o ponto $1'$ por meio de uma reta que, por sua vez, forma um ângulo de 90° com o lado $A'E'$.

Por último, transporta-se a partir do ponto D' e sobre a reta de união $D'g'$ a distância D_1F_1 da figura 2, determinando assim o ponto F' que, por sua vez, será unido com o ponto $4'$ por meio de uma reta, ficando desta maneira desenvolvida uma das pernas da calça que servirá de gabarito para marcar a outra.

Nota. Se as bocas superiores da calça fossem quadradas, retangulares, etc. e a base circular ovalada ou elíptica, desenvolver-se-ia da mesma maneira que esta, já que, como foi observado nos exercícios que estudamos até agora, o principal é decompor qualquer peça em partes desdobráveis diferentes, achando os dados de cada uma delas e desenvolvê-las de tal maneira que fiquem agrupadas em uma só peça.

Intersecção de um cilindro sobre um transformador

Representa-se o transformador por sua fibra interna e, o cilindro, por sua fibra externa.

Uma vez representados o transformador e o cilindro em suas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2), faremos a determinação da curva de intersecção de ambos os corpos, como se explica a seguir.

Divide-se a semicircunferência interna do transformador (fig. 1) em certo número de partes iguais (quatro por exemplo) e unem-se os pontos de divisão a, b , etc., com os respectivos pontos M e N por meio de retas geratrizes. Estes pontos de divisão são projetados perpendicularmente ao diâmetro do transformador (fig. 2), determinando sobre este os pontos de intersecção a_1, b_1 , etc., que se unem com os respectivos pontos M_1 e N_1 por meio de retas geratrizes que, ao mesmo tempo, cortam a circunferência externa do cilindro nos pontos A, B, C , etc.

Estes pontos são projetados perpendicularmente ao eixo horizontal do transformador (fig. 1), determinando sobre as geratrizes da mesma origem do transformador os pontos de intersecção A_1, B_1, C_1 , etc., que se unem ordenadamente por meio de uma curva contínua.

Traçado das geratrizes reais. A uma distância qualquer do prolongamento da base do transformador (fig. 3), traça-se uma perpendicular a esta no ponto X , projetando nela o ponto M_1 , determinando o ponto M_2 .

A partir de X e à direita transportam-se sobre o prolongamento da base as distâncias Ma, Mb e Mc da figura 1, determinando os pontos a_2, b_2 e c_2 que se unem por meio de retas que, neste caso, são as geratrizes reais das geratrizes da mesma origem. Os pontos A, B, C, I e J (fig. 2) são projetados paralelamente à base do transformador, cortando suas correspondentes geratrizes reais (fig. 3) nos pontos A_2, B_2, C_2, I_2 e J_2 .

As geratrizes reais N_1c_2, N_1d_2 e N_1e_1 (fig. 4) podem ser achadas de forma análoga às anteriores, assim como os pontos D_2, E_2, F_2, G_2 e H_2 .

Desenvolvimento do enxerto cilíndrico (fig. 5). Traça-se em uma posição adequada a reta $A'A'$ de

comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média desse cilindro ($\pi \times d_m^o$). Em seguida, traça-se uma circunferência de centro O (fig. 2) e de diâmetro médio do enxerto (esta circunferência não foi representada, já que se considera suficiente a explicação, evitando-se assim desenhar mais linhas que poderiam ser motivos para confusão).

Desde o ponto O (fig. 2), traçam-se retas que passam pelos pontos A, B, C , etc., da circunferência externa determinando novos pontos sobre a circunferência média imaginária anterior, flexionando depois uma régua flexível até acoplá-la à circunferência imaginária, marcando nela os pontos anteriormente determinados. Estende-se a régua flexível, transportando-a sobre a reta $A'A'$ (fig. 5), marcando nela os pontos da régua, determinando-se assim os pontos B', C', D' , etc. Nestes pontos traçam-se perpendiculares à reta $A'A'$ de comprimentos iguais às distâncias da mesma origem existentes entre os pontos A_1, B_1, C_1 , etc. (fig. 1) e o diâmetro do enxerto, ficando assim determinados os pontos A', B', C' , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, salvo os pontos C', D' e $H' I'$ que são unidos por meio de uma reta em ambos os casos.

Desenvolvimento do transformador (fig. 6). O desenvolvimento do transformador é feito de forma parecida ao dos exercícios anteriores, tomando as geratrizes reais das respectivas figuras 3 e 4; a distância $e'n'$ (linha de união) é igual à grandeza e_1n_1 da figura 2.

Traçado do orifício. Tomam-se as distâncias M_2A_2, M_2B_2 , etc. (fig. 3) e N_1D_2, N_1E_2 , etc. (fig. 4), transportando-as sobre as geratrizes da mesma origem do desenvolvimento (fig. 6) a partir dos respectivos pontos M' e N' , determinando os pontos A', B', C', D', E' , etc. Marcando o centro nos pontos H' e I' , descrevem-se arcos de raios iguais ao raio externo do enxerto cilíndrico, determinando pela intersecção de ambos o ponto O' , a partir do qual se traçam arcos que servem para unir os pontos C', D' e H', I' . Os pontos restantes são unidos por meio de uma régua flexível que se flexiona de forma a coincidir com esses pontos.

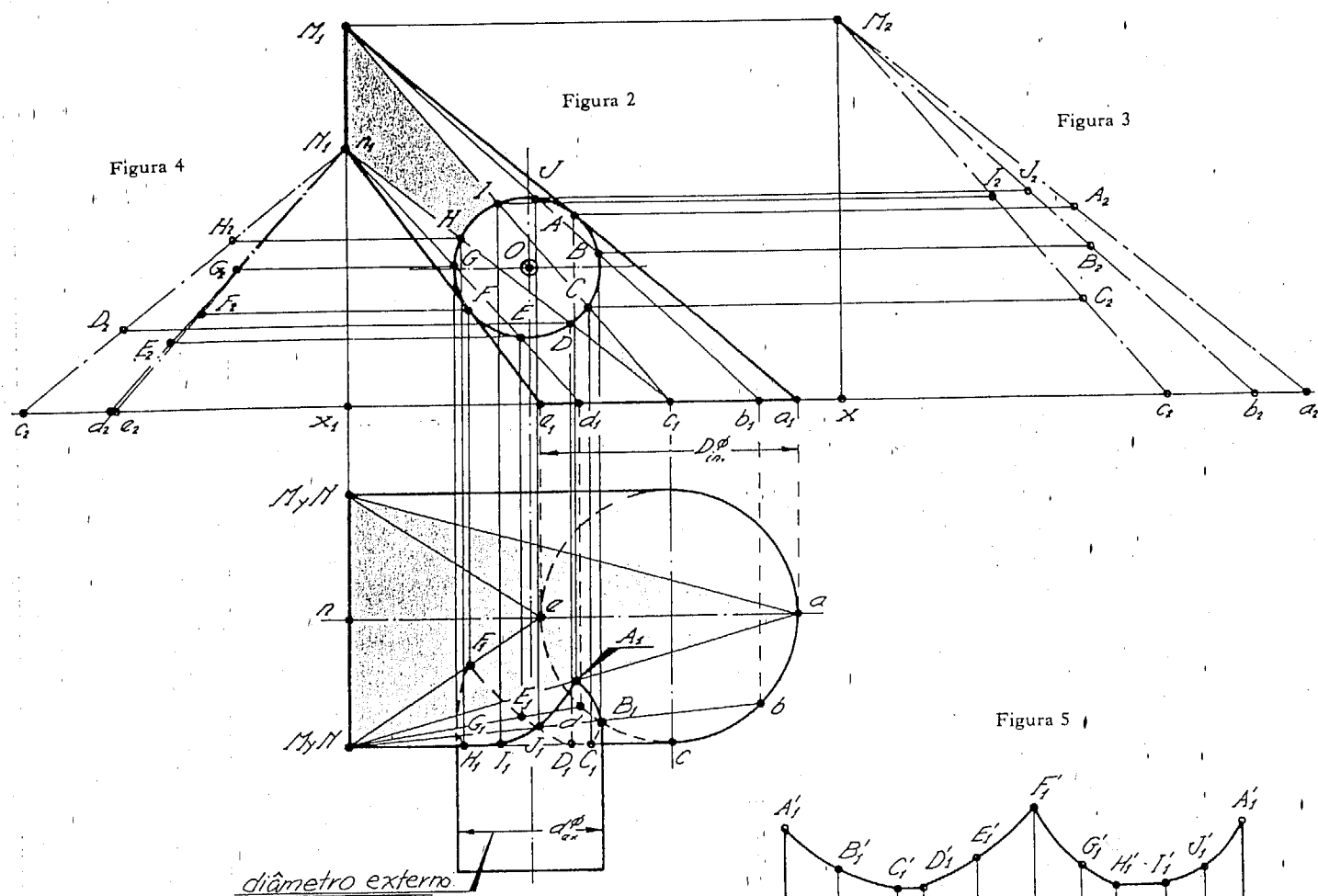


Figura 1

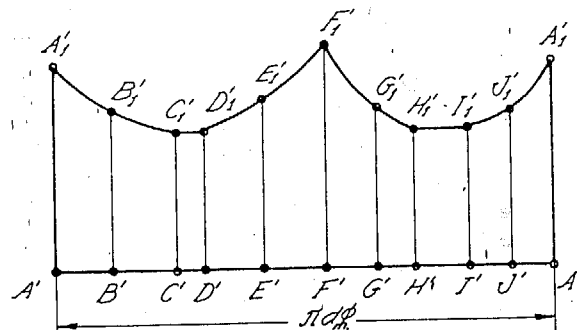


Figura 5

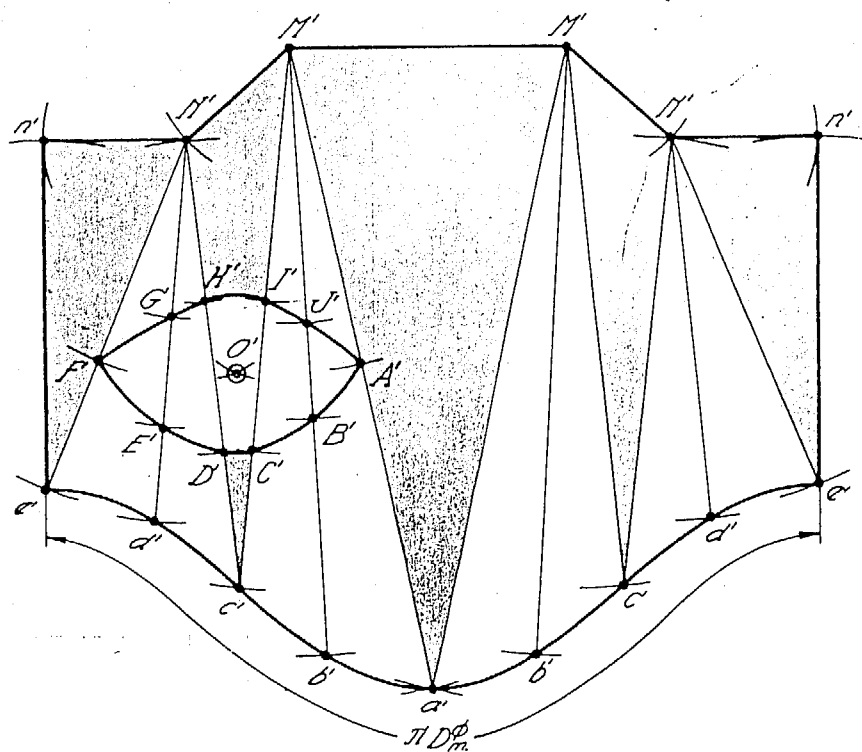


Figura 6

Transformadores de bocas inclinadas

Até agora estudamos diversos tipos de transformadores cujas bocas eram paralelas entre si e achávamos as geratrizes de separação unindo os pontos que determinavam os eixos da boca circular sobre sua circunferência interna com as extremidades dos lados da base. Quando a boca era elíptica, traçavam-se paralelas aos lados da base e tangentes à elipse interna, determinando assim os pontos de separação que, ao mesmo tempo, uniam-se com as extremidades dos lados correspondentes.

As geratrizes de separação dos transformadores de bocas inclinadas são determinadas como se explica a seguir.

Na perspectiva da figura 1 representou-se um transformador de boca circular e base quadrada, inclinadas entre si e contidas em um mesmo eixo.

A base do transformador é situada sobre o plano H de projeção, sendo seu lado AB paralelo ao plano V de projeção.

Também representou-se um plano projetante vertical P que passa pela boca circular do transformador, cujos traços são P (traço horizontal) e P_1 (traço vertical).

Representou-se também um plano Q que passa pelo lado AB da base do transformador que se inclinou até se tornar tangente à circunferência da boca circular no ponto c ; portanto, as geratrizes de separação são as tangentes Ac e Bc .

A linha de intersecção I dos planos P e Q seria a reta que passa pelos pontos h e c .

O ponto h é determinado pela intersecção dos traços horizontais dos planos P e Q ; portanto, h é o traço horizontal da linha de intersecção I .

A projeção vertical do transformador seria como se ilustra na perspectiva. Como a metade deste transformador é simétrica à outra metade, as ge-

ratrizes de separação Ac e Bc seriam iguais às geratrizes opostas.

A figura 2 dá a representação diédrica do transformador, do plano projetante vertical que passa pela boca circular e que é representado por suas linhas horizontal e vertical P - P_1 e do plano Q que é representado pela linha de intersecção I e por sua linha horizontal que passa pelo lado AB .

Logo, conhecendo as projeções horizontal e vertical do transformador, acharemos as geratrizes de separação Ac , $A'c'$ e Bc , $B'c'$ da seguinte maneira:

Traça-se uma reta que passe pela boca do transformador (fig. 2) que represente a linha P_1 do plano projetante vertical que passa por essa boca e a linha de intersecção I' dos planos P e Q . Esta linha corta a LT no ponto h' , a partir do qual se traça uma perpendicular à LT , ficando desta forma representada a linha P do plano projetante (fig. 1).

O lado AB (fig. 1) é prolongado até cortar a linha P no ponto h , traçando desde este ponto a reta I (linha de intersecção dos planos P e Q), tangente à boca circular que, neste caso, representasse-ia elíptica por estar inclinada com respeito à base, determinando-se assim o ponto de tangência c que se une com os respectivos pontos A e B , determinando as geratrizes de separação Ac e Bc em sua projeção horizontal.

A projeção vertical é determinada projetando o ponto c até cortar o diâmetro da boca em c' e unindo-o com os pontos A' e B' , respectivamente.

Nota. Quando a largura AC da base for igual ao diâmetro da boca circular, as geratrizes de separação estarão nos eixos da boca, como quando as bocas forem paralelas.

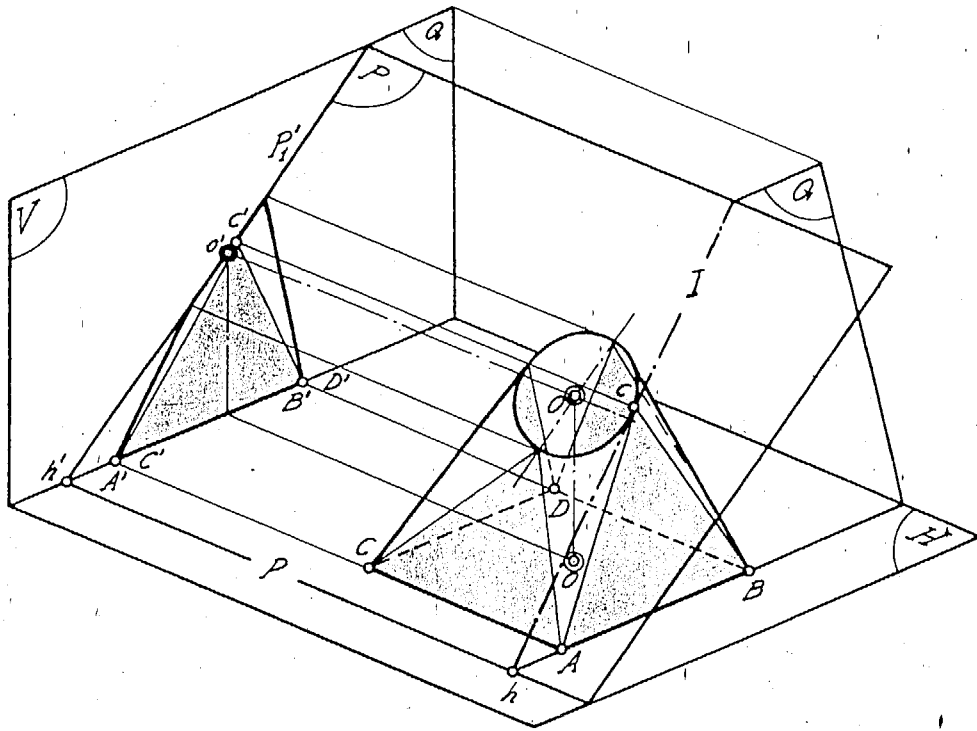


Figura 1

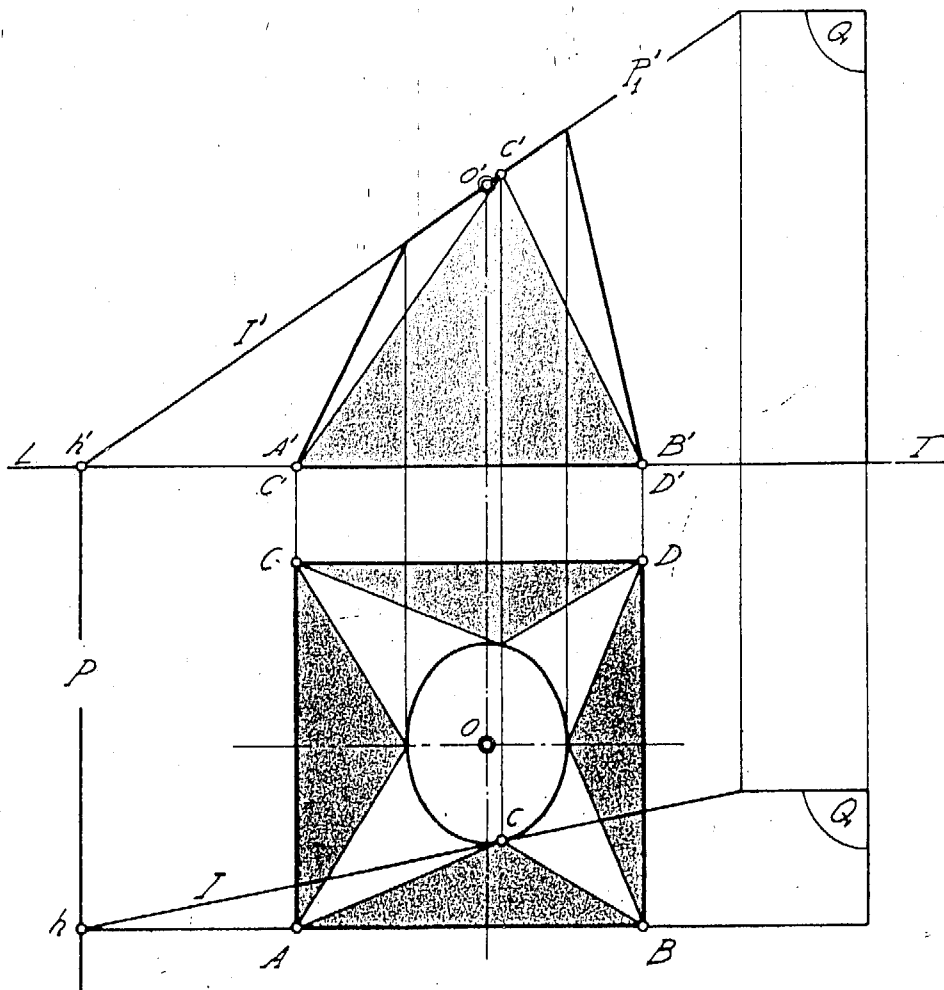


Figura 2

Transformador de boca circular e de base quadrada, inclinadas entre si

Uma vez representadas a *planta* do transformador (fig. 1) e a projeção vertical do mesmo (fig. 2) por suas fibras internas, traça-se um plano projetante vertical que passe pela boca do transformador, sendo este plano representado por suas linhas horizontal P e vertical P' .

O plano projetante vertical é rebatido em redor da linha P , ficando assim representada a boca circular do transformador (fig. 3) em sua verdadeira grandeza.

Para melhor compreensão, daremos uma explicação mais simples e mepos técnica para achar todos os dados necessários e desenvolver assim o transformador em questão.

Marcando o centro no ponto h' (fig. 2), descreve-se um arco que parta de O' (centro da boca), determinando um novo ponto sobre o prolongamento da base do transformador. Desde este ponto traça-se uma perpendicular ao prolongamento do eixo horizontal da boca da figura 1, cortando-o no ponto O_1 (fig. 3). Marcando o centro neste ponto, descreve-se uma circunferência de raio igual ao raio interno da boca.

Como uma metade do transformador é simétrica à outra, só daremos referências de uma delas, embora as duas estejam representadas.

O lado AB do transformador (fig. 1) é prolongado até cortar a linha P do plano projetante vertical no ponto h , a partir do qual se traça uma tangente à circunferência de centro O_1 (fig. 3), determinando o ponto de tangência c .

os respectivos arcos ac e ce da circunferência de centro O_1 (fig. 3) são divididos em um número adequado de partes iguais cada um deles (duas partes iguais cada um, por exemplo). Desde os pontos de divisão a , b , c etc., traçam-se perpendiculares ao prolongamento da base do transformador da figura 2, determinando novos pontos a partir dos quais se traçam arcos de centro h' até cortar o diâmetro da boca nos pontos a_1 , b_1 , c_1 , etc. Desde estes pontos traçam-se paralelas ao eixo vertical da boca da projeção horizontal (fig. 1) e desde os pontos a , b , c , etc., traçam-se paralelas ao eixo horizontal da mesma boca, determinando sobre as anteriores os pontos de intersecção a_2 , b_2 , c_2 , etc. que, por sua vez, unem-se por meio de uma curva contínua em forma de elipse.

Os pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc. e a_1 , b_1 , c_1 , etc., das respectivas projeções horizontal e vertical são unidos com os respectivos pontos A , B e A_1 , B_1 por meio de retas geratrizes, ficando assim representado esse transformador no sistema diédrico com todas as geratrizes que precisamos para desenvolvê-lo.

Traçado das geratrizes reais. Em um ponto X qualquer do prolongamento da base do transformador (fig. 4), traça-se uma perpendicular e projetam-se nela os pontos a_1 , b_1 , c_1 , etc. da figura 2, determinando os pontos de intersecção a_3 , b_3 , c_3 , etc.

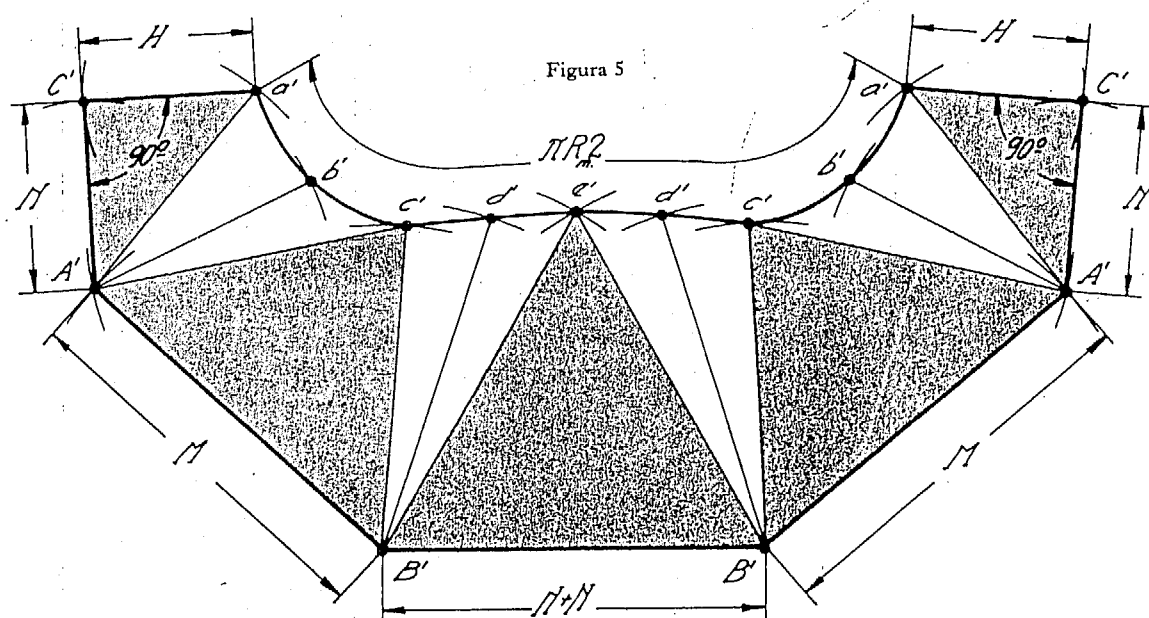
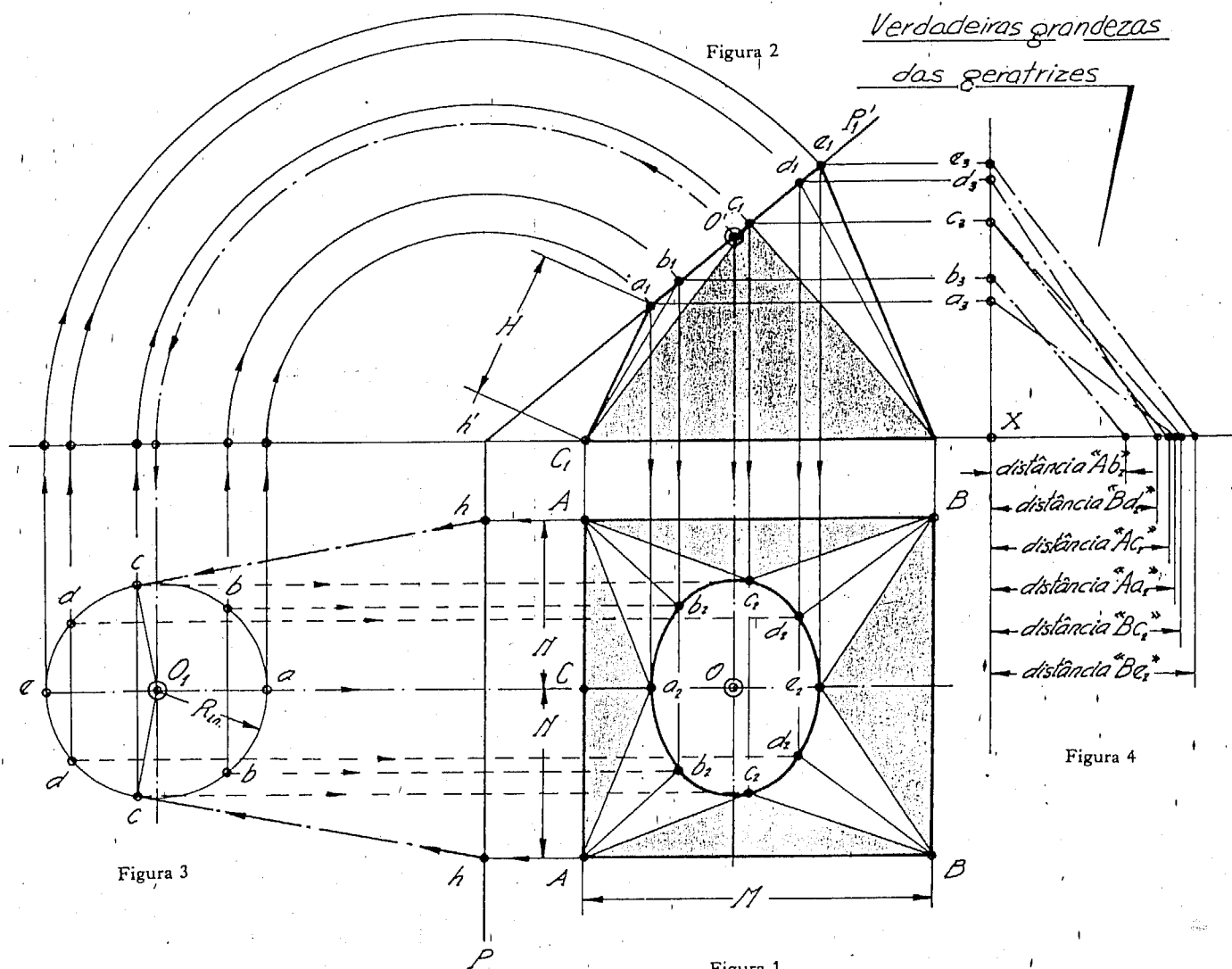
Depois transporta-se sobre o prolongamento anterior da base e a partir do ponto X (fig. 4) as distâncias Aa_2 , Ab_2 , Ac_2 , Bc_2 , Bd_2 e Be_2 da figura 1, determinando novos pontos que se unem com os pontos da mesma origem a_3 , b_3 , c_3 , etc. por meio de retas, sendo estas as geratrizes reais que se transportam ao desenvolvimento.

Desenvolvimento. Em uma posição adequada traça-se a reta $B'B'$ (fig. 5) de comprimento igual ao do lado BB da figura 1.

Em seguida, descrevem-se arcos a partir destes pontos de raio igual ao comprimento da geratriz real e_3 da figura 4, determinando o ponto e' pela intersecção de ambos. Este ponto é unido com os pontos B' , desenvolvendo-se assim uma das superfícies planas. Em ambas as partes continua-se desenvolvendo o transformador de forma análoga aos exercícios anteriores.

O desenvolvimento que se transporta sobre a régua flexível que serve para determinar os pontos a' , b' , c' , etc., do desenvolvimento (fig. 5) pode ser achado da seguinte maneira:

Descreve-se uma circunferência de centro O_1 (fig. 3) de diâmetro igual ao diâmetro médio da boca circular (esta circunferência não foi representada para evitar confusões de linhas). Depois traçam-se retas que partam do centro O_1 passando pelos pontos a , b , c , etc., determinando novos pontos sobre a circunferência média imaginária antes mencionada. Flexiona-se a régua até acoplá-la à circunferência imaginária, marcando-se nela os pontos desta, estando disposta assim a régua flexível para transportá-la ao desenvolvimento.



Transformador de boca circular e de base retangular, inclinadas entre si nas duas projeções

Representa-se o transformador por suas fibras internas e situa-se a boca circular de maneira que passe por esta um plano projetante vertical, a ser representado por suas linhas P (linha horizontal, fig. 1) e P'_1 (linha vertical, fig. 2).

Marcando o centro em h' (fig. 2), descreve-se um arco que parta de O' (centro da boca), determinando um novo ponto sobre o prolongamento da base, a partir do qual se traça uma perpendicular até cortar o prolongamento do eixo horizontal da boca da figura 1, determinando assim o ponto de intersecção O_1 (fig. 3). Marcando o centro neste ponto, descreve-se uma circunferência de diâmetro igual ao diâmetro interno da boca do transformador.

Depois prolongam-se os lados da base (fig. 1), determinando sobre a linha P do plano projetante vertical os respectivos pontos h , h_1 , h_2 e h_3 , a partir dos quais se traçam tangentes à circunferência anterior (fig. 3), determinando os pontos de tangência a , c , e e g correspondentes às geratrizes de separação.

Os arcos ac , ce , eg e ga são divididos em certo número de partes iguais, cada um deles (duas partes cada um, por exemplo). Desde estes pontos traçam-se perpendiculares ao prolongamento da base do transformador, determinando alguns pontos a partir dos quais passam arcos de centro comum h' que determinam sobre o diâmetro interno da boca (fig. 2) os pontos de intersecção a_1 , b_1 , c_1 , etc., que se unem com os respectivos pontos A_1 , B_1 , C_1 e D_1 por meio de retas geratrizes (não é necessário uni-los).

Depois projetam-se os pontos a_1 , b_1 , c_1 , etc., paralelamente ao eixo vertical da boca da figura 1 e desde os pontos a , b , c etc., traçam-se perpendiculares às paralelas anteriores, determinando sobre as da mesma origem os pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc. (fig. 1). Estes pontos são unidos por meio de retas geratrizes com os pontos A , B , C e D , respectivamente; também os pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc., são unidos por meio de uma régua flexível que determina uma elipse, sendo esta a projeção horizontal da boca circular.

Traçado das geratrizes reais. A uma distância qualquer do prolongamento da base do transformador (fig. 4), traça-se uma perpendicular no ponto X e, desde os pontos a_1 , b_1 , c_1 , etc., traçam-se perpendiculares à perpendicular anterior, determinando assim os pontos de intersecção a_3 , b_3 , c_3 , etc.

A partir de X e à direita, traçam-se os comprimentos das geratrizes falsas Aa_2 , Ab_2 , Ac_2 , Bb_2 , etc., da figura 1, determinando novos pontos (fig. 4) que, unidos com os da mesma origem a_3 , b_3 , c_3 , etc., levariam a determinar todas as geratrizes reais que precisamos para desenvolver o transformador em questão.

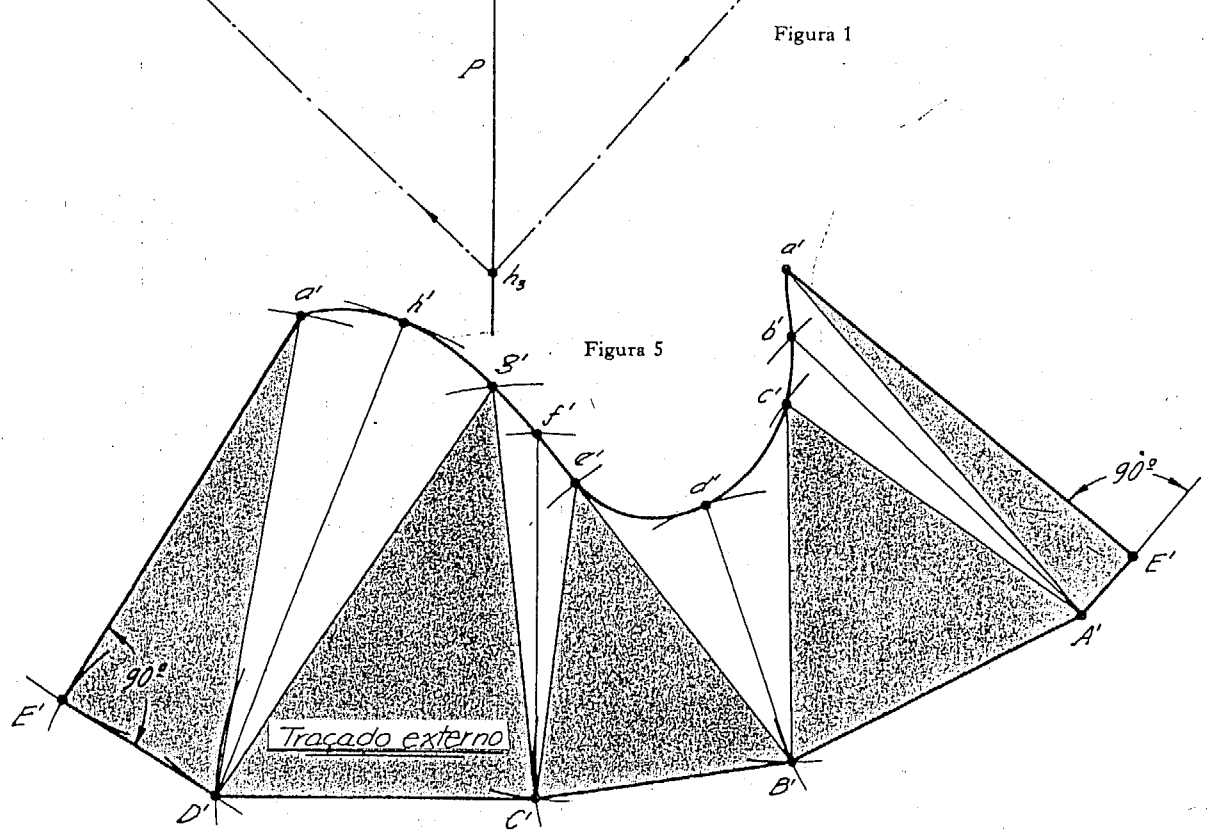
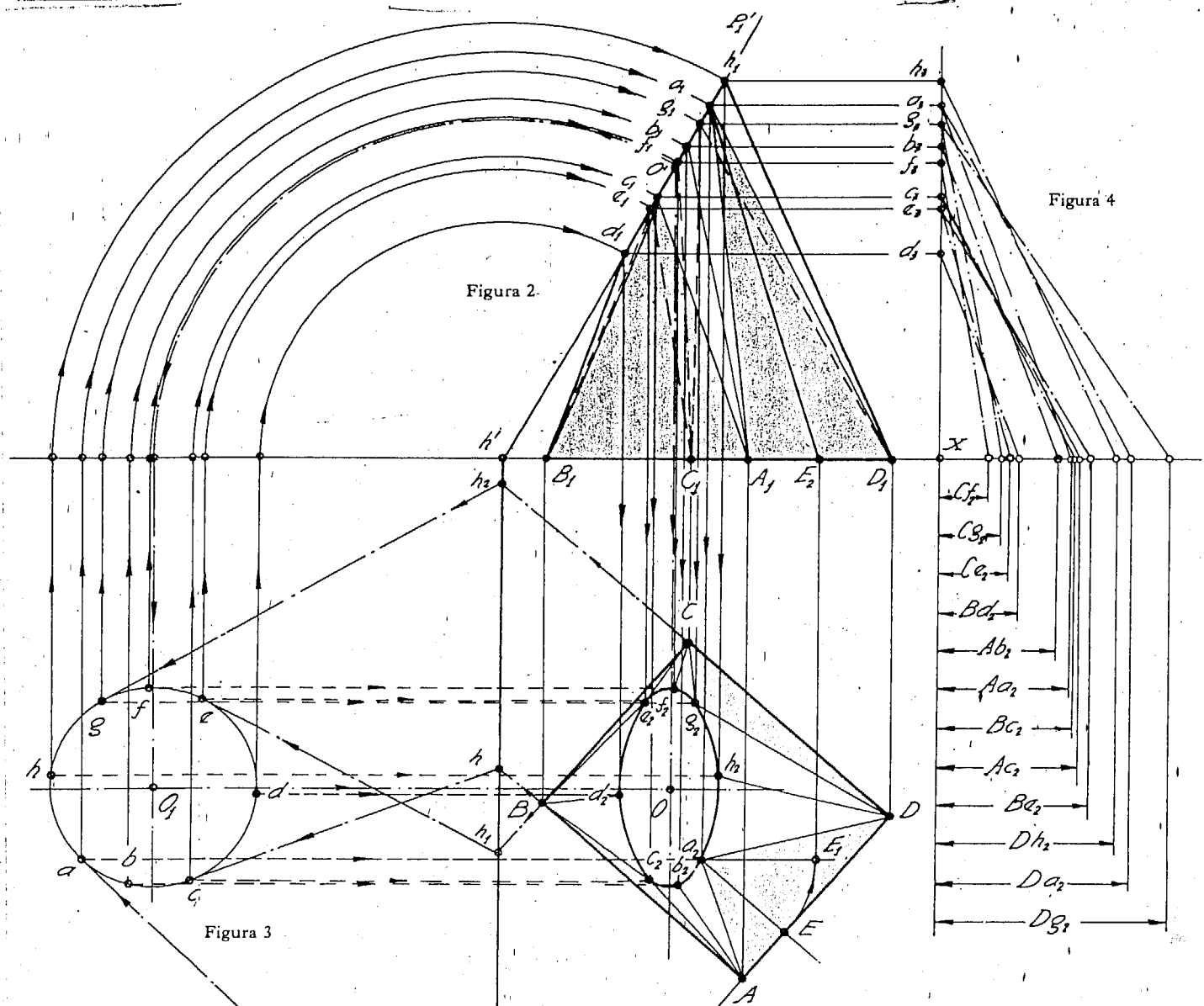
Desenvolvimento. Antes de começar a desenvolver o transformador, descreve-se uma circunferência de centro O_1 (fig. 3) de diâmetro igual ao diâmetro médio da boca circular (esta circunferência não foi representada para eliminar as confusões de linhas). Depois e desde O_1 , traçam-se retas que passem pelos pontos a , b , c , etc., da circunferência interna, determinando novos pontos sobre a circunferência média imaginária antes mencionada.

Flexiona-se uma régua flexível até acoplá-la à circunferência média imaginária, marcando-se nela os pontos correspondentes, transportando depois esta régua ao desenvolvimento, assim como foi feito nos casos anteriores com os transformadores de bocas paralelas.

Em seguida, começa-se a traçar o desenvolvimento a partir da reta $E'a'$ (parte direita), continuando-se até terminá-lo, assim como foi feito nos casos anteriores.

A distância $E'a'$ (fig. 5) é igual à distância E_2a_1 da figura 2. Esta distância foi determinada em:

Desde a_2 (fig. 1) traça-se uma perpendicular ao lado AD , determinando sobre este o ponto de intersecção E que é girado em redor de a_2 até cortar a horizontal, que parte deste ponto, no ponto E_1 . Este ponto é projetado perpendicularmente à base do transformador (fig. 2), determinando o ponto E_2 que se une com o ponto a_1 .



Transformador de boca circular e de base retangular inclinada com respeito ao plano H de projeção

Determinação das geratrizes de separação. Uma vez representado o transformador por suas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2), prolongam-se a boca circular e a base (fig. 2) até cortar-se no ponto h' e desde este ponto traça-se uma perpendicular indefinida à LT . Em seguida, prolonga-se o lado AB (fig. 1) até cortar a perpendicular anterior no ponto h a partir do qual se traça uma reta tangente à circunferência interna da boca, determinando o ponto de tangência c que se une com os respectivos pontos A e B por meio de retas geratrizes que, neste caso, são as geratrizes de separação.

Traçado das geratrizes. Os arcos ac e ce (fig. 1) são divididos, cada um deles, em um número adequado de partes iguais (duas partes, por exemplo), unindo os pontos de divisão com os respectivos pontos A e B por meio de retas geratrizes. Estas geratrizes são giradas em redor dos respectivos pontos A e B , determinando alguns pontos sobre o prolongamento do lado AB , a partir dos quais se traçam perpendiculares ao prolongamen-

to do diâmetro da boca (fig. 2), determinando os respectivos pontos a_1, b_1, c_1 (fig. 3) e c_1, d_1, e_1 (fig. 4). Estes pontos são unidos com os pontos A_1 e B_1 , respectivamente, ficando assim determinadas as verdadeiras grandezas que precisamos para desenvolver o transformador.

Desenvolvimento (fig. 5). O desenvolvimento é feito da mesma maneira como se veio fazendo até agora com os transformadores. Antes de começar o desenvolvimento, traça-se uma circunferência de centro O (fig. 1) de diâmetro igual ao diâmetro médio da boca (não se representou esta circunferência na figura 1) e, desde O , traçam-se retas que passem pelos pontos a, b, c , etc., até cortar a circunferência média imaginária, determinando assim novos pontos. Depois flexiona-se uma régua flexível até acoplá-la à circunferência imaginária e marcam-se nela esses pontos, sendo esta a régua que se transporta ao desenvolvimento, para determinar os pontos a', b', c' do mesmo (fig. 5).

Nota. Na figura 5 só se representou meio desenvolvimento.

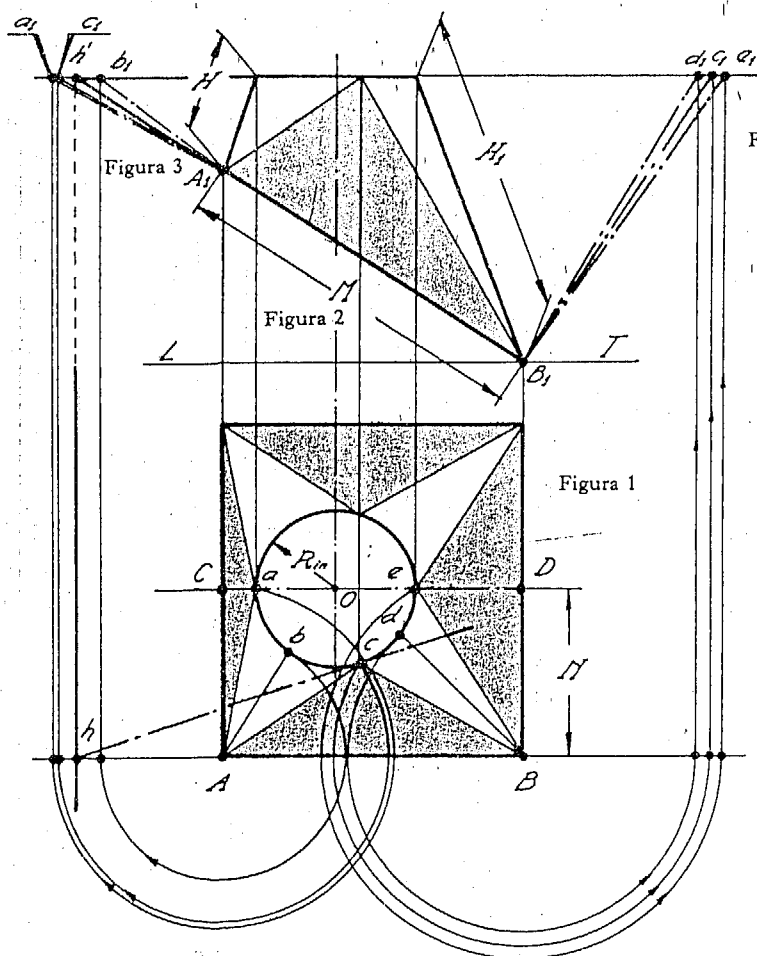


Figura 4

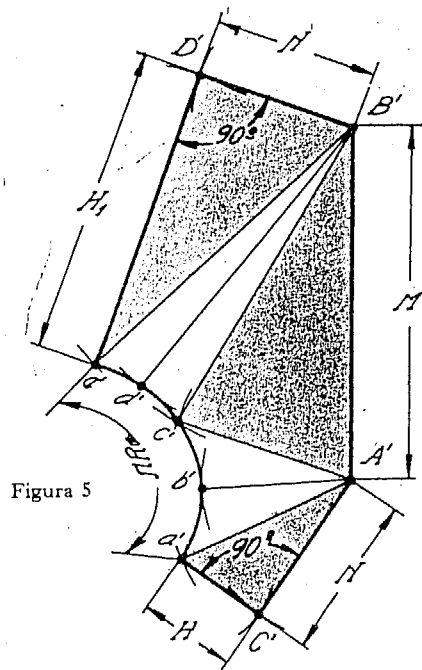


Figura 5

Transferidor de boca circular perpendicular à base retangular

O transformador foi representado na vista em elevação (fig. 1) e de perfil (fig. 2) por suas fibras internas.

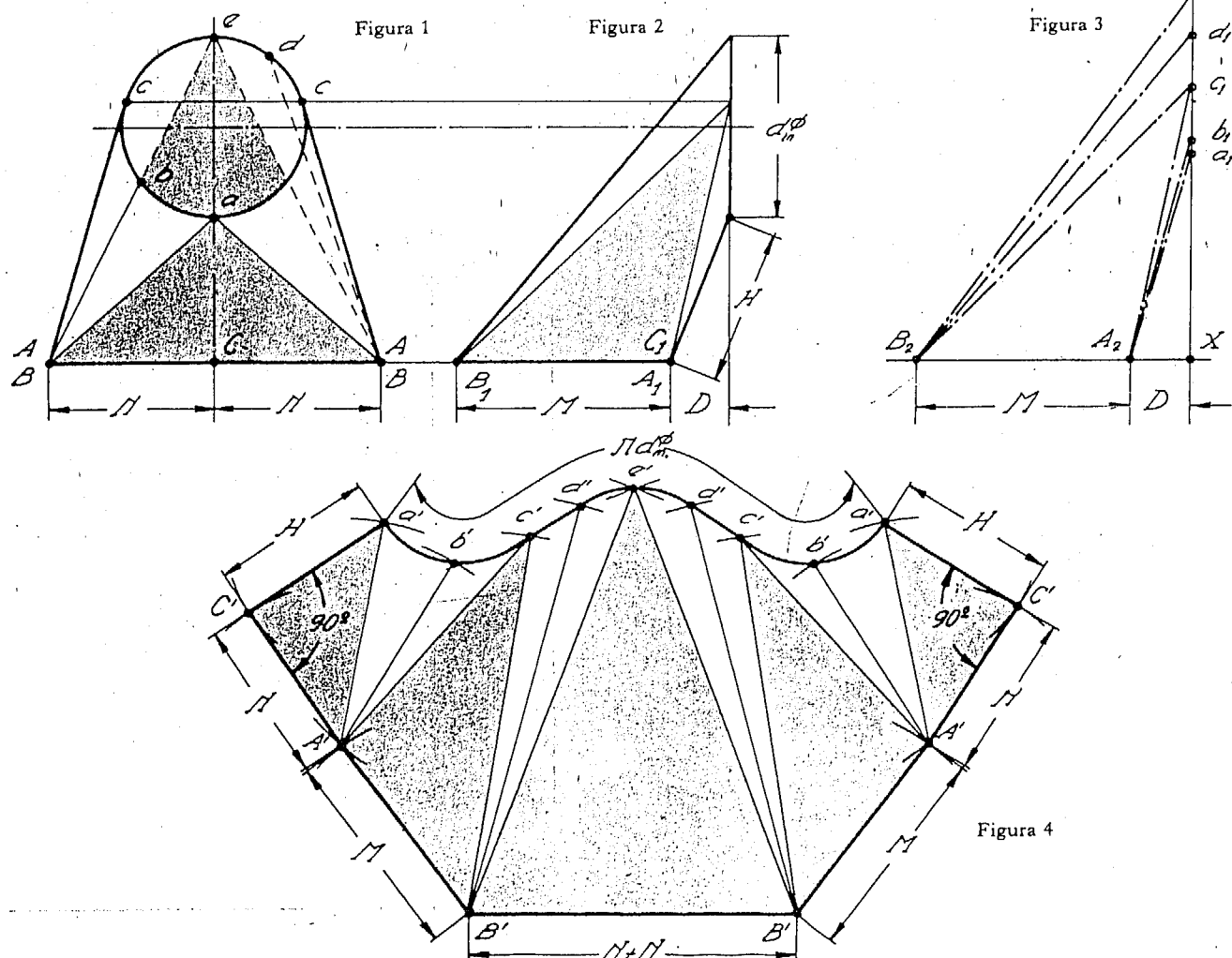
Traçado das geratrizes (fig. 1). Desde o ponto A (em ambas as partes), traça-se uma reta tangente à circunferência interna da boca, determinando o ponto de tangência c , ficando assim determinadas as geratrizes de separação.

Os respectivos arcos ac e ce são divididos, cada um deles, em certo número de partes (duas partes), unindo os pontos de divisão com os respectivos pontos A e B , ficando assim representadas as geratrizes falsas que precisamos para que, uma vez achadas suas verdadeiras grandezas, possamos desenvolver esse transformador.

Traçado das geratrizes reais. Traça-se uma vertical indefinida (fig. 3) e, em uma posição qualquer, marca-se nela o ponto X e a partir deste ponto e para cima, transportam-se as distâncias Aa , Ab , Ac e Bc , Bd , Be da figura 1, determinando novos pontos onde serão postas as letras da mesma origem a_1 , b_1 , c_1 , d_1 e e_1 .

A partir do ponto X traça-se uma horizontal, transportando-se nela a distância D da figura 2, determinando o ponto A_2 . A partir deste ponto transporta-se a distância M , também da figura 2, determinando o ponto B_2 . Estes pontos são unidos com os respectivos pontos a_1 , b_1 , etc., assim como se vê na ilustração, determinando-se as geratrizes reais.

O desenvolvimento do transformador é feito de forma análoga ao dos exercícios anteriores.



Calça de boca retangular e de base circular, inclinadas entre si

Esta calça é composta pela intersecção de dois transformadores iguais de bocas retangular e redonda.

Como esta calça é composta por dois transformadores, representa-se em suas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) por sua fibra interna.

Traçado das geratrizes de separação. Traçam-se as linhas Q e Q_1 do plano projetante vertical que passa pela boca de um dos transformadores e prolonga-se o lado BC (fig. 1) até cortar a linha Q do plano no ponto h ; a partir deste, traça-se uma tangente à circunferência interna da base, determinando o ponto de tangência d que se une com os respectivos pontos B e C por meio de retas geratrizes, ficando assim determinadas as geratrizes de separação.

Geratrizes falsas. Dividem-se os respectivos arcos ad e dg (fig. 1), cada um deles, em um número adequado de partes iguais (três, por exemplo); unindo os pontos de divisão com os respectivos pontos C e B por meio de retas geratrizes, determinaríamos desta maneira as geratrizes vistas em planta.

Os pontos de divisão a, b, c , etc., (fig. 1) são projetados perpendicularmente à base da calça (fig. 2), determinando sobre a mesma os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com os respectivos pontos C_1 e B_1 por meio de retas geratrizes, determinando sobre a linha de intersecção dos dois transformadores os pontos de intersecção $1, 2$ e 3 .

Traçado das geratrizes reais. À direita da calça (projeção vertical), prolonga-se sua base e traça-se uma perpendicular no ponto X (fig. 3), na qual se projeta o ponto C_1 , determinando o ponto C_2 . A partir do ponto X , transporta-se sobre o prolongamento da base da calça as distâncias Ca, Cb, Cc e Cd da figura 1, determinando assim os pontos a_2, b_2, c_2 e d_2 que, ao mesmo tempo, unem-se com o

ponto C_2 , determinando desta maneira as geratrizes reais C_2a_2, C_2b_2 , etc.

Desde os pontos $1, 2$ e 3 traçam-se paralelas à base até cortar as geratrizes reais anteriores da mesma origem nos pontos de intersecção $1_1, 2_1$ e 3_1 .

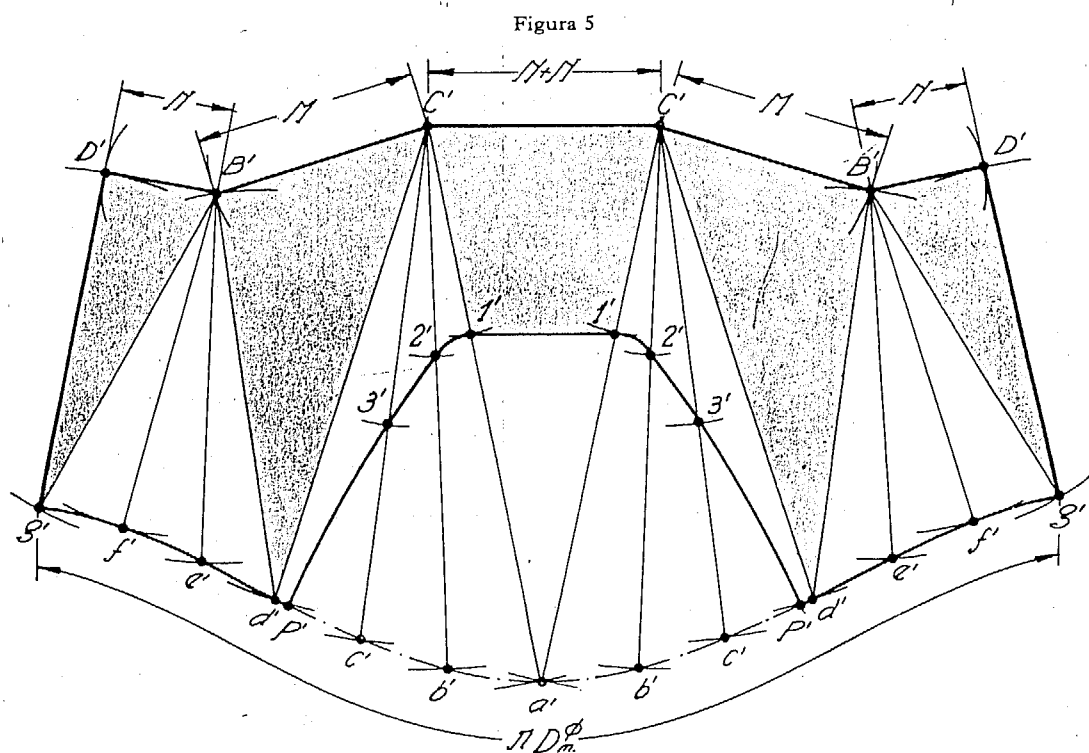
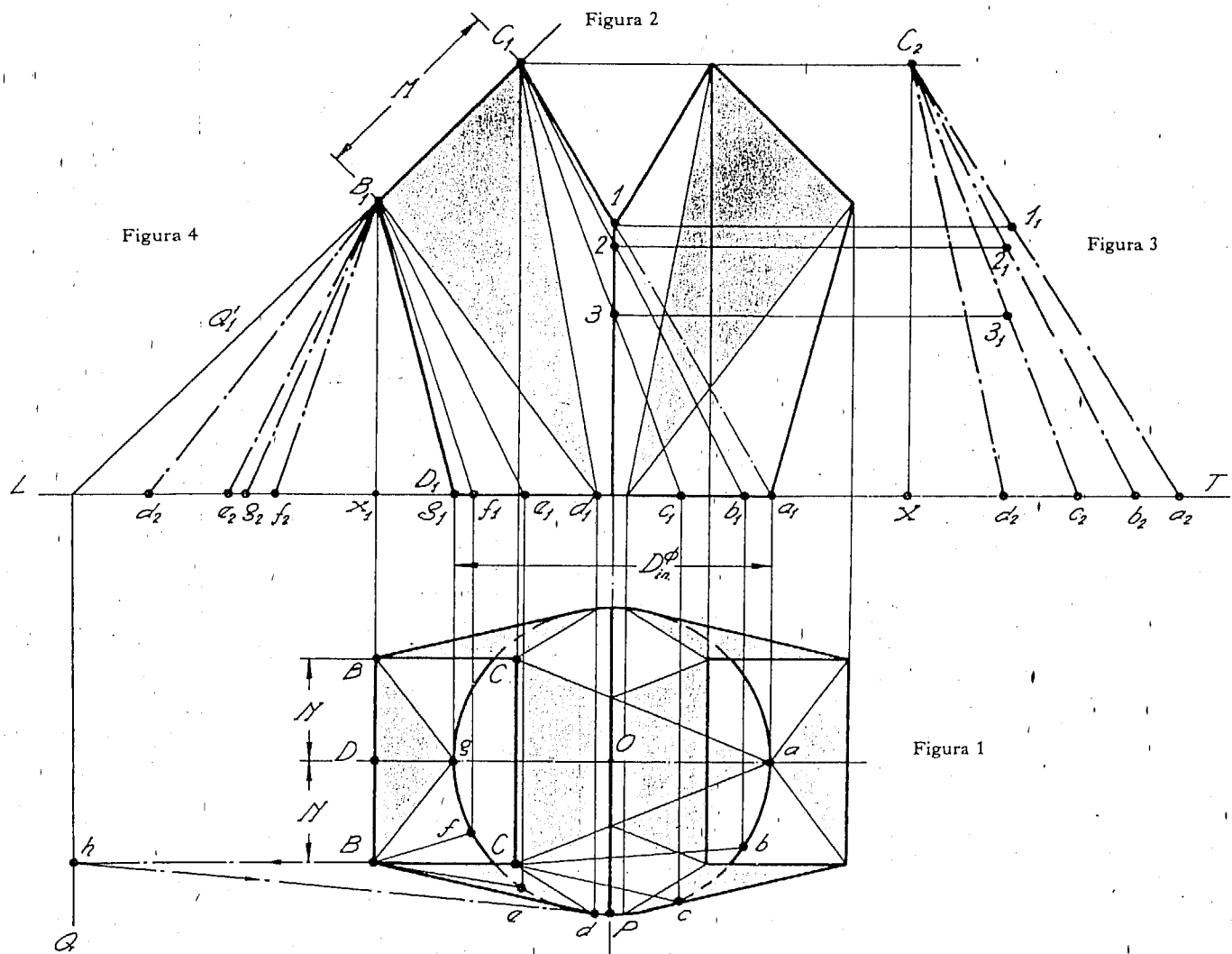
Depois transportam-se sobre a LT e a partir de X_1 (fig. 4) as distâncias Bd, Be, Bf e Bg da figura 1, determinando os pontos d_2, e_2, f_2 e g_2 que se unem com o ponto B_1 , determinando as geratrizes reais B_1d_2, B_1f_2 , etc., das geratrizes da mesma origem.

Desenvolvimento. Marcando o centro em O (fig. 1), descreve-se uma circunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio da base da calça (esta circunferência não foi representada para evitar de fazer muitos traços que poderiam confundir-se com outros). Desde O traçam-se retas que passem pelos pontos a, b, c, P, d, e, f e g até cortar a circunferência imaginária, determinando novos pontos. Depois flexiona-se uma régua flexível que se acopla à circunferência imaginária, marcando-se nela os pontos anteriores da mesma, sendo esta régua a que se transporta ao desenvolvimento (fig. 5) para determinar os pontos $a', b', c', P'd', e', f'$ e g' do transformador que compõe a calça.

Este desenvolvimento é feito de forma habitual, e sobre as geratrizes $C'a', C'b'$ e $C'c'$ transportam-se a partir do ponto C' , as distâncias C_21_2, C_22_1 e C_23_1 da figura 3, determinando assim os pontos $1', 2'$ e $3'$ que se unem por meio de uma curva contínua com o ponto P' .

Os pontos $1'-1'$ são unidos por meio de uma reta, ficando desta maneira desenvolvida a curva de intersecção da calça.

Nota. Embora tenhamos desenvolvido inteiro um dos transformadores que compõem a calça, o mais conveniente seria dividi-lo pela metade, simetricamente, para facilitar o trabalho ao curv-lo.



HÉLICES

EXERCÍCIO

83

Parafuso sem-fim

O parafuso sem-fim serve para transportar grão, concreto, etc. Consta de um eixo e de várias espiras que, vistas em planta (fig. 1), representam-se em forma de coroa circular e, em elevação, em forma de hélice (fig. 2). Cada espira é uma volta de hélice, cujo passo P é igual para todos e, portanto, só é necessário desenvolver uma que, ao mesmo tempo, servirá de gabarito para marcar o resto.

Desenvolvimento da espira. Traçam-se dois triângulos retângulos (fig. 3) de cateto comum igual ao passo P com as respectivas hipotenusas A e B e de catetos respectivos a $\pi \times D^\phi$ e $\pi \times d^\phi$.

Depois traça-se um trapézio circular (fig. 4), cujo comprimento dos arcos A e B são iguais aos comprimentos A e B , respectivamente, da figura 3.

Todos os dados podem ser determinados teoricamente, assim:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\pi \times D^\phi)^2 + P^2} & E &= \frac{D^\phi - d^\phi}{2} & r &= \frac{B \times E}{A - B}; & \alpha &= 360^\circ - \frac{360^\circ \times A}{2\pi \times R} \\ B &= \sqrt{(\pi \times d^\phi)^2 + P^2} & R &= r + E \end{aligned}$$

Nota. A representação desta hélice é esquerda.

Figura 2

Figura 3

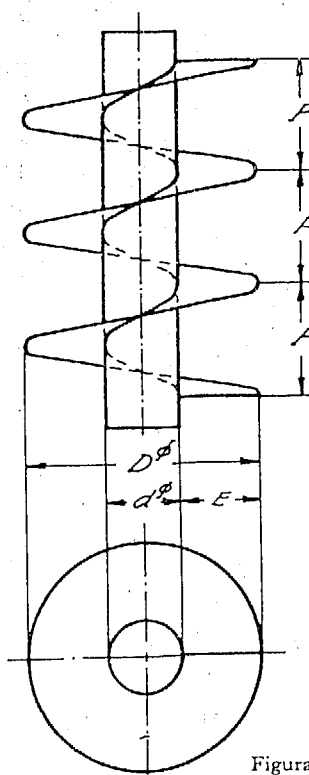
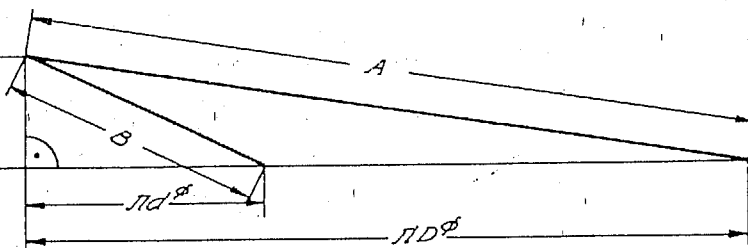


Figura 1

Demonstração da fórmula

$$E = R - r; \quad \frac{E}{r} = \frac{R - r}{r} \quad \underline{1^a \text{ Igualdade}}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{A}{B}; \quad \frac{R - r}{r} = \frac{A - B}{B} \quad \underline{2^a \text{ Igualdade}}$$

$$\underline{\text{Logo:}} \quad \frac{E}{r} = \frac{A - B}{B}$$

$$\underline{\text{Portanto:}} \quad r = \frac{B \times E}{A - B}$$

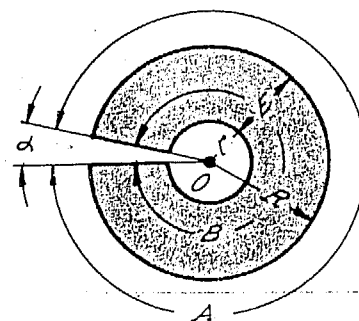


Figura 4

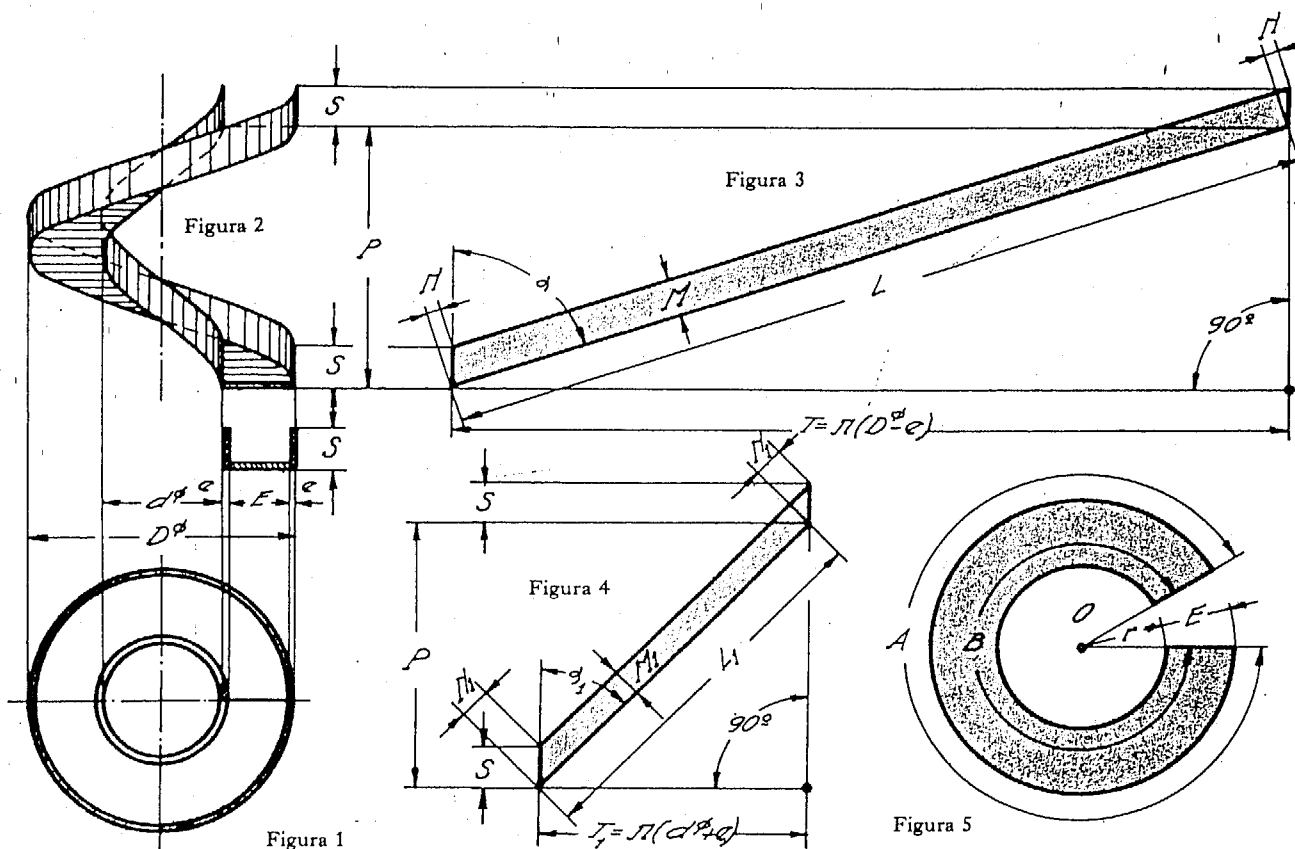
Canal helicoidal

O canal helicoidal é muito prático para descer sacos de cimento, carvão, etc., de um piso para outro. As figuras 1 e 2 representam o canal helicoidal em suas projeções horizontal e vertical (também foi feito um detalhe da posição das chapas laterais e da chapa do fundo).

Desenvolvimento. O desenvolvimento das chapas laterais (figs. 3 e 4) e da chapa do fundo (fig. 5) pode ser feito graficamente, assim como se ilustra. Teoricamente, todos os dados podem ser calculados, como se explica a seguir:

Chapa lateral externa (fig. 3)	$T = \pi \times (D\phi - e)$ $L = \sqrt{T^2 + P^2}$	$\begin{aligned} \sin a &= \frac{T}{L} \\ \cos a &= \frac{P}{L} \end{aligned}$	$\begin{aligned} M &= S \times \sin a \\ N &= S \times \cos a \end{aligned}$
Chapa lateral interna (fig. 4)	$T_1 = \pi \times (d\phi + e)$ $L_1 = \sqrt{T_1^2 + P^2}$	$\begin{aligned} \sin a_1 &= \frac{T_1}{L_1} \\ \cos a_1 &= \frac{P}{L_1} \end{aligned}$	$\begin{aligned} M_1 &= S \times \sin a_1 \\ N_1 &= S \times \cos a_1 \end{aligned}$
Chapa do fundo (fig. 5)	$A = \sqrt{[\pi \times (D\phi - 2e)]^2 + P^2}$ $B = \sqrt{[\pi \times (d\phi + 2e)]^2 + P^2}$	$\begin{aligned} E &= \frac{D\phi - d\phi - (4e)}{2} \\ r &= \frac{B \times E}{A - B} \end{aligned}$	

Nota. Também a representação desta hélice é esquerda.



Escada em caracol (simples)

Quando não se dispõe de espaço suficiente para colocar uma escada comum, este problema pode ser solucionado, construindo-se uma escada em caracol de forma análoga à exposta neste exercício.

Esta escada é muito recomendável pela sua simplicidade de construção e pelo pouco espaço que ocupa. (A representação desta escada é *esquerda*).

As projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) representam a escada sem o corrimão.

Como se pode observar nestas duas projeções, os degraus e as consoles são soldadas em um tubo central que suporta todo o peso. Não é conveniente que a altura H dos degraus tenha mais de 225 mm.

Determina-se o número de degraus dividindo o passo P entre 225 mm, aproximadamente. (Neste caso, o número de degraus é doze e, portanto, o passo será $P = 225 \times 12 = 2\ 600$ mm).

Em alguns casos não é necessário fazer a escada de um passo completo; outras vezes o passo é superior, mas em qualquer um dos dois casos, a altura H deve ser parecida à indicada anteriormente.

O detalhe do degrau é representado nas figuras 3 e 4 com o pilar e o corrimão.

O corrimão foi construído, neste caso, com uma meia-cana e o pilar é feito de tubo soldado ao degrau. Não é necessário soldar a console ao degrau com um cordão contínuo, mas se pode soldar descontinuamente e em xadrez. O que deve ser soldado fortemente e com cordão contínuo é a console e o degrau no tubo central.

Desenvolvimento do corrimão (fig. 5). Curva-se a meia-cana do corrimão ao raio r e dá-se-lhe o comprimento A ; depois, colocam-se pilares nos degraus e se pontilha a meia-cana curvada, entortando-a até acoplá-la a esses pilares.

O raio r e o arco A são calculados assim:

M = distância do centro do pilar ao centro do tubo-eixo da escada (fig. 3):

$$A = \sqrt{(2\pi M)^2 + P^2} \quad ; \quad r = \frac{A \times M}{A - P}$$

A escada também pode ser feita como se vê no detalhe dos degraus (figs. 6 e 7) e, caso interessar, ficaria muito mais resistente que a anterior. (Neste caso, o corrimão é construído com tubo, podendo também ser construído como o anterior, sendo igual o seu desenvolvimento).

A figura 8 dá uma representação do degrau seccionado que é soldado ao degrau inferior (desenhado com linhas imaginárias).

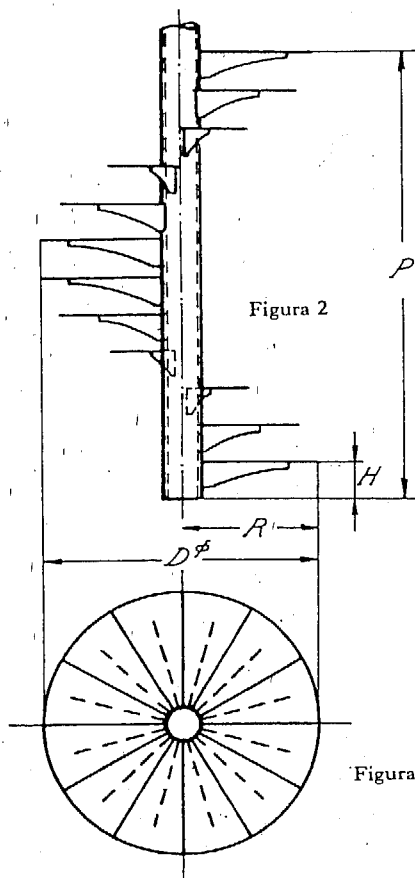
Desenvolvimento do degrau (fig. 9). Traça-se um trapézio circular de raios R igual ao raio externo do degrau da figura 6 e R_1 igual ao raio externo do tubo central da escada da mesma figura. Determina-se o ângulo dividindo 360° entre o número de degraus que compõem essa escada

$$\left(\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ, \text{ neste caso} \right).$$

As linhas de curvatura do degrau (fig. 9) são traçadas nas distâncias A , B e C , tomadas da figura 8.

As letras D.O.L. que foram colocadas sobre as linhas de curvatura significam: dobrar o outro lado. Onde houver as letras D.E.L., deve-se ler: dobrar este lado.

Nota. Recomenda-se que a chapa dos degraus seja estriada, ficando as estrias na parte onde se pisa para as pessoas não escorregarem.



Escala 1:1

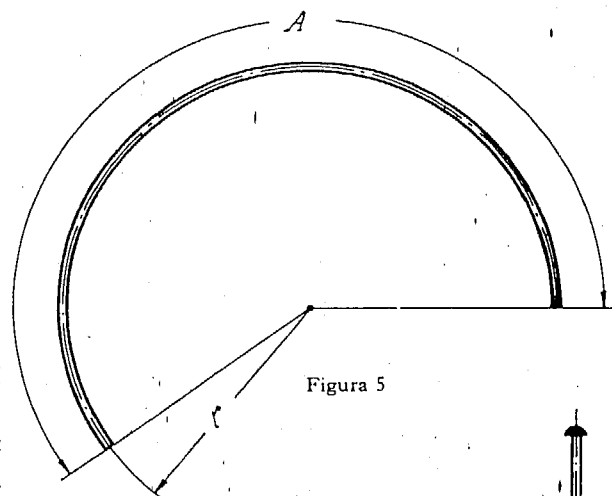
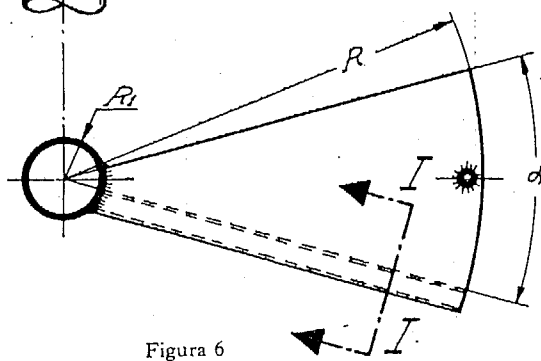
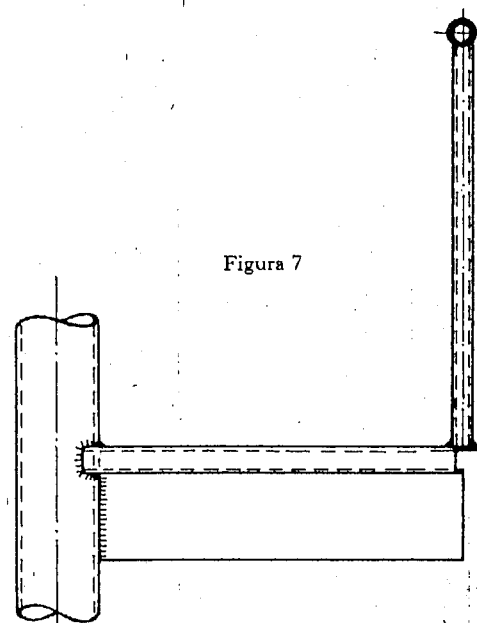


Figura 4

Figura 3

Escala 2:1

Figura 7



Escala 3:1

Figura 8

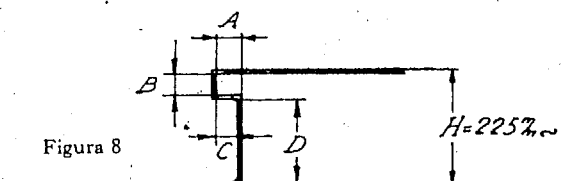
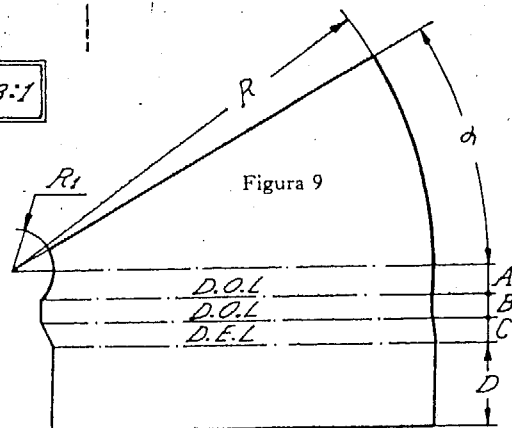


Figura 9



Intersecção de um cone em uma hélice

A figura 1 dá a representação de uma hélice em suas projeções horizontal e vertical.

Essa hélice é representada na projeção horizontal, conforme a circunferência de diâmetro D° , carecendo de diâmetro interno, já que este é uma reta de topo, como se pode ver na projeção vertical.

O desenvolvimento desta hélice é um trapézio circular (fig. 2). Os dados para desenvolvê-la são calculados aplicando as seguintes fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{(\pi \times d^\circ)^2 + P^2} \\ B &= P \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E &= \frac{D^\circ}{2} \\ R &= \frac{A \times E}{A - B} \end{aligned}$$

Esta hélice é representada à direita nas figuras 3 e 4 e com linhas imaginárias.

Traçado da linha de intersecção. Divide-se a circunferência da base do cone (fig. 4) em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo) e, desde o ponto V_1 , traçam-se retas indefinidas que passem pelos pontos de divisão a , b , c , etc., ficando assim representadas as geratrizes desejadas na projeção horizontal. Depois representam-se estas geratrizes na projeção vertical, tal como se vê na figura 3. As geratrizes Vb_1 , Vc_1 e Vd_1 são cobertas pelas respectivas geratrizes Vh_1 , Vg_1 e Vf_1 por estarem na parte oposta a estas.

Uma vez que se tiver conseguido o número adequado de geratrizes representadas nas duas projeções anteriores, divide-se o passo P em oito partes iguais, neste caso (fig. 3) e desde os pontos de divisão a , b , c , etc., traçam-se perpendiculares ao eixo do cone, determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos de intersecção a_2 , b_2 , c_2 , etc., que se unem ordenadamente por meio de uma curva contínua, determinando assim a linha de intersecção na projeção vertical.

A distância $a-a_3$ (fig. 4) é dividida, neste caso, em oito partes iguais, determinando novos pontos a partir dos quais traçamos arcos de centro V_1 , determinando sobre as respectivas geratrizes os pontos b_3 , c_3 , d_3 , etc., que, unidos por meio de uma

curva contínua, fariam representar a projeção horizontal da linha de intersecção.

Sobre as correspondentes geratrizes e a partir dos respectivos pontos a_3 , b_3 , c_3 , etc. (fig. 4), transporta-se a distância E_1 da figura 3, determinando novos pontos que chamaremos a_4 , b_4 , c_4 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim representada em planta a parte de hélice desejada que está sombreada, estando sombreada também na vista em elevação.

Caso nos interessasse que a parte de hélice estivesse no interior do cone, o procedimento seria parecido, considerando que a distância E_1 da figura 3 deve ser transportada para dentro.

Desenvolvimento da espira. Marcando o centro em O (fig. 5), descreve-se um arco de raio

$$R = \frac{A \times E}{A - P} \text{ e de comprimento}$$

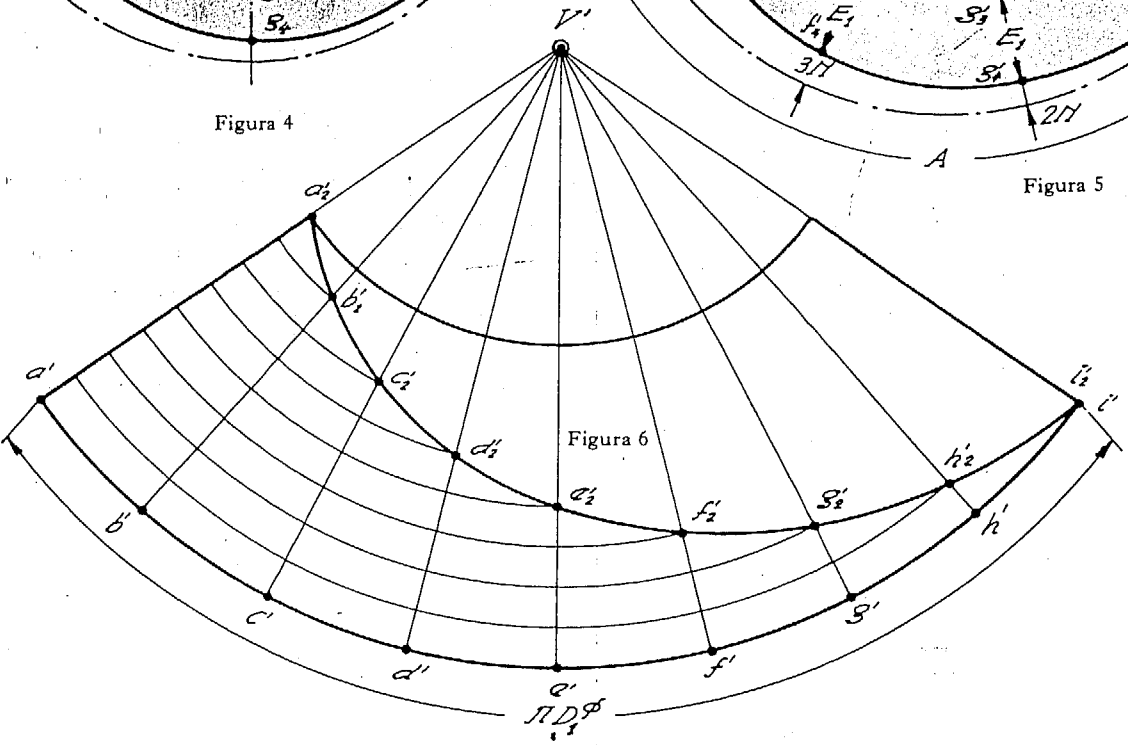
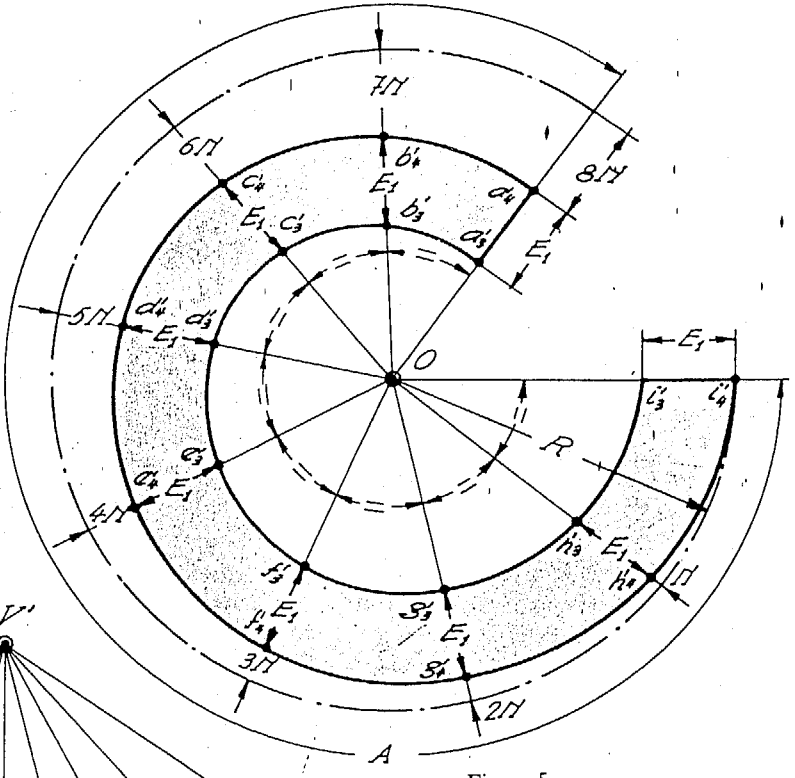
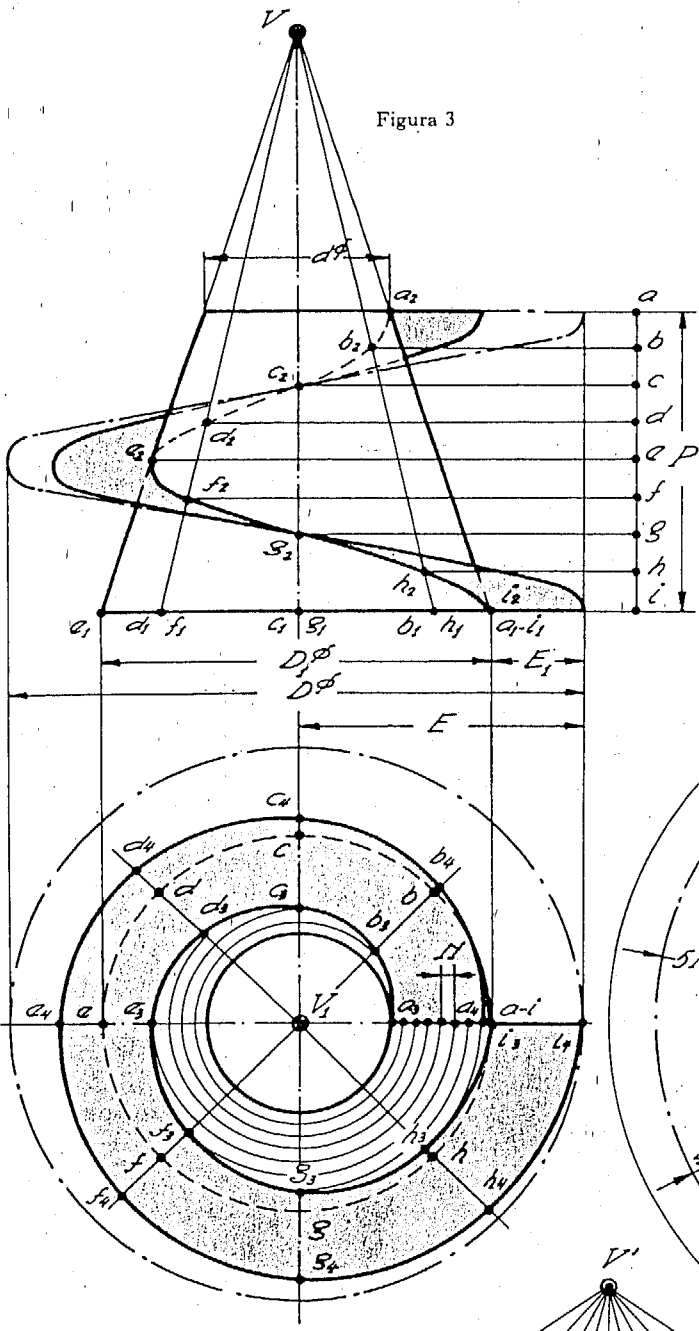
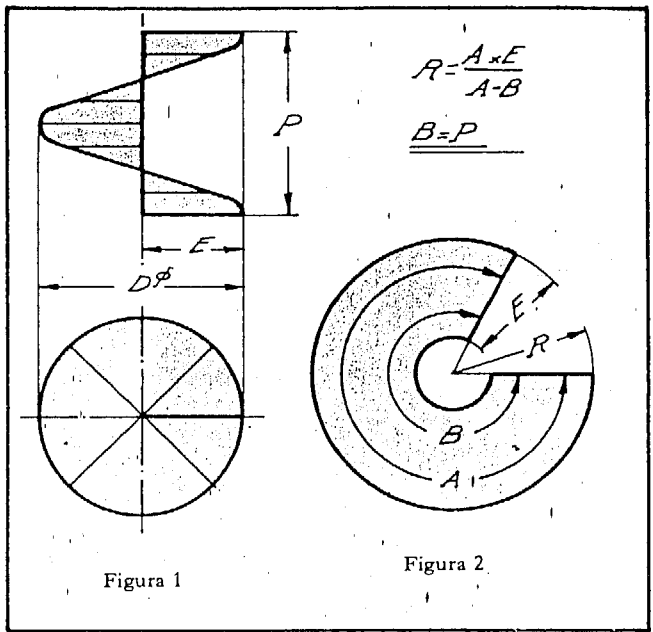
$A = \sqrt{(\pi \times D^\circ)^2 + P^2}$. Neste caso, este arco é dividido em oito partes iguais por meio de retas radiais. A partir do arco transporta-se sobre estas retas as respectivas distâncias N , $2N$, $3N$, etc., determinando os pontos h'_4 , g'_4 , f'_4 , etc. (N é igual à oitava parte da distância $a-a_3$ da figura 4); estes pontos são unidos por meio de uma curva contínua.

A partir dos pontos a'_4 , b'_4 , c'_4 , d'_4 , e'_4 , f'_4 , g'_4 , h'_4 e i'_4 , transporta-se sobre as retas radiais a distância E_1 da figura 3, determinando assim os pontos a'_3 , b'_3 , c'_3 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvida a parte de hélice desejada.

Desenvolvimento do cone (fig. 6). O desenvolvimento do tronco de cone é feito como estivemos fazendo até agora. Este é dividido, neste caso, em oito partes iguais, e também se divide a geratriz $a'a_2$ em oito partes iguais, a partir das quais se traçam arcos de centro V' , determinando sobre as correspondentes geratrizes os pontos de intersecção b'_2 , c'_2 , d'_2 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua, fariam desenvolver a linha de intersecção que serve de guia no momento de se armar a hélice.

$$R = \frac{A \times E}{A - B}$$

$$\underline{B = P}$$



A helicóide

A helicóide é formada por uma reta inclinada tangente à hélice diretriz, cuja inclinação é igual à inclinação da hélice desenvolvida. Assim, as tangentes bb_1 , cc_1 , etc. da figura 3 têm a mesma inclinação que a reta $c'E$ da figura 2, sendo esta reta a hipotenusa do triângulo de base $c'F$ igual ao desenvolvimento da circunferência de diâmetro d° e de altura igual ao passo P .

Representação. Divide-se a circunferência diretriz (fig. 3) em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo) e pelos pontos de divisão b , c , d , etc., traçam-se tangentes à circunferência diretriz. Sobre as respectivas tangentes, transportam-se a partir de b , c , d , etc., $1/8$, $2/8$, $3/8$, etc. do desenvolvimento da circunferência diretriz, determinando os pontos b_1 , c_1 , d_1 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua, determinariam a curva que forma a helicóide ao ser seccionada por um plano secante perpendicularmente ao eixo desta.

A reta ag (fig. 3) é dividida em certo número de partes iguais (dois, por exemplo) e, desde os pontos de divisão f e g , traçam-se tangentes à circunferência diretriz, determinando sobre a curva anterior os pontos f_1 e g_1 . A partir de c' (fig. 2), transportam-se sobre a linha $c'F$ as distâncias ff_1 e gg_1 da figura 3, determinando novos pontos que chamaremos f_2 e g_2 , respectivamente.

Estes pontos são projetados paralelamente ao eixo da helicóide, determinando sobre a hipotenusa $c'E$ os pontos f_3 e g_3 , respectivamente; a partir dos quais se traçam paralelas à reta $c'F$, projetando-se nelas os pontos f e g de figura 3, determinando os pontos de intersecção f_4 e g_4 que se unem com o ponto a' por meio de uma curva contínua.

A hélice diretriz enrolada no cilindro de diâmetro d° e a hélice externa que parte do ponto g_4 (fig. 2) são representadas, assim como se explica na parte de "Geometria descritiva", na seção correspondente às hélices (figs. 164, 165 e 166).

Desenvolvimento. Traçam-se dois triângulos retângulos (fig. 4) de altura comum E_1G igual ao passo P e tendo como bases respectivas as distâncias E_1F_1 iguais ao desenvolvimento da circunfe-

rência de diâmetro $D^\circ (= \pi \times d^\circ)$ e E_1H igual ao desenvolvimento da circunferência de diâmetro $d^\circ (= \pi \times d^\circ)$.

Unem-se os pontos F_1 e H com o ponto G , determinando assim os respectivos comprimentos A e B , correspondentes aos comprimentos das hélices externa e interna desenvolvidas.

Teoricamente, podemos calculá-las assim:

$$A = \sqrt{(\pi \times D^\circ)^2 + P^2} \quad \text{e} \quad B = \sqrt{(\pi \times d^\circ)^2 + P^2}$$

Determinação do raio r (fig. 5):

$$r = \sqrt{\frac{M^2 \times B^2}{A^2 - B^2}}$$

M = distância c'_3c_3 da figura 2. (o ponto c_3 foi determinado projetando o ponto c_2 da figura 3 paralelamente ao eixo da helicóide da figura 2 até cortar a hipotenusa $c'E$ no ponto c_3).

Em seguida, traça-se, a partir do ponto F_1 (fig. 4) e sobre a reta F_1E_1 , o comprimento do arco gc_2 da figura 3, determinando um ponto que chamaremos c_4 , a partir do qual se traça uma perpendicular à reta F_1E_1 até cortar a reta F_1G no ponto c_5 .

Em uma posição adequada, marca-se o ponto O (fig. 5) e, desde este ponto, descreve-se um arco de raio r , dando a este arco o comprimento B , tomado da figura 4, determinando assim os pontos a' e a'' . A partir de a' , traça-se sobre o arco uma quarta parte do comprimento B , determinando o ponto c' , a partir do qual se traça uma tangente a esse arco, dando-lhe o comprimento M da figura 2, determinando desta maneira o ponto c'_2 , a partir do qual se passa um arco descrito, desde o centro O .

A partir de c'_2 e abaixo do novo arco, traça-se o comprimento c'_2g' igual à distância F_1c_5 da figura 4.

Depois, transporta-se sobre o arco anterior e a partir de g' o comprimento A , tomado da figura 4, determinando um novo ponto que chamaremos g'' . Os pontos a' e g'' são unidos por meio de uma reta, o mesmo acontecendo com os pontos a'' e g'' , ficando assim desenvolvida a helicóide.

Nota. Na página seguinte dá-se a demonstração da fórmula que determina o raio r .

SUPERFÍCIES NÃO DESDOBRÁVEIS

EXERCÍCIO

88

A esfera (primeiro procedimento)

Teoricamente, a esfera não é desdobrável, mas chegamos a desdobrá-la praticamente.

Na figura 1 representa-se uma calota de esfera de diâmetro D° , sendo sua superfície igual à superfície do círculo de raio $R = P$ (fig. 2).

Portanto, o desenvolvimento desta calota (fig. 1) é o círculo da figura 2. Caso tenhamos que dividir a esfera em várias zonas, devido às dimensões, para depois estampar essas zonas esféricas, procederemos da seguinte maneira para desenvolvê-las.

Uma vez dividida a esfera por meio de planos paralelos e em um certo número de zonas esféricas, rematadas por duas calotas, começa-se a desenvolver cada tipo de zona esférica separadamente, como no caso da calota, servindo estas zonas de gabarito para marcar o resto das zonas esféricas da mesma origem. Nas projeções horizontal (fig. 4) e vertical (fig. 3), as diferentes zonas esféricas e a calota que vamos desenvolver são sombreadas.

Divide-se o arco ab (fig. 3) em duas partes iguais, determinando o ponto c que se projeta na figura 4, determinando sobre o eixo horizontal o ponto c_1 que é girado em redor do ponto O_5 , determinando o ponto c_2 que se projeta perpendicularmente à paralela ao eixo horizontal da esfera (fig. 3) traçada desde o ponto c , determinando assim o ponto de intersecção c_3 .

Traça-se o plano $P-1$ que passa pelos pontos a_3 e b_3 , determinando sobre a circunferência externa da esfera o ponto B . Também se traça um plano $P-2$ que passa pelo ponto c_3 e que seja paralelo ao anterior, determinando na circunferência anterior o ponto A .

Desde o ponto O se traça uma perpendicular aos planos anteriores e no ponto O_2 (fig. 5) desta perpendicular, traça-se uma paralela aos planos $P-1$ e $P-2$. Esta paralela é projetada pelos pontos A e B da figura 3 e determinam-se assim os pontos A_1 e B_1 , pelos quais passam circunferências de centro O_2 .

Os pontos a , a_3 , b , b_3 e c_3 , (fig. 3) são projetados na figura 5, determinando sobre as circunferências da mesma origem os pontos a' , a'_3 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, determinando assim uma vista da zona esférica, perpendicularmente aos planos $P-1$ e $P-2$.

Em seguida, traça-se o ponto O_2 (fig. 6) e desde este ponto traçam-se retas que formem os ângulos α , β e δ iguais aos da figura 5.

Marcando o centro em O'_2 , descrevem-se circunferências de raios iguais às cordas O_1A , O_1B , O_1a e O_1b da figura 3, determinando sobre as retas da mesma origem os pontos a'' , a''_3 , c''_3 , b''_3 e b'' que, unidos por curvas contínuas, determinam o desenvolvimento dessa zona.

Desenvolvimento da zona central. Marca-se o ponto O' (fig. 7) e daí traçam-se retas que formem os ângulos α_1 e β_1 , como na ilustração, tomando estes ângulos da figura 3. Desde O' traçam-se circunferências de raios R_4 , R_5 e R_6 iguais aos comprimentos das respectivas cordas O_3D , O_3d e O_3C da figura 4, determinando os pontos d'_1 , e'_1 e f'_1 que se unem por meio de curvas contínuas, ficando assim desenvolvida esta zona.

Desenvolvimento da calota. Marcando o centro no ponto O'_4 (fig. 8), descreve-se uma circunferência de raio R_7 igual à corda O_4g da figura 3, ficando assim desenvolvida a calota.

O resto das peças são marcadas com os seus correspondentes gabaritos.

Nota. Os planos $P-3$, $P-4$ e $P-5$ que passam pelos pontos e , d e f da figura 4 são os que formam as circunferências que passam pelos pontos e_1 , d_1 e f_1 (fig. 3).

O desenvolvimento é feito pela fibra média.

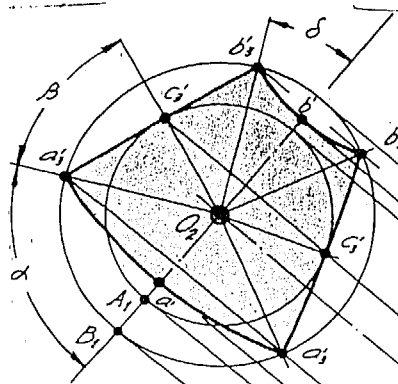


Figura 5

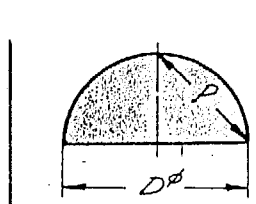


Figura 1

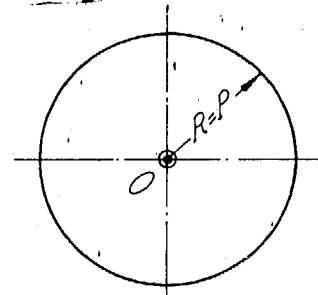


Figura 2

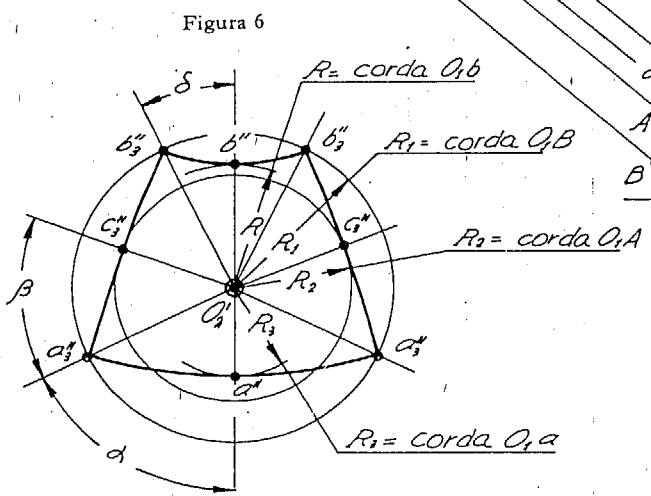


Figura 6

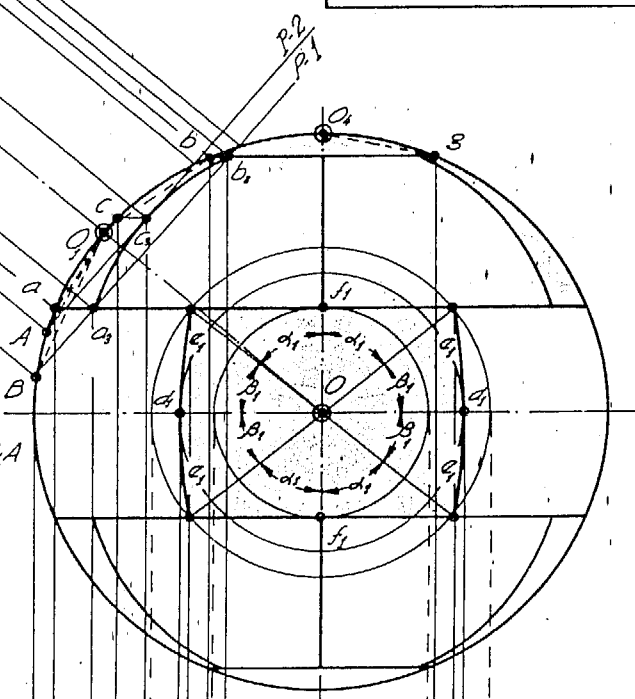


Figura 3

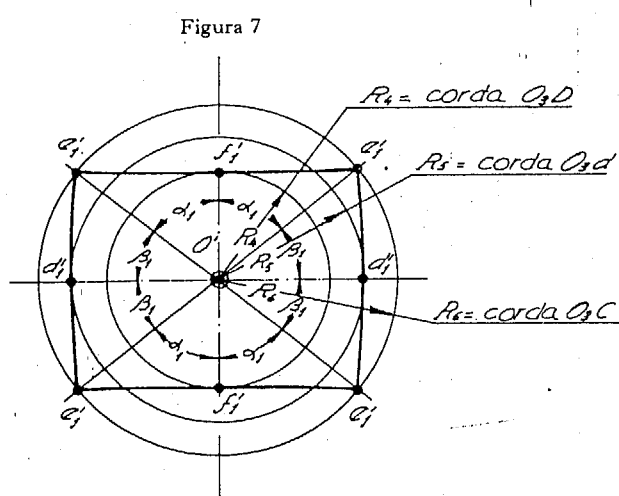


Figura 7

Figura 4

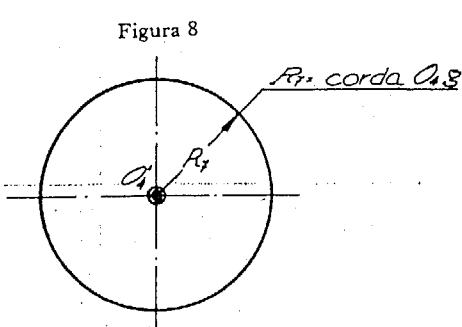
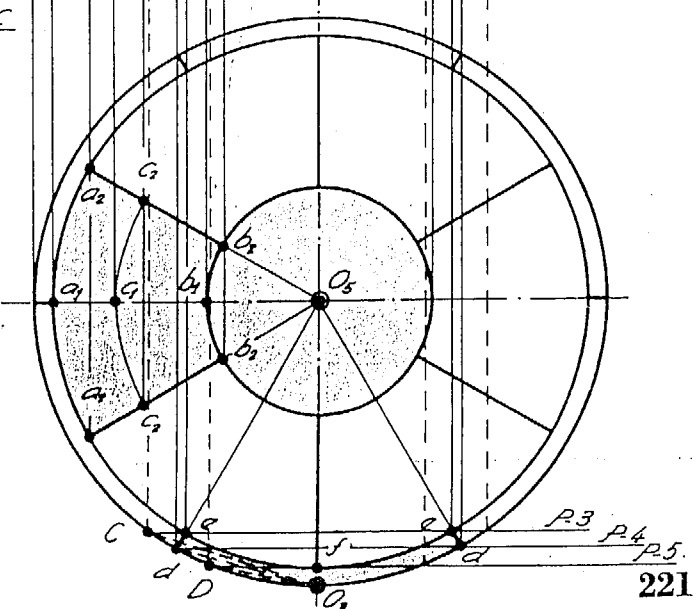


Figura 8



Calota esférica (segundo procedimento)

Esta calota esférica (fig. 1) é representada pela fibra média. Queremos construir a calota em questão em duas peças, ou seja, por uma zona esférica unida pela calota superior.

A zona esférica pode ser desenvolvida em forma de tronco de cone reto de superfície equivalente à da zona.

Primeiramente acha-se o centro de gravidade G do arco $\widehat{abc}$. (A figura 2 dá um gráfico do centro de gravidade G de um arco qualquer).

Em ambas as partes de G (fig. 1) descrevem-se arcos de raios iguais ao comprimento do arco $\widehat{ab} = \widehat{bc}$; depois vai-se experimentando para transportar sobre estes arcos os diâmetros d_1^θ e D_1^θ do cone,

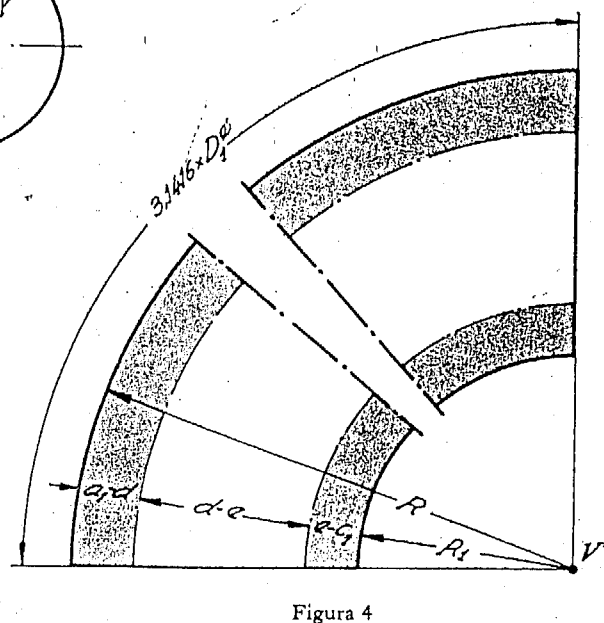
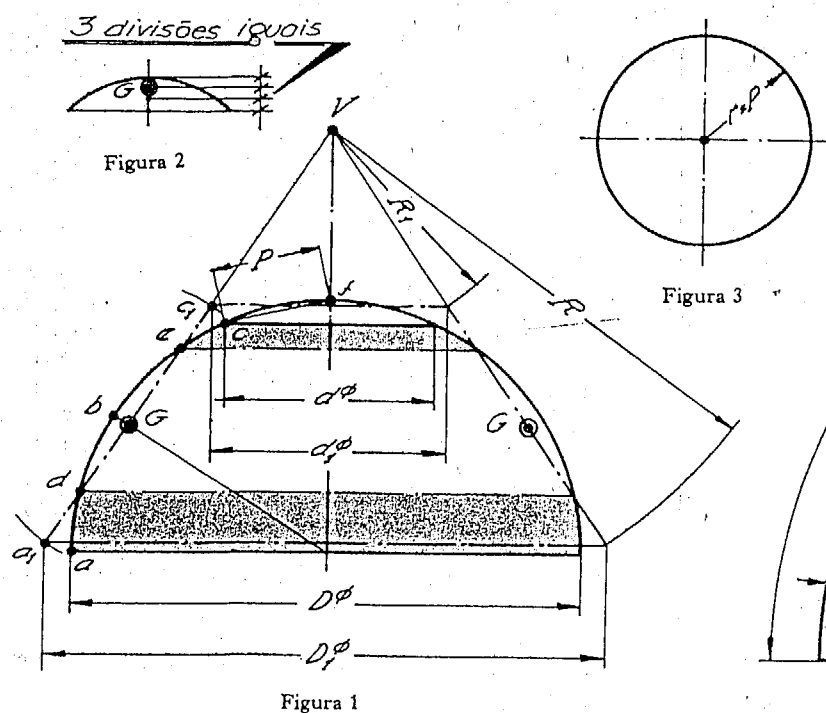
de forma que $\frac{d^\theta}{d_1^\theta} = \frac{D^\theta}{D_1^\theta}$, apro-

ximadamente; desta maneira, determinam-se os pontos a_1 e c_1 que são as extremidades dos diâmetros do tronco de cone que foi desenhado com linhas imaginárias.

O desenvolvimento da calota superior é igual a um círculo de raio $r = P$ (fig. 3). P é o comprimento da corda cf da figura 1.

Desenvolvimento da zona esférica. Marcando o centro no ponto V' (fig. 4), descrevem-se dois arcos de raios respectivos R e R_1 , iguais aos da figura 1, dando ao arco maior o comprimento $3,1416 \times D_1^\theta$, unindo as extremidades deste arco com o ponto V' , ficando assim desenvolvida a zona esférica.

Nota. As zonas sombreadas são as de contração e as zonas brancas, são as de expansão.



Esfera (terceiro procedimento)

A representação da esfera (fig. 1) é feita por sua fibra média, dividindo-a em várias zonas esféricas unidas por duas calotas.

O desenvolvimento da calota e das zonas B (fig. 2) e C (fig. 3) é feito de forma análoga à do exercício anterior.

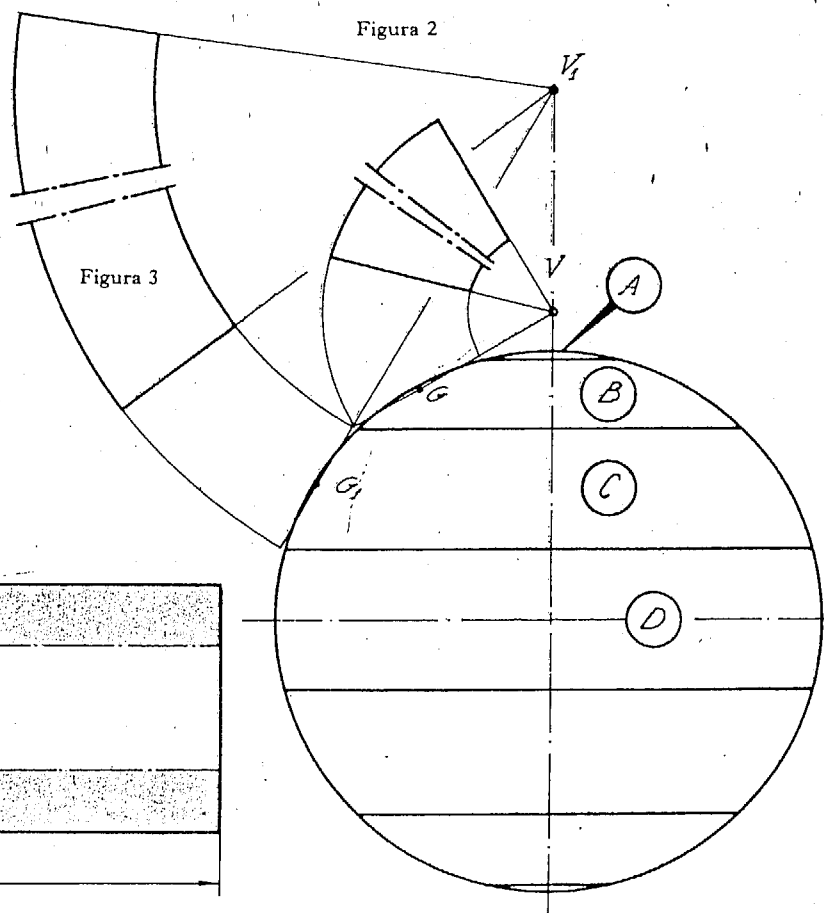
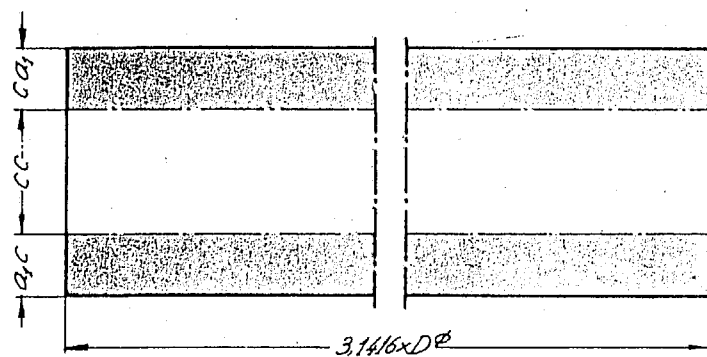
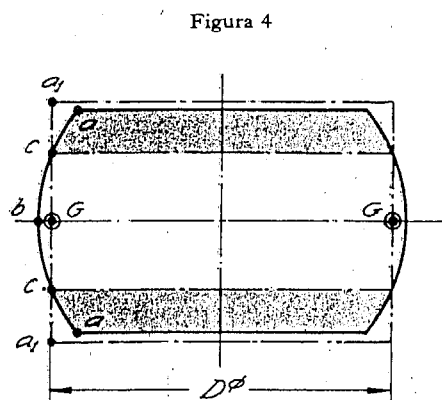
O desenvolvimento da peça D (fig. 1) é feito da seguinte maneira:

Na figura 4 representou-se a peça D e o centro de gravidade G do arco $\widehat{ab}$. Pelos centros de gravidade traçam-se retas paralelas ao eixo vertical da peça, dando-se a elas as distâncias Ga_1 iguais

aos comprimentos dos arcos $\widehat{ab}$, ficando assim desenhado com linhas imaginárias o cilindro de diâmetro D^ϕ de superfície equivalente à da peça D.

Desenvolvimento. Traça-se uma reta (fig. 5) de comprimento igual a $3,1416 \times D^\phi$ e, desde as extremidades desta reta traçam-se perpendiculares à mesma, transportando os comprimentos a_1c , cc e ca_1 da figura 4.

Nota. As zonas sombreadas são as de contração e as zonas brancas, as de expansão.



Esfera (quarto procedimento)

O desenvolvimento desta esfera é feito por meio de fusos inscritos (oito fusos, por exemplo).

Neste caso, só é necessário achar os dados de um fuso, já que todos são iguais. O mais correto é representar uma planta da esfera, colocando horizontalmente o eixo do fuso, cujos dados necessários queremos achar para poder desenvolvê-lo (fig. 1). Depois descreve-se um quadrante de circunferência que representa a fibra média do fuso esférico. Este quadrante é dividido em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e, desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao eixo do fuso, cortando-o em a_1, b_1, c_1 , etc. e b_2, c_2 , etc., no contorno externo, ficando assim determinados todos os dados necessários para desenvolvê-lo.

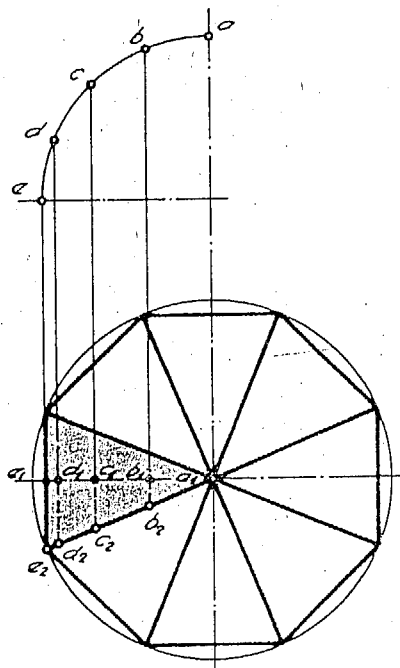


Figura 1

Desenvolvimento. Sobre uma reta qualquer (fig. 2) transportam-se as distâncias $a'_1b'_1, b'_1c'_1$, etc., iguais aos comprimentos dos arcos ab, bc , etc. do quadrante de circunferência da figura 1. Em ambas as partes da reta traçam-se perpendiculares desde os pontos b'_1, c'_1, d'_1 , etc., de comprimentos iguais às distâncias b_1b_2, c_1c_2 , etc., da figura 1, determinando assim os pontos b'_2, c'_2, d'_2 , etc., que unidos com os pontos a'_1 por meio de uma curva contínua, permitem obter o desenvolvimento de um fuso que serve de gabarito para marcar os outros sete restantes.

Nota. Estes fusos são curvados diretamente no cilindro de curvar, já que são formados por cunhas cilíndricas.

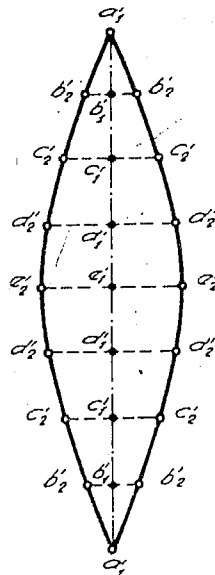


Figura 2

Esfera (quinto procedimento)

Este desenvolvimento também é feito por meio de fusos esféricos, mas se diferencia do anterior porque não pode ser curvado diretamente no cilindro já que primeiramente se faz a curvatura no cilindro para depois colocá-lo em um molde de forma esférica para o processo de moldagem.

Divide-se o quadrante da circunferência média da elevação (fig. 1) em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e, desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares ao eixo horizontal da planta (fig. 2), determinando novos pontos que são girados em redor de O_1 até cortar o contorno externo do fuso e do seu eixo em a_1 , b_1 , etc. e a_2 , b_2 , etc., respectivamente.

Os pontos c , b e b , a são unidos por meio de retas que cortam o eixo vertical nos pontos P e Q (fig. 1).

Desenvolvimento do fuso (fig. 3). Traça-se uma reta indefinida, marcando-se nela os comprimentos dos arcos Oa , ab , bc , etc., da figura 1, obtendo-se desta maneira os pontos O' , a'_2 , b'_2 , c'_2 , etc.

Desde o ponto d'_2 traça-se uma perpendicular em ambas as partes da reta, dando-se também em ambas as partes o comprimento do arco d_2d_1 da figura 2, determinando-se assim os pontos d'_1 .

Marcando o centro em O' (fig. 3), descreve-se um arco que parta de a'_2 , dando-se em ambas as partes deste o comprimento do arco a_2a_1 da figura 1, determinando desta maneira os pontos a'_1 .

A mesma operação é feita com os pontos c'_2 e b'_2 desde os respectivos pontos Q' e P' , respectivamente, obtendo-se assim os pontos c'_1 e b'_1 que se unem ao resto por meio de uma curva contínua. (As distâncias c'_2Q' e b'_2P' são iguais às respectivas distâncias cQ e bP da figura 1).

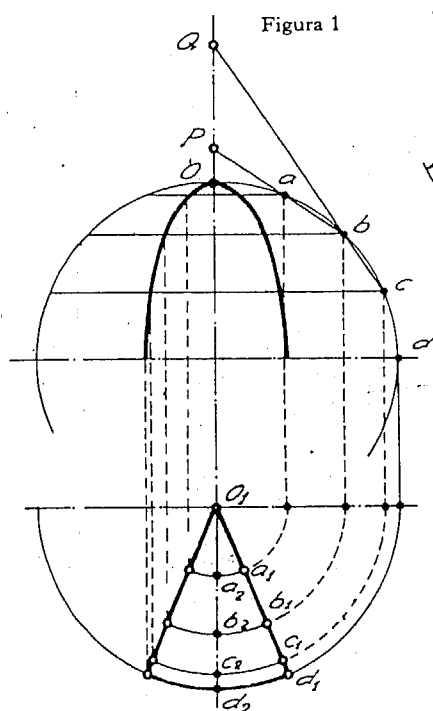


Figura 2

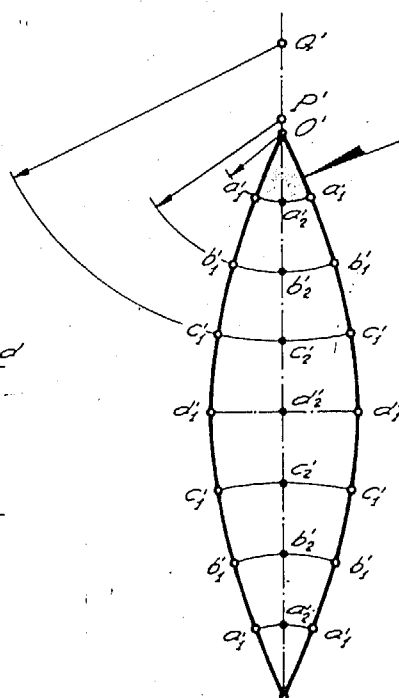


Figura 3

Esta zona pode ser substituída por uma calota comum para todos os fusos

Calota esférica (sexto procedimento)

Uma vez representada a calota esférica pela sua fibra média, traça-se o cone que passa pelo centro de gravidade G (fig. 1) de superfície equivalente à zona esférica. Este cone é determinado como se explica no segundo procedimento.

A zona esférica (fig. 2) da calota esférica é dividida em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). O arco ae (fig. 1) é dividido em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e, desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao eixo horizontal da calota (fig. 2), determinando os pontos a_1, b_1, c_1 , etc., que são girados em redor do ponto V_1 , determinando os pontos a_2, b_2, c_2 , etc. Desde estes pontos traçam-se paralelas ao eixo vertical até cortar as paralelas ao eixo horizontal que partem dos pontos a, b, c , etc. (fig. 1) nos pontos a_3, b_3, c_3 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

Desenvolvimento. Marcando o centro em V' , descrevem-se dois arcos de raio R e R_1 iguais aos respectivos raios R e R_1 da figura 1. Desde V' traça-se uma reta que corte os arcos anteriores nos pontos a'_1 e e'_1 .

A distância $a'_1e'_1$ é dividida em quatro partes iguais, neste caso, e pelos pontos de divisão b'_1, c'_1 , etc., traçam-se arcos de centro V' .

Em ambas as partes da reta $V'a'_1$, transportam-se desde os pontos $a'_1b'_1$, etc., e sobre os arcos da mesma origem os comprimentos dos respectivos arcos $\widehat{a_1a_2}, \widehat{b_1b_2}$, etc. da figura 2, determinando assim os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas que limitam o desenvolvimento.

Nota. Se em vez de desenvolver uma calota tivéssemos que desenvolver a esfera da figura 1-bis, procederíamos da mesma maneira.

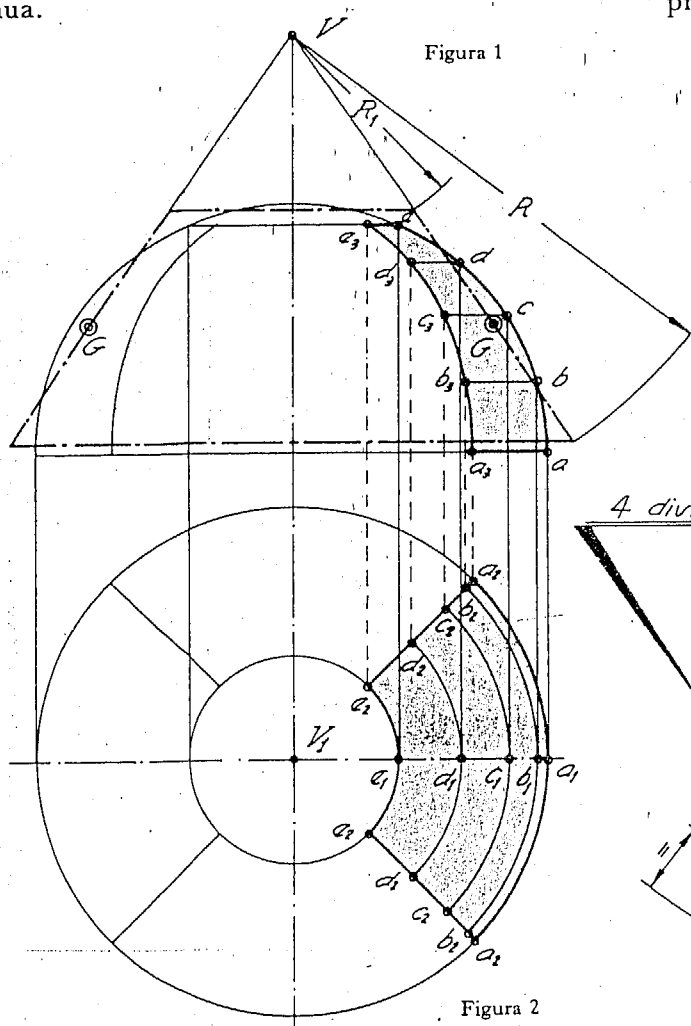


Figura 1

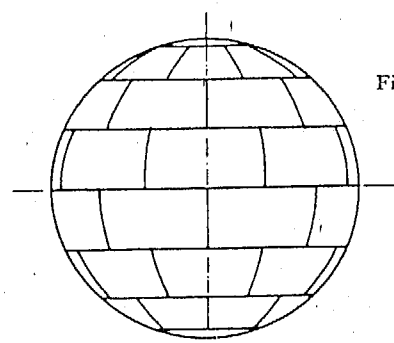


Figura 1 bis

4 divisões iguais

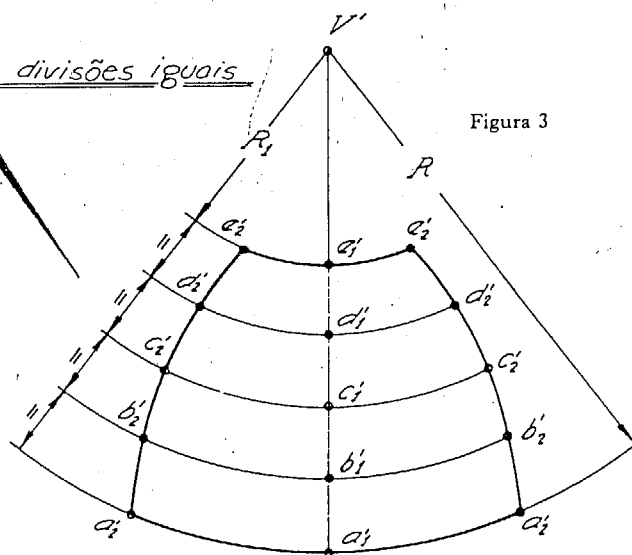


Figura 3

Figura 2

Calota elipsoidal

As projeções horizontal e vertical da calota são feitas por sua fibra média.

O contorno externo da calota, vista em elevação, é um semi-oval de centros O e Q_1 .

Esta calota é desenvolvida de forma análoga à anterior.

Nota. Para facilitar o trabalho do desenvolvimento desta calota, dividimo-la em duas partes, ou seja, por uma zona e uma pequena calota, considerando-se que a calota pertence à curva de raio r_1 e a zona, ao arco de raio r .

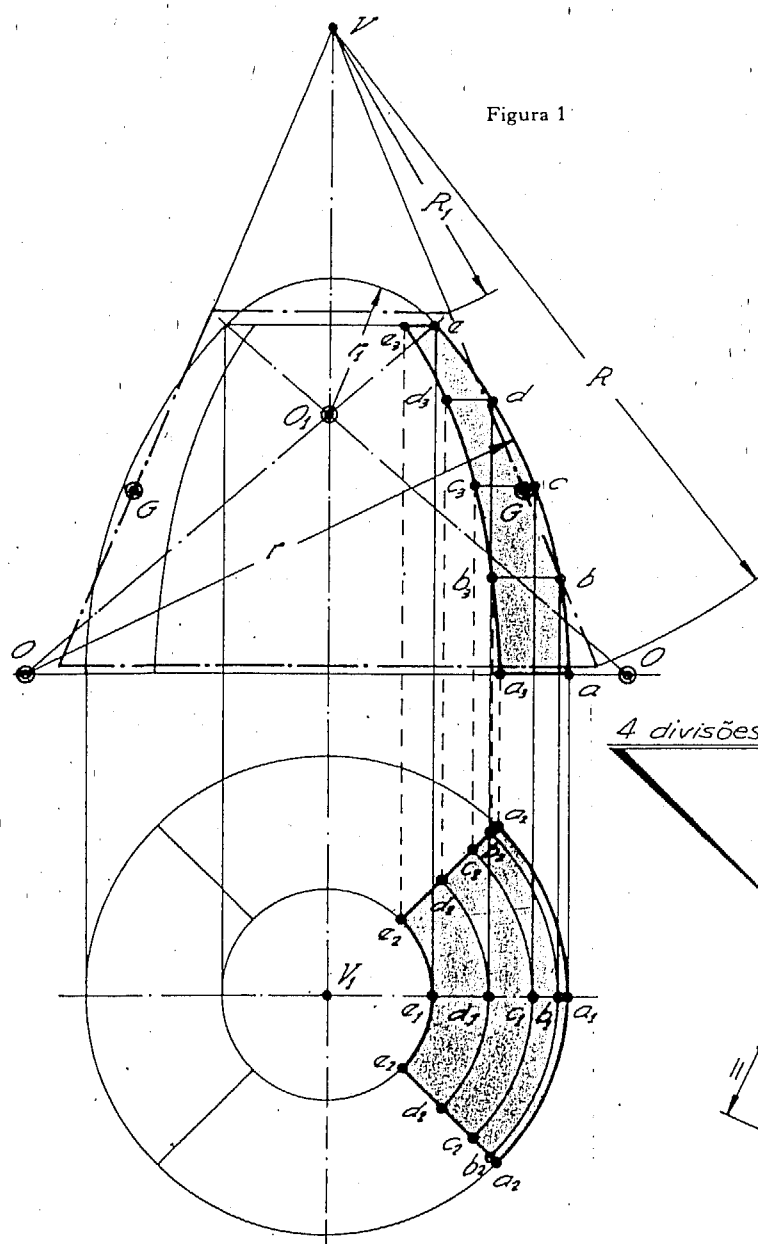


Figura 1

Figura 2

4 divisões iguais

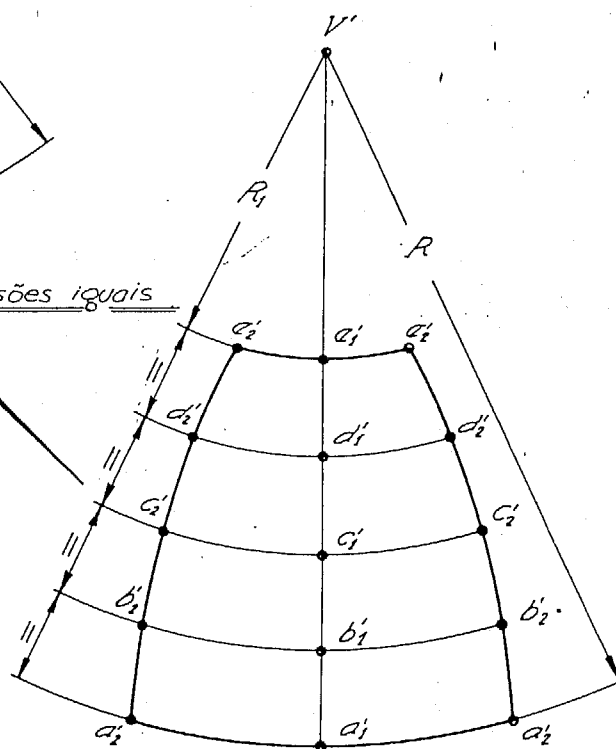


Figura 3

Recipiente esférico (sem soldadura)

A representação deste recipiente é feita por sua fibra média (figs. 1 e 2).

Este recipiente é composto por uma superfície plana limitada pelos pontos O (fig. 1) que estão em verdadeira grandeza nesta projeção; compõe-se também de quatro quadrantes de virolas cilíndricas e de quatro quadrantes de calotas esféricas iguais que estão sombreados.

Desenvolvimento. Desenha-se a superfície plana limitada pelos pontos O (fig. 3). As retas que passam por estes pontos são prolongadas e dá-se-lhes

a distância $\frac{\pi r}{2}$; unem-se as extremidades des-

ta distância por meio de retas, ficando assim desenvolvidas as partes cilíndricas.

Marcando o centro em O (parte superior esquerda), descreve-se um arco de raio $R = P$; a mesma operação é feita com o resto dos pontos O .

Na parte superior direita (fig. 3) foi feito um gráfico para determinar o ponto O_1 , a partir do qual se traça um arco de raio R_1 que seja tangente ao arco traçado com o raio $R = P$ e aos lados das partes de virolas cilíndricas desenvolvidas.

Desta maneira fica desenvolvido o recipiente sem necessidade de ser soldado.

Figura 2

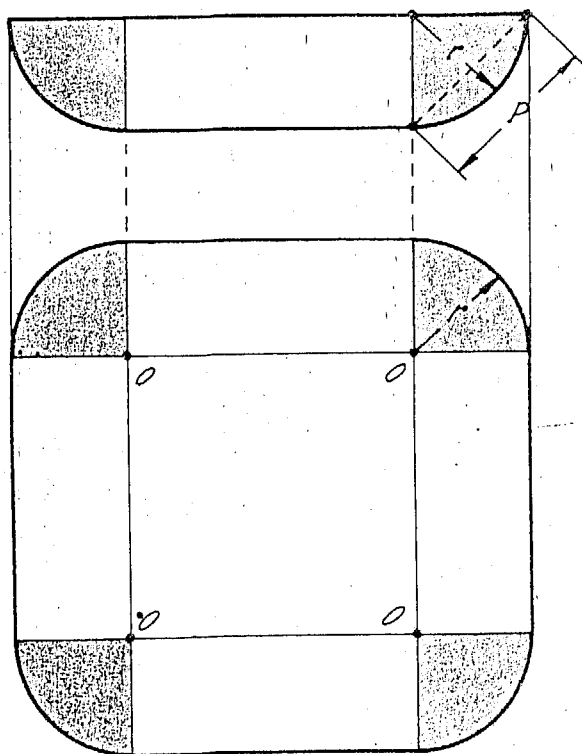


Figura 1

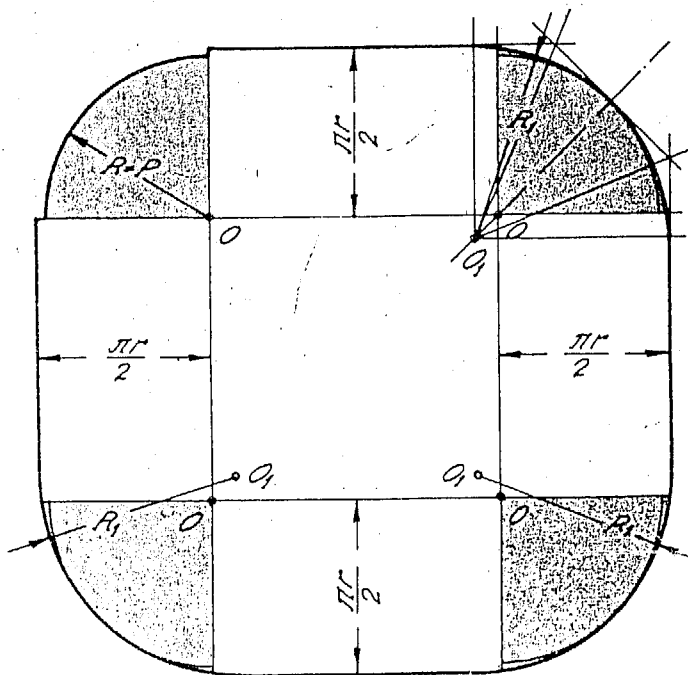


Figura 3

Recipiente esférico (soldado)

Este recipiente tem as mesmas características do anterior, com uma única variação de que o outro não precisa ser soldado e este deve ser soldado pela linha Oa_2 (fig. 1).

Divide-se o arco O_1a (fig. 2) em um número adequado de partes iguais e desde os pontos de divisão a, b e c , traçam-se perpendiculares à projeção horizontal, determinando os pontos a_1, b_1 e c_1 que são girados em redor do ponto O , determinando sobre a linha de soldadura os pontos a_2, b_2 e c_2 , e sobre a vertical novos pontos que também chamaremos a_1, b_1, c_1 .

Os pontos a_2, b_2 e c_2 são projetados perpendicularmente às horizontais que partem dos pontos a, b e c da figura 2, determinando sobre estas os pontos de intersecção a_3, b_3 e c_3 que unidos por meio de uma curva contínua, permitem determinar a linha de soldadura.

Desenvolvimento. O desenvolvimento da superfície plana e das partes cilíndricas (fig. 3) é feito como se explicou no exercício anterior.

Divide-se a largura da parte cilíndrica (parte superior direita) em três partes iguais e desde O , traçam-se arcos que partam dos pontos de divisão a_1, b_1 e c_1 , dando-lhes os comprimentos a_1a_2, b_1b_2 , etc., iguais aos comprimentos dos arcos $\widehat{a_1a_2}, \widehat{b_1b_2}$, etc., da figura 1; os pontos a_2, b_2 e c_2 são unidos por meio de curvas contínuas que limitam o desenvolvimento.

Nota. Recomenda-se fazer furos nos pontos O antes de começar a curvar o recipiente desenvolvido.

Figura 2

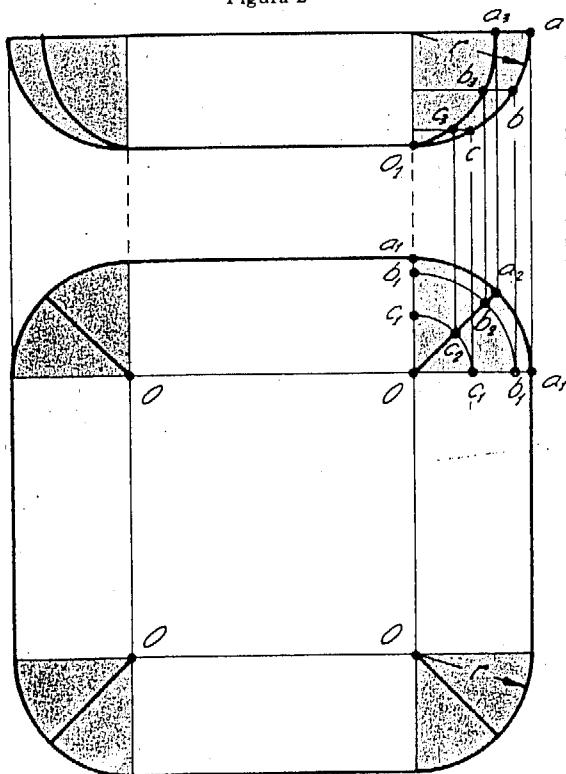


Figura 1

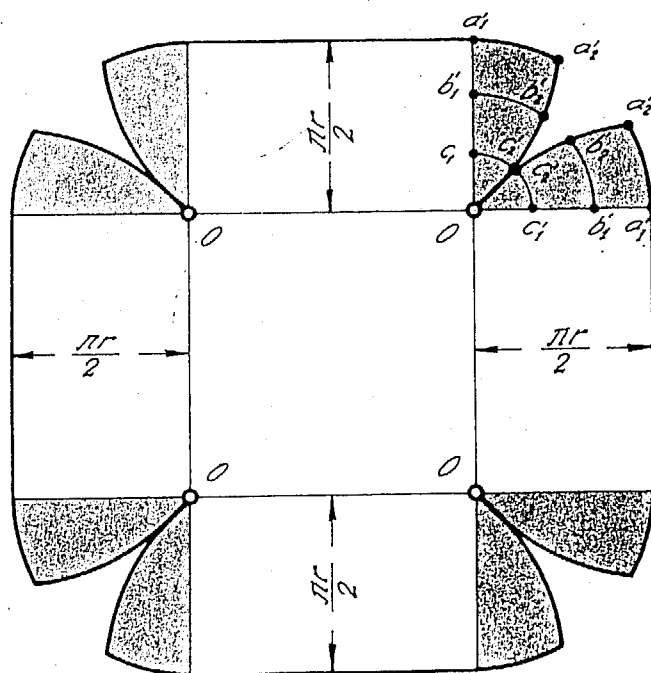


Figura 3

INTERSECÇÕES DE CILINDROS E CONES EM ESFERAS

EXERCÍCIO

97

Intersecções de cilindros e cones em esferas

Generalidades. Sempre que um cone for enxertado em uma esfera e os eixos de ambos estiverem contidos em um mesmo eixo, a linha de intersecção será uma reta.

Isto é o que ocorre com o cone de vértice V de diâmetro D^ϕ , pois, a linha de intersecção será igual ao diâmetro do cone.

A mesma propriedade tem o cilindro quando o

seu eixo coincide com o da esfera. A simples observação da ilustração é suficiente para vê-lo claramente.

Este princípio baseia-se em que qualquer seção feita com um plano que seja perpendicular ao eixo de um cone ou de um cilindro determina uma circunferência; assim, se o mesmo plano secciona a esfera, também determina uma seção circular.

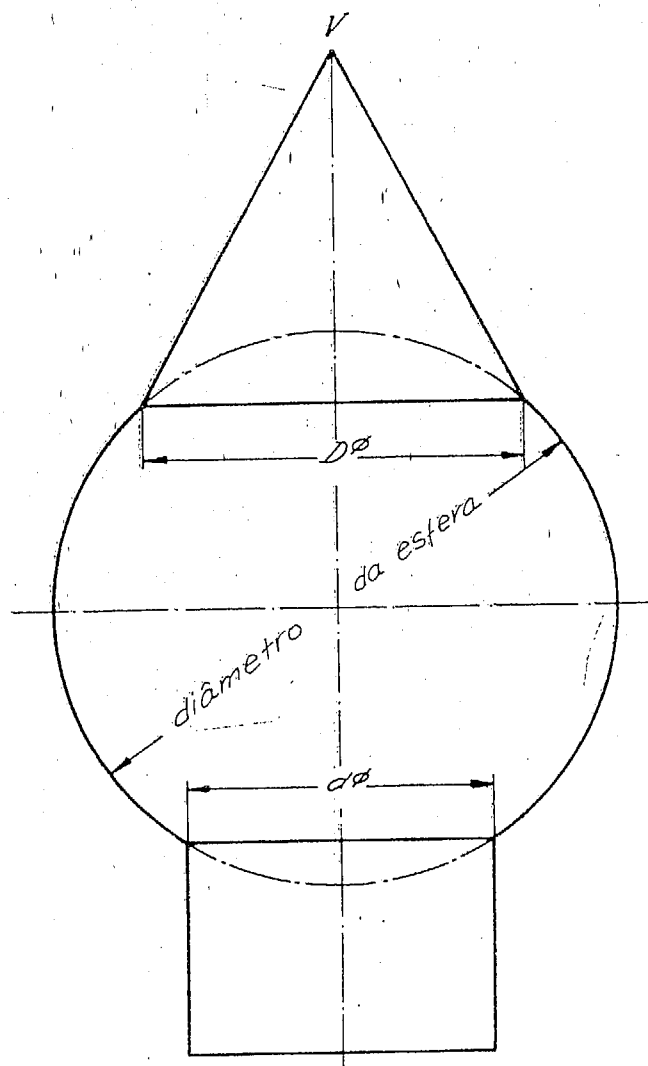


Figura 1

Intersecção de um cilindro em uma esfera, cujos eixos não coincidem

Representa-se a esfera por sua circunferência externa (fig. 1) e o cilindro por seu diâmetro médio.

Marcando o centro no ponto Q de intersecção do eixo do cilindro com o eixo horizontal da esfera, descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio do cilindro e se divide em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo).

Desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se paralelas ao eixo do cilindro, determinando sobre seu diâmetro médio os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc., traçam-se paralelas ao eixo do cilindro, determinando sobre seu diâmetro médio os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc. Em seguida, descrevem-se arcos de centro O (centro da esfera) que partam dos pontos de divisão b, c , etc., determinando sobre o eixo horizontal da esfera os pontos

1, 2, etc. A partir destes pontos traçam-se paralelas ao eixo do enxerto até cortar a circunferência da esfera nos pontos $1_1, 2_1$, etc. e, a partir destes, traçam-se paralelas ao eixo horizontal da esfera, determinando sobre as geratrizes da mesma origem do enxerto os pontos de intersecção b_2, c_2 , etc., que unidos por meio de uma linha contínua, determinariam a linha de intersecção.

Desenvolvimento do enxerto. Traça-se uma reta (fig. 2) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do enxerto ($\pi \times d_m^o$), dividindo-a em oito partes iguais.

Desde os pontos de divisão a'_1, b'_1 , etc., traçam-se perpendiculares a essa reta de comprimentos iguais aos dos respectivos comprimentos das geratrizes, a_1a_2, b_1b_2 , etc. do enxerto, determinando os pontos a'_2, b'_2 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua, determinariam o desenvolvimento.

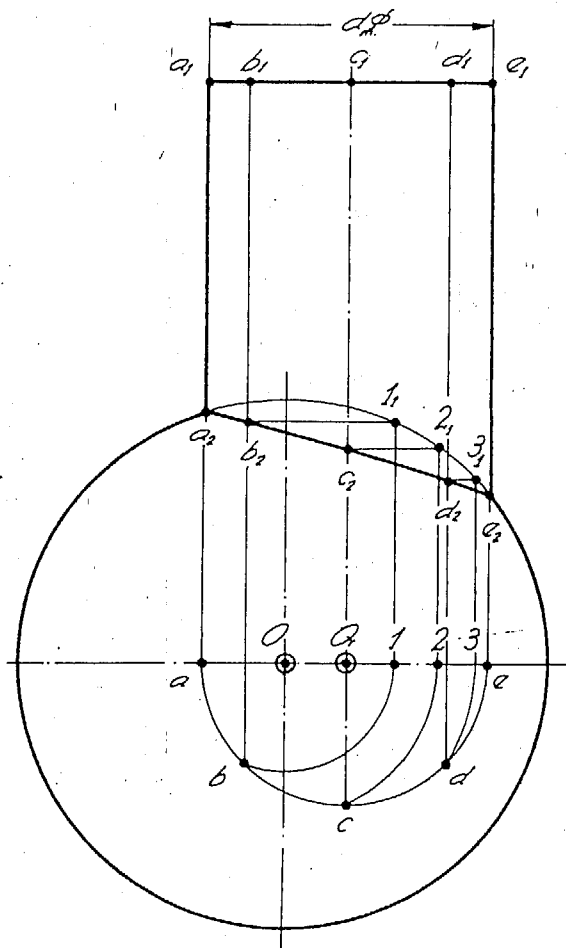


Figura 1

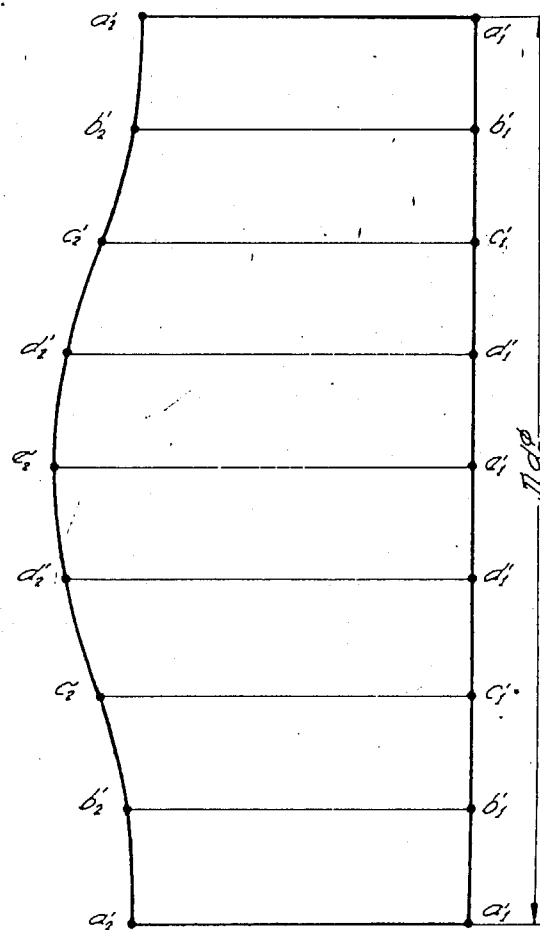


Figura 2

Intersecção de um cone em uma esfera, cujos eixos não coincidem (primeiro procedimento)

Qualquer seção que se fizer em uma esfera por um plano secante determina uma circunferência; o mesmo acontece com o cone reto ao ser seccionado perpendicularmente ao seu eixo por meio de um plano secante.

A figura 1 dá a perspectiva de um cone reto e de uma esfera, seccionados por um plano secante perpendicularmente ao eixo do cone, determinando sobre ambos uma circunferência.

Como essas circunferências pertencem ao mesmo plano, os pontos de intersecção 1-1 pertencerão, logicamente, à curva de intersecção do cone e à esfera. (Para uma verificação, ver *Intersecções* na parte de "Geometria descritiva").

A representação da esfera e do cone está na figura 2. Representa-se a esfera pelo diâmetro externo e o cone pela sua fibra média.

Em qualquer posição seccionam-se ambos os corpos por meio de um plano secante que seja perpendicular ao eixo do cone (o plano é visto de canto), determinando as correspondentes circunferências (fig. 3) que, neste caso, foram sombreadas, formando-se pela intersecção de ambas os pontos 1-1 pertencentes à curva de intersecção vista em planta.

os pontos 1-1 são projetados perpendicularmente ao plano secante (fig. 2), cortando-se no ponto 1_1 que, neste caso, pertence à curva de intersecção da projeção vertical.

Repetindo várias vezes esta operação com planos secantes, paralelos ao primeiro, determinam-se vários pontos de curva de intersecção e unindo-os ordenadamente por meio de uma curva contínua, determina-se esta curva de intersecção.

Uma vez representada a curva de intersecção, prolongam-se as geratrizes extremas do tronco de cone, determinando pela intersecção de ambas o vértice V .

Depois, descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do cone (fig. 2), dividindo-se em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo).

Desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre este os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc., a partir dos quais se traçam retas geratrizes que partam do vértice V e cortem a curva de intersecção nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. (O ponto c_2 também pode ser achado descrevendo um arco desde Q que parta de P e corte a geratriz extrema em P_1 , traçando desde este ponto uma perpendicular ao eixo do cone, determinando assim o ponto c_2).

Desenvolvimento do enxerto (fig. 4). Marcando o centro no ponto V , descreve-se um arco que parta de e de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do enxerto ($\pi \times d_m^2$). Este comprimento é dividido em oito partes iguais, neste caso, e pelos pontos de divisão a', b', c' , etc., traçam-se retas geratrizes indefinidas que partem do ponto V .

Em seguida traçam-se perpendiculares ao eixo do cone a partir dos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. (fig. 2), até cortar a geratriz extrema nos pontos a_3, b_3, c_3 , etc. e desde estes pontos, partem arcos de centro V até cortar as geratrizes da mesma origem (fig. 4) nos pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc. que se unem por meio de uma linha contínua que limita o desenvolvimento.

A diagram illustrating a cone intersected by a secant plane. The cone's vertex is labeled V . A horizontal plane, labeled "Plano secante" with an arrow, intersects the cone. The intersection creates an elliptical cross-section, which is shaded with stippling. The base of the cone is shown as a series of concentric circles.

A geometric diagram showing two overlapping circles, labeled Q and V . The circles intersect at two points, labeled I and J . The region of circle Q that is outside circle V is shaded with a stippled pattern. A horizontal line passes through the centers of both circles, and a vertical line passes through the intersection points I and J .

Intersecção de um cone em uma esfera quando seus eixos não coincidirem (segundo procedimento)

A representação da esfera é feita pela sua circunferência externa, como no caso anterior, e o cone é representado pela sua fibra média, sendo localizado de tal maneira que a sua base (fig. 1) coincida com o eixo horizontal da esfera

Representação da curva de intersecção. Divide-se a circunferência média da base do cone (fig. 2) em um número adequado de partes iguais (doze, por exemplo) e, desde os pontos de divisão a , b , c etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro médio do cone (fig. 1), determinando sobre este os pontos de intersecção a_1 , b_1 , c_1 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes (não foram representadas todas as geratrizes).

A esfera e o cone (fig. 2) são seccionados por meio de um plano secante que passe pelas geratrizes V_1d (seção $I-I$) e se rebate este plano determinando a seção $I-I$ (fig. 3) que está sombreada. Este plano secante determina a circunferência pertencente à esfera e duas geratrizes de cone V_2d_2 e, portanto, o ponto de intersecção d_3 pertence à curva de intersecção que determina o cone ao ser enxertado à esfera.

De forma análoga determina-se a seção $II-II$ (fig. 4) ao serem seccionados a esfera e o cone por meio de um plano secante que passe pelas geratrizes V_1b e V_1f (fig. 2), determinando assim os pontos de intersecção b_3 e f_3 pertencentes à curva de intersecção.

Se quisermos fazer uma nova seção por meio de um plano secante que passe pelas geratrizes V_1c e V_1e (fig. 2), procede-se do mesmo modo que antes.

Uma vez feita esta série de seções, transportam-se as alturas A (fig. 3) e B , C (fig. 4) às geratrizes da mesma origem da figura 1, determinando desta maneira os pontos b_4 , d_4 e f_4 , pelos quais passa a curva de intersecção, como se vê na ilustração.

Também se pode representar a curva de intersecção sem representar as seções $I-I$ (fig. 3) e $II-II$ (fig. 4), pois, basta girar em redor do eixo do cone os planos secantes anteriores até situá-los paralelos ao plano de projeção vertical, determinando assim as circunferências desenhadas com linhas imaginárias (fig. 1) de raios respectivos R_1 e R_2 .

Como o eixo de rotação de todos os planos secantes é o eixo do enxerto (reta de ponta, perpendicular ao plano horizontal de projeção), todas as circunferências que determinam esses planos passarão forçosamente pelo ponto P (fig. 1).

Por serem girados os planos secantes que passam pelas respectivas geratrizes V_1b , V_1f e V_1d (fig. 2) até serem situados paralelos ao plano vertical de projeção, estas geratrizes confundir-se-ão com as geratrizes extremas do enxerto (fig. 1) que determinam sobre suas correspondentes circunferências imaginárias os pontos b'_3 , d'_3 e f'_3 . Se desde estes pontos traçarmos perpendiculares ao eixo do enxerto, seriam cortadas as geratrizes da mesma origem nos pontos b_4 , d_4 , f_4 que foram achados traçando-se as alturas A , B e C das figuras 3 e 4.

A figura 5 dá um detalhe da curva de intersecção em uma escala maior.

Uma vez representada a curva de intersecção, desenvolveríamos o cone como no caso anterior.

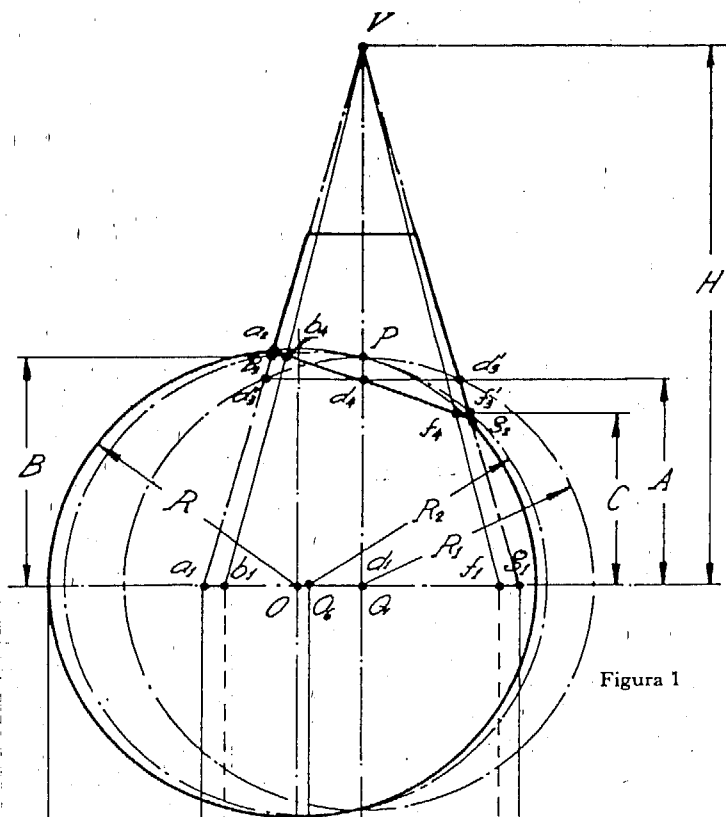


Figura 1

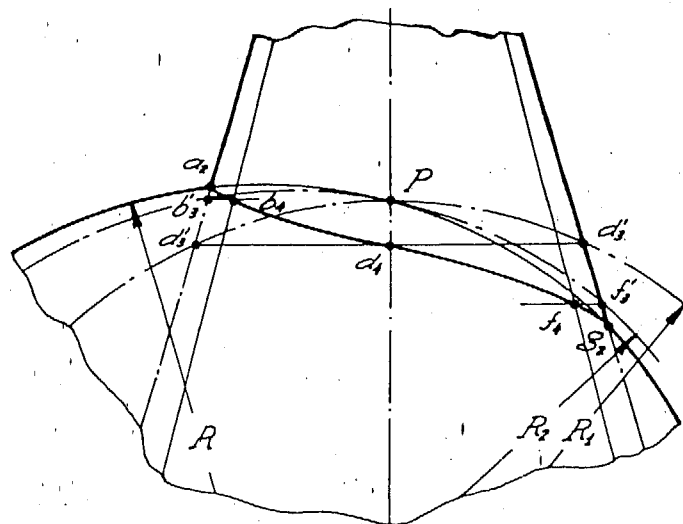


Figura 5

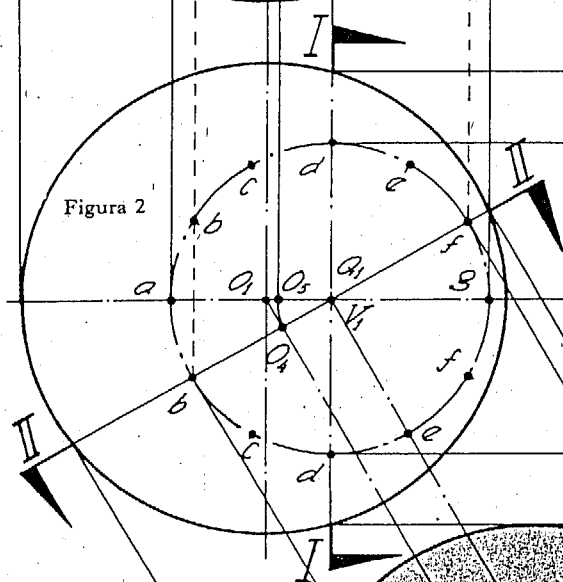


Figura 2

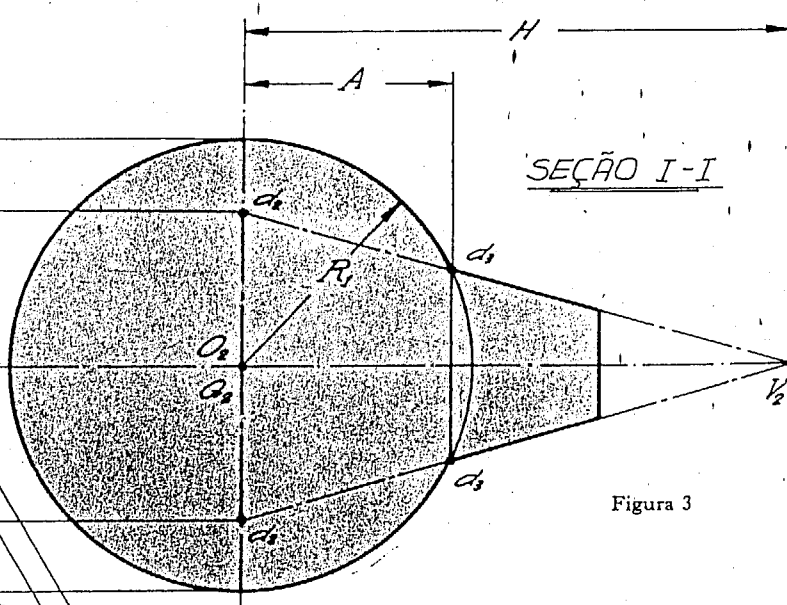


Figura 3

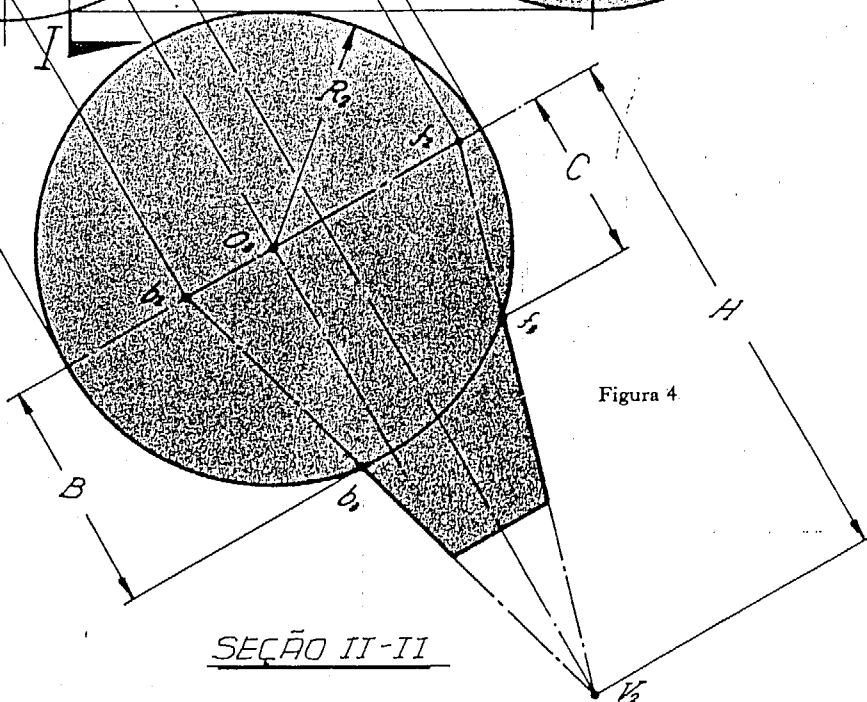


Figura 4

SEÇÃO II-II

INTERSECÇÕES CILÍNDRICAS

EXERCÍCIO

101

Intersecções cilíndricas

Intersecção de um cilindro perpendicular a outro. Nas intersecções cilíndricas de eixos perpendiculares entre si, podem ocorrer dois casos: primeiro, quando os eixos de ambos estiverem em um mesmo plano e segundo, quando os eixos estiverem em planos paralelos.

Primeiro caso. Uma vez representado o enxerto pela sua fibra média e o outro cilindro pelo seu diâmetro externo, descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1), dividindo-a em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo).

Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro médio do enxerto, determinando sobre estes os pontos de intersecção a_1 , b_1 , etc., e sobre a circunferência externa do outro cilindro os pontos a_2 , b_2 , etc.

Depois descreve-se outra semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 2), dividindo-se no mesmo número de partes iguais como a anterior, determinando os pontos de divisão a , b , c , etc., a partir dos quais se traçam paralelas ao eixo do enxerto até cortar as projetantes dos pontos a_2 , b_2 da figura 1 nos pontos a_3 , b_3 , c_3 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim representada a linha de intersecção de ambos os cilindros.

Desenvolvimento do enxerto. Traça-se uma reta (fig. 3) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do enxerto ($\pi \times d_m^o$), dividindo-a em oito partes iguais, neste caso. Desde os pontos de divisão a'_1 , b'_1 , etc., traçam-se perpendiculares à reta anterior de comprimentos iguais aos comprimentos das geratrizes da mesma origem a_1a_2 , b_1b_2 , etc. da figura 1, determinando assim os pontos a'_2 , b'_2 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento.

O desenvolvimento do cilindro horizontal pode ser efetuado marcando o orifício ou sem ele, pois, caso for marcado o orifício, curva-se primeiro a chapa para construir o cilindro para depois cortar

o orifício. Se não for marcado o orifício antes de curvar a chapá, pode-se fazê-lo depois, construindo um gabarito do orifício pelo diâmetro externo (D_{ext}^o).

Desenvolvimento do cilindro horizontal. Traça-se um retângulo (fig. 4) de lados respectivos iguais ao desenvolvimento da circunferência média do cilindro $= \pi \times (D^o - E)$ e ao comprimento L do cilindro da figura 2.

Depois traçam-se os eixos transversal e longitudinal. Em seguida, representam-se os dois cilindros com suas espessuras (fig. 1 bis) e se unem os pontos a_2 , b_2 , etc., com o centro do cilindro, determinando sobre sua circunferência média os pontos de intersecção a_4 , b_4 , etc.

Em uma distância qualquer do eixo transversal (fig. 4), traça-se uma paralela a este, cortando o eixo longitudinal no ponto a_2 . Sobre a paralela e em ambas as partes deste ponto, transportam-se as distâncias a_2b_2 e b_2c_2 iguais aos comprimentos dos arcos a_4b_4 e b_4c_4 da figura 1 bis.

Em seguida, traçam-se paralelas ao eixo transversal às distâncias A e B tomadas da figura 2 e desde os pontos a_2 , b_2 e c_2 , (fig. 4) traçam-se paralelas ao eixo longitudinal, cortando as anteriores nos pontos a'_4 , b'_4 e c'_4 que se unem por meio de uma curva contínua.

Segundo caso. Neste caso, o enxerto também é representado por seu diâmetro médio e o outro cilindro é representado pelo diâmetro externo (fig. 5 e 6).

O desenvolvimento do enxerto é feito de forma análoga à anterior (fig. 7) e o orifício do cilindro grande também é análogo (fig. 8), considerando que o comprimento do arco Mc_2 da figura 5 transporta-se à figura 8. (Como neste caso foi feito o gabarito para marcar o orifício depois de curvar o cilindro, as distâncias a_2b_2 , b_2M , Mc_2 , etc., da figura 8 são tomados da circunferência externa da figura 5).

The diagram illustrates the geometric construction of a dome cross-section. It features a semi-circular profile above a horizontal base. Key points are labeled: a and b on the upper semi-circle, c at the apex, a_3 and b_3 on the lower semi-circle, and c_3 at its apex. Vertical lines connect corresponding points on the upper and lower profiles. Horizontal lines are drawn through the points. At the bottom, a dimension l is indicated between two vertical lines, and a dimension r is indicated between a vertical line and the center of the base.

Diagrama de um cilindro com eixos longitudinal e transversal. O comprimento total do cilindro é indicado como L . As projeções das arestas são rotuladas como a_4, b_4, c_4 e a'_4, b'_4, c'_4 . O eixo longitudinal é rotulado como "Eixo longitudinal" e o eixo transversal como "Eixo transversal".

Diagrama de um arco de uma cúpula com uma seção transversal plana. O arco é dividido em segmentos por pontos marcados como $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, a_4, b_4, c_4$. A distância entre os pontos a_1 e a_2 é rotulada como "diâmetro médio". Uma seta indica a direção da força aplicada no ponto a_1 .

Figura 8

Intersecção de um cilindro obliquamente sobre o outro

O enxerto é representado por sua fibra média e o outro cilindro é representado pela fibra externa.

Também aqui se apresentam dois casos: em um, os eixos de ambos os cilindros estão em um mesmo plano (figs. 1 e 2) e em outro, os eixos estão em planos paralelos (figs. 6 e 7).

Primeiro caso. Marcando o centro em um ponto qualquer do eixo do enxerto (fig. 1), descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao seu diâmetro médio, dividindo-a em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo); desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se paralelas ao eixo até cortar a circunferência externa do outro cilindro nos pontos a_1 , b_1 , etc.

Em seguida, descreve-se outra semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 2), dividindo-a em um mesmo número de partes iguais à anterior e desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se paralelas ao eixo, determinando sobre seu diâmetro médio os pontos a_2 , b_2 , etc. e sobre as projetantes dos pontos a_1 , b_1 , etc. da figura 1, determinam-se os pontos de intersecção a_3 , b_3 , etc. que, unidos por meio de uma curva contínua, determinam a linha de intersecção de ambos os cilindros.

Desenvolvimento do enxerto. Traça-se uma reta (fig. 3) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do enxerto ($\pi \times d_m^o$), dividindo-a em oito partes iguais, neste caso. Desde os pontos de divisão a'_2 , b'_2 , etc., traçam-se perpendiculares à reta de comprimentos iguais aos das geratrizes da mesma origem a_2a_3 , b_2b_3 , etc., da fi-

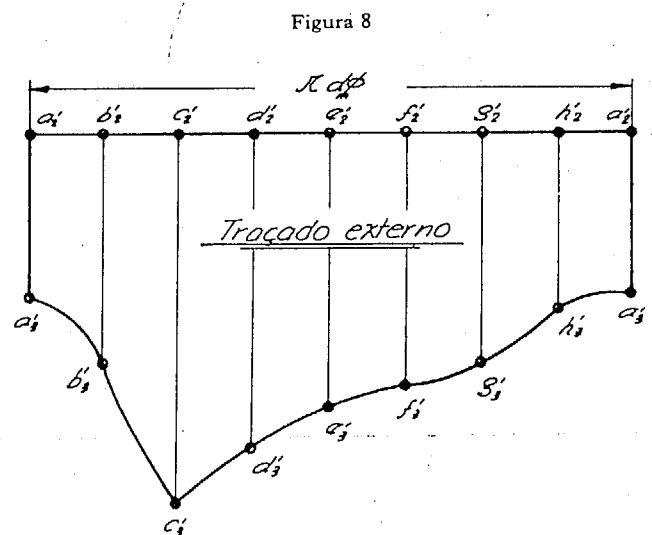
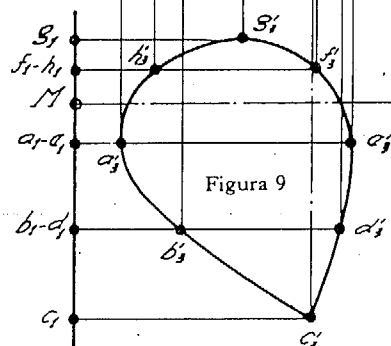
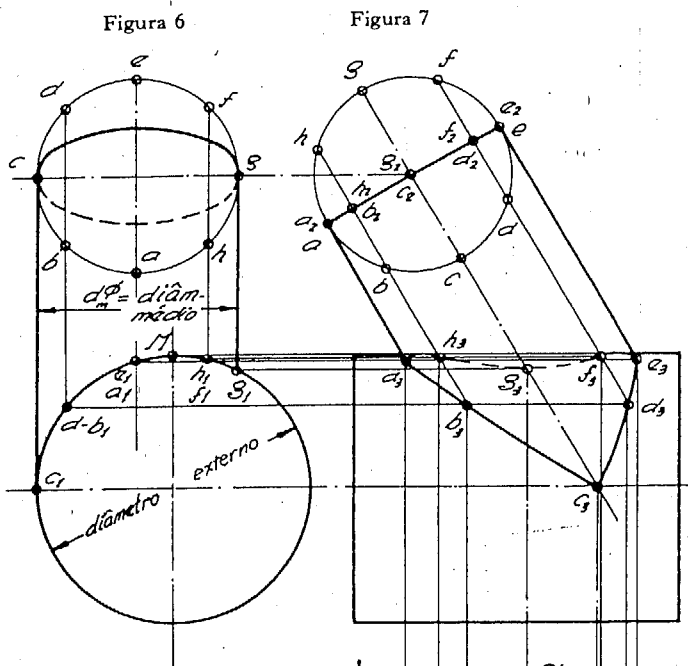
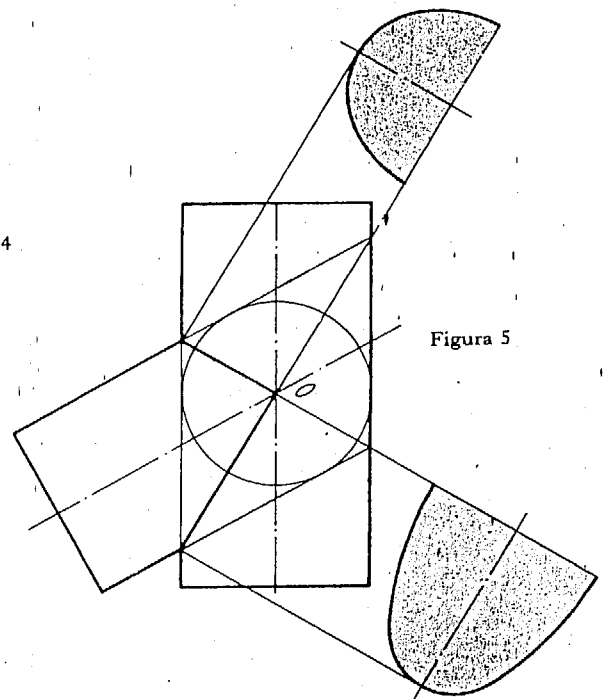
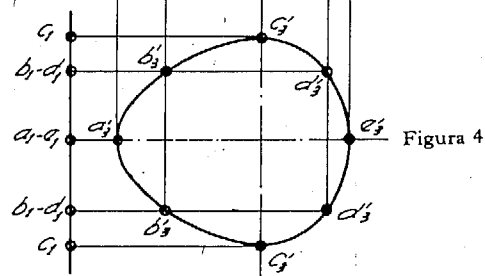
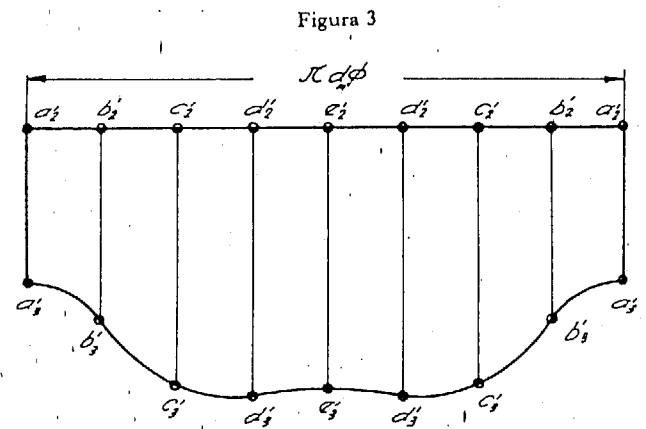
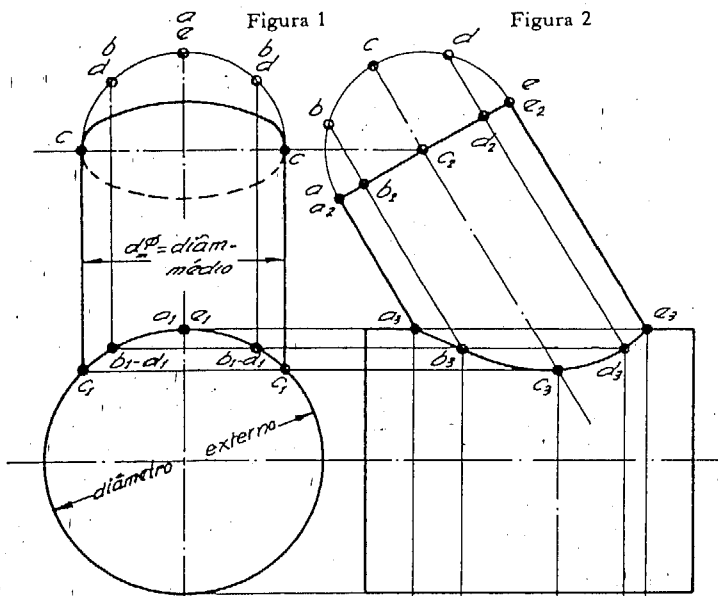
gura 2, determinando assim os pontos a'_3 , b'_3 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

Desenvolvimento do orifício. Desde os pontos a_3 , b_3 , etc. (fig. 2) traçam-se perpendiculares ao eixo horizontal do cilindro de maior diâmetro e a uma distância qualquer destas (fig. 4) traça-se uma paralela, a partir da qual foram transportados os comprimentos dos arcos a_1b_1 , b_1c_1 , etc. da figura 1, determinando pontos que chamaremos de a_1 , b_1 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares às anteriores, determinando sobre as da mesma origem os pontos de intersecção a'_3 , b'_3 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento do orifício.

Sempre que um cilindro for enxertado sobre outro de mesmo diâmetro (fig. 5) e seus eixos estiverem no mesmo plano, a linha de intersecção será formada por semi-elipses, como as que estão sombreadas na ilustração e que são representadas por meio de retas na projeção da figura 5.

Segundo caso. Se os eixos de ambos os cilindros estiverem em planos paralelos (figs. 6 e 7), o desenvolvimento será feito de forma análoga ao caso anterior.

Nota. O desenvolvimento do orifício de ambos os casos foi feito para marcá-lo sobre o cilindro de diâmetro maior, depois de curvado. Caso se queira marcar antes de curvá-lo, o procedimento será o mesmo do caso do exercício anterior.

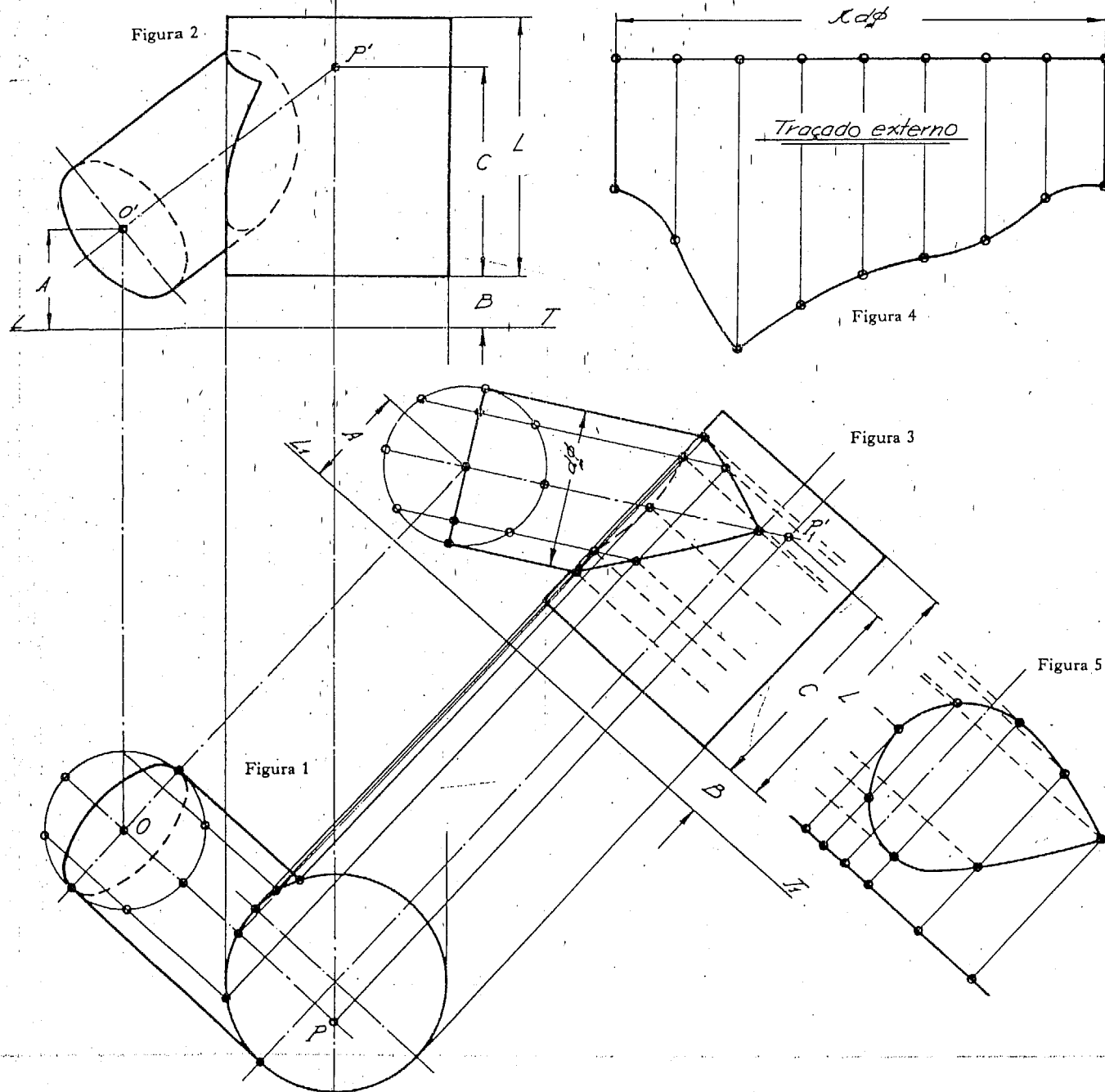


Intersecção de um cilindro sobre outro, estando seu eixo em um plano projetante horizontal

Uma vez representados ambos os cilindros em suas projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2), recorre-se a uma mudança de plano vertical paralelo ao eixo OP do enxerto, ficando assim representada a nova projeção (fig. 3), semelhante ao segundo caso do exercício anterior.

O desenvolvimento do enxerto (fig. 4) e do orifício (fig. 5) é determinado de forma análoga aos desenvolvimentos expostos anteriormente.

Nota. O enxerto foi representado por sua fibra média e o outro cilindro, pela externa.



Curva de intersecção de dois cilindros pelo método das esferas

Para que o método das esferas possa ser aplicado para determinar a curva de intersecção de dois cilindros, é imprescindível que os eixos destes estejam em um mesmo plano, embora suas posições entre si sejam indiferentes.

Todas as seções feitas nos cilindros por meio de planos secantes perpendiculares aos seus respectivos eixos, proporcionarão circunferências. Também proporciona seções circulares qualquer plano secante que corte uma esfera.

A perspectiva da figura 1 representa dois cilindros seccionados por dois planos secantes que proporcionam duas circunferências (sombreadas na figura) que são inscritas na esfera de centro O (O é o ponto de intersecção dos eixos dos cilindros). As duas circunferências anteriores formam por suas intersecções os pontos a_1 que pertencem à curva de intersecção.

A figura 2 dá uma posição correta dos dois cilindros, sendo seus eixos paralelos ao plano vertical de projeção. As circunferências que formam os

planos secantes são representadas, neste caso, por meio de retas perpendiculares aos seus respectivos eixos que são cortadas no ponto a_1 pertencente à curva de intersecção de ambos os corpos.

Como se pode observar, a esfera de centro O passa pelas extremidades dos diâmetros das circunferências anteriores.

Na figura 3 representam-se os mesmos cilindros e desde o ponto de intersecção O de seus eixos, descrevem-se arcos de circunferências de raios quaisquer (estes arcos são as esferas mencionadas no princípio), cortando as geratrizes de ambos os cilindros nos pontos a, b , etc., que se unem entre si por meio de retas, assim como se vê na ilustração, cortando-se nos respectivos pontos a_1, b_1 , etc., pertencentes à curva de intersecção de ambos os cilindros.

Estes pontos foram unidos por meio de uma curva contínua junto com os pontos de intersecção das geratrizes extremas de ambos os cilindros.

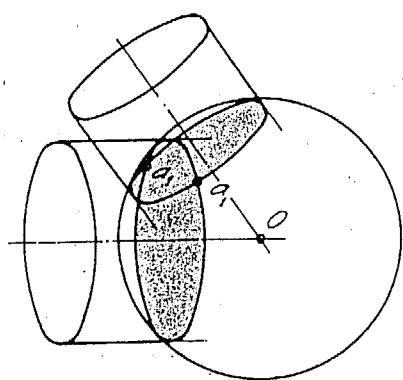


Figura 1

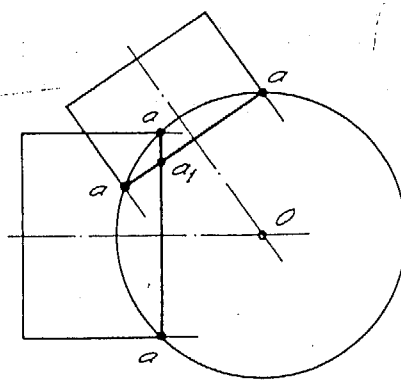


Figura 2

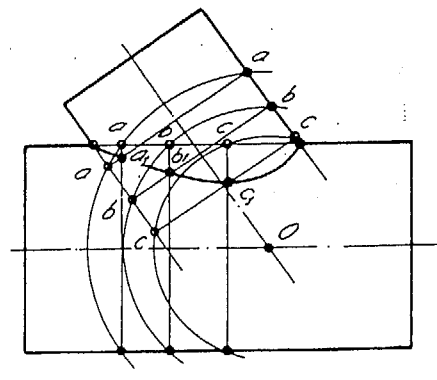


Figura 3

Intersecção de um cilindro sobre outro, acoplando-se uma cunha

O enxerto e a cunha são representados pela sua fibra média e o cilindro pela fibra externa.

Determinação das linhas de intersecção. Sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1), descreve-se uma semicircunferência que é dividida em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto até cortar a circunferência externa do outro cilindro nos pontos a_1 , b_1 , etc.

Em seguida, descreve-se outra semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 2), dividindo-se no mesmo número de partes iguais que a anterior e desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto, determinando sobre seu diâmetro os pontos de intersecção a_2 , b_2 , etc., e sobre a linha de intersecção da cunha e do enxerto, os pontos c_3 , d_3 e e_3 .

O ponto de intersecção a_3 das geratrizes extremas do enxerto e da cunha é unido por meio de uma reta com o ponto c_3 , ficando assim representada a linha de intersecção de ambos os corpos na projeção vertical.

Os pontos a_3 e b_3 são projetados paralelamente à geratriz extrema da cunha, determinando sobre as projetantes a_1 e b_1 da figura 1 os pontos a_4 e b_4 que, unidos com os pontos c_3 , d_3 e e_3 , determinam a linha de intersecção do enxerto e a cunha sobre o outro cilindro.

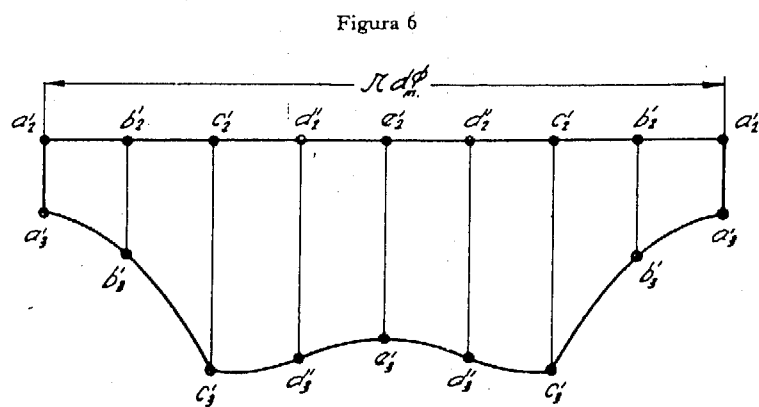
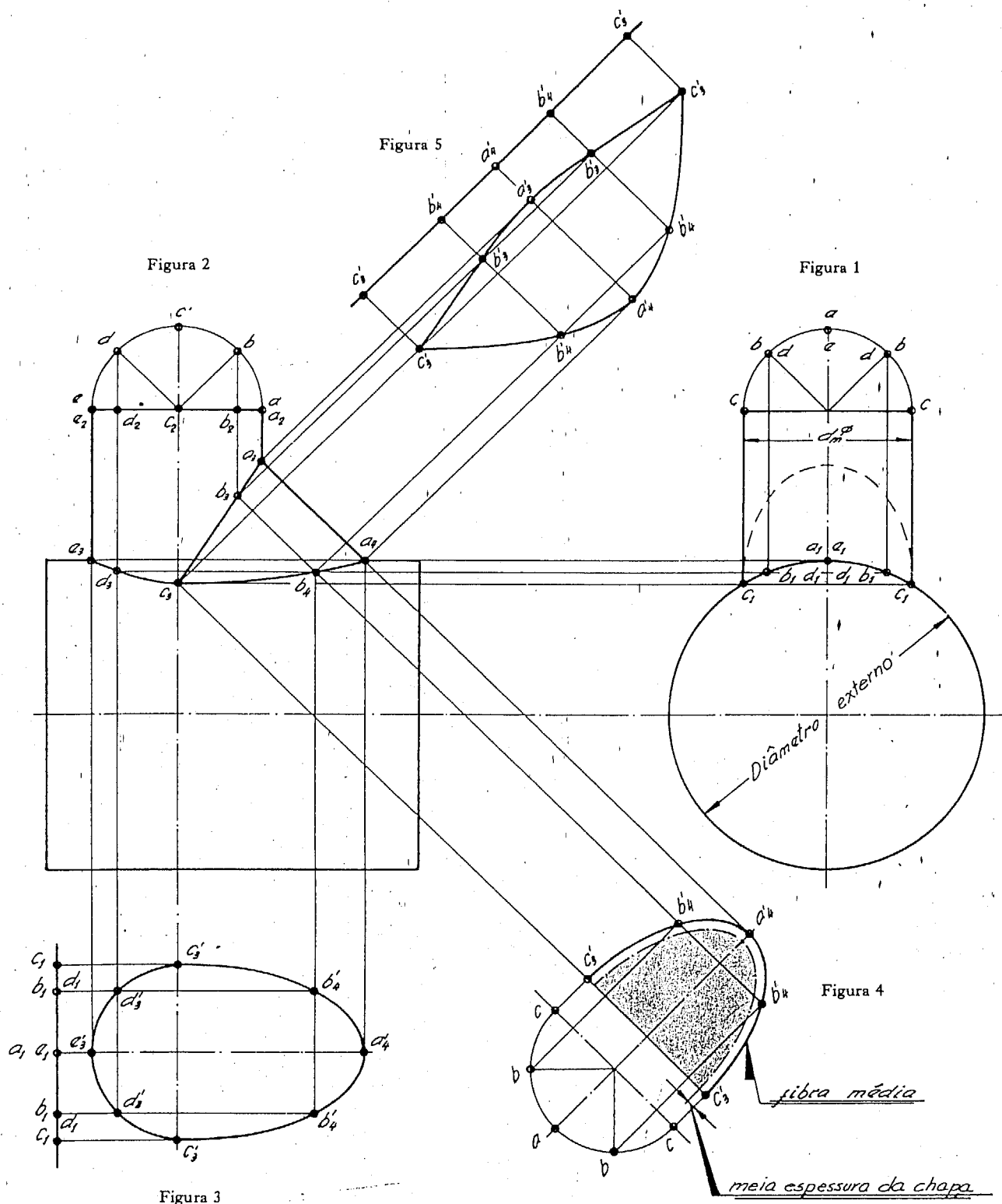
Gabarito para marcar o orifício depois de curvar o tubo. Os pontos a_4 , b_4 , c_3 , d_3 e e_3 , (fig. 2) são projetados perpendicularmente ao eixo horizontal do cilindro e transportam-se sobre uma paralela a estes (fig. 3) os comprimentos dos arcos a_1b_1 , b_1c_1 , etc., da figura 1, determinando novos pontos que também chamaremos a_1 , b_1 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares a essa reta até cortar as perpendiculares anteriores da mesma origem nos pontos a'_4 , b'_4 , c'_3 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento do orifício.

Traçado do gabarito para curvar a cunha. Os pontos a_4 , b_4 e c_3 (fig. 2) são projetados paralelamente à geratriz extrema a_3a_4 da cunha e a uma distância qualquer destas projetantes, traça-se uma perpendicular às mesmas (fig. 4). Desde um ponto qualquer desta, descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio do enxerto e, neste caso dividimo-la em quatro partes iguais. A partir dos pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares às anteriores, determinando os pontos de intersecção a'_4 , b'_4 e c'_3 , que se unem por meio de uma curva contínua, sendo esta a curva formada por um plano secante ao ser seccionada a cunha perpendicularmente às suas geratrizes médias.

Traçando uma paralela à curva anterior a uma distância igual a meia espessura da chapa da cunha, determinaríamos o gabarito para curvar essa cunha.

Desenvolvimento da cunha. Desde os pontos a_3 , b_3 , c_3 , a_4 e b_4 (fig. 2) traçam-se perpendiculares à geratriz extrema da cunha e sobre uma paralela qualquer a estas (fig. 5), transportam-se os comprimentos $a'_4b'_4$ e $b'_4c'_3$ da figura 4, tomadas em arco, determinando sobre essa paralela os pontos que também chamaremos a'_4 , b'_4 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares, determinando sobre as anteriores da mesma origem os pontos a'_3 , b'_3 , c'_3 , b'_4 e a'_4 que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento da cunha.

Desenvolvimento do enxerto. Traça-se uma reta (fig. 6) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do enxerto ($\pi \times d_m$), dividindo-a em oito partes iguais, neste caso. Desde os pontos de divisão a'_2 , b'_2 , etc., traçam-se perpendiculares a essa reta de comprimentos iguais aos das geratrizes da mesma origem a_2a_3 , b_2b_3 , etc., da figura 2, determinando assim os pontos a'_3 , b'_3 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.



Intersecção de uma peça suplementar sobre dois cilindros do mesmo diâmetro

Na projeção vertical de ambos os corpos (fig. 1) representam-se estes com as espessuras das chapas (todas as linhas de intersecções foram representadas por retas, como se vê na ilustração).

Sobre o diâmetro externo do enxerto descreve-se uma semicircunferência, que é dividida em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto, determinando sobre seu diâmetro externo os pontos a_1, b_1 , etc., e sobre as correspondentes linhas de intersecção a_2, b_2, c_5, c_2, d_2 e e_2 .

A partir dos pontos c_2, d_2 , etc., traçam-se paralelas à geratriz extrema da peça suplementar, determinando sobre a bissetriz do ângulo de 45° os pontos c_3, d_3 , etc., e sobre sua correspondente linha de intersecção os pontos c_4, d_4 , etc., (a parte sombreada é a superfície plana da peça suplementar).

Desenvolvimento do cilindro horizontal. Traça-se um retângulo (fig. 2) de lados iguais ao comprimento da circunferência média desse cilindro $= \pi \times (D^\circ + e)$ e ao comprimento do cilindro, respectivamente.

Em ambas as partes da metade do desenvolvimento do cilindro horizontal, transporta-se um quarto do desenvolvimento e se divide em duas partes iguais cada uma destas partes, traçando paralelas ao eixo longitudinal desde estas distâncias. Desde os pontos a_2, b_2, c_5, c_4, d_4 e e_4 (fig. 1) traçam-se perpendiculares às paralelas anteriores, determinando sobre as da mesma origem os pontos de intersecção a'_2, b'_2 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas e por retas, como se vê na ilustração, ficando assim desenvolvido esse ci-

lindro com seu correspondente orifício (não se deve cortar o orifício antes de curvar o cilindro para evitar que a máquina de curvar curve mais em umas partes do que em outras ao encontrar mais ou menos resistência na chapa, caso o orifício já esteja cortado).

Desenvolvimento da cunha. Em uma posição qualquer (fig. 3), traça-se uma reta de compri-

mento igual a $\frac{\pi \times (D^\circ + e)}{2}$ e neste caso, divide-se

em quatro partes iguais. Desde os pontos de divisão c'_3, d'_3 e e'_3 traçam-se perpendiculares a ambas as partes da reta de comprimentos iguais às distâncias c_3c_2, d_3d_2 , etc. e c_3c_4, d_3d_4 , etc. da figura 1, determinando assim os pontos c'_2, d'_2 , etc. e c'_4, d'_4 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas. Prolonga-se a reta anterior em suas extremidades e dá-se-lhes a distância A tomada da figura 1, determinando desta maneira os pontos c'_5 que se unem com c'_2 e c'_4 por meio de retas, ficando assim desenvolvida a cunha (a superfície sombreada é a parte plana).

Desenvolvimento do enxerto. Traça-se uma reta (fig. 4) de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do enxerto $\pi \times (D^\circ + e)$ que, neste caso, divide-se em oito partes iguais. Desde os pontos de divisão a'_1, b'_1 , etc., traçam-se perpendiculares à reta de comprimentos iguais aos das geratrizes da mesma origem a_1a_2, b_1b_2 , etc., da figura 1, determinando os pontos a'_2, b'_2 , etc. Os pontos a'_2, b'_2 e c'_5 são unidos por meio de uma curva contínua, do mesmo modo que os pontos c'_2, d'_2, e'_2, d'_2 e c'_2 .

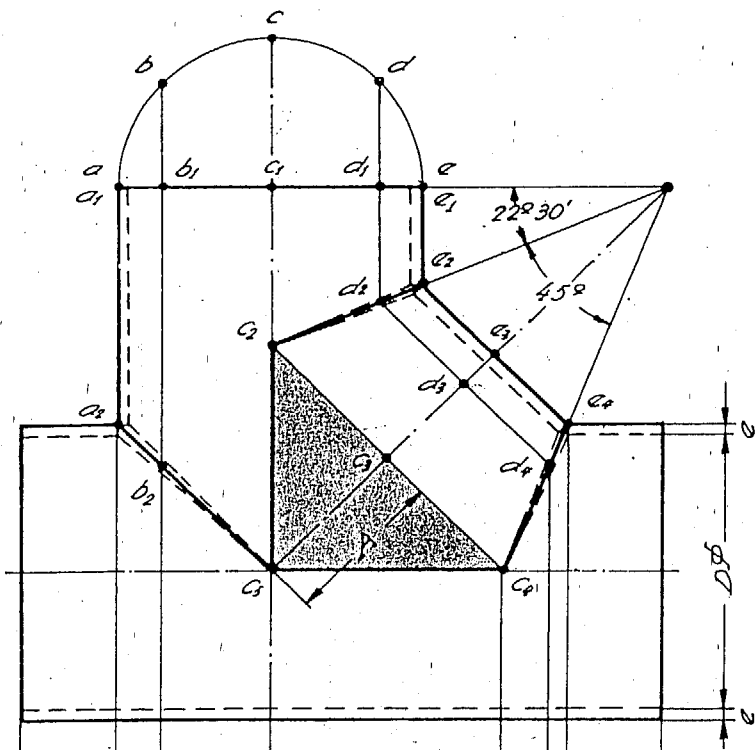


Figura 1

Figura 2

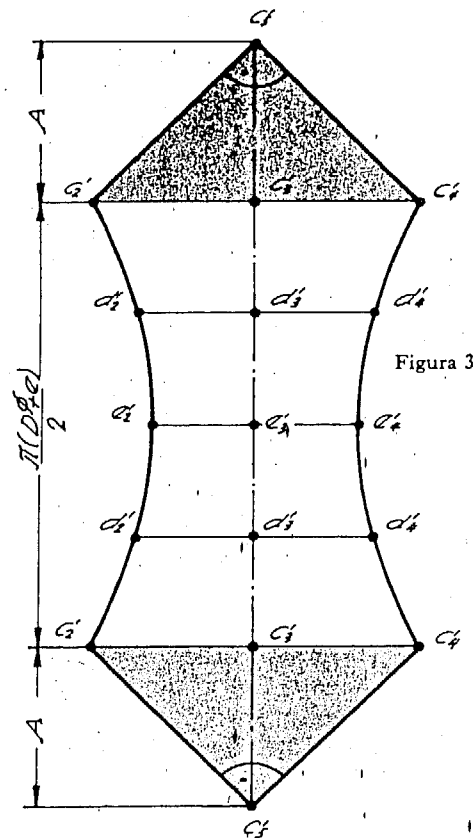
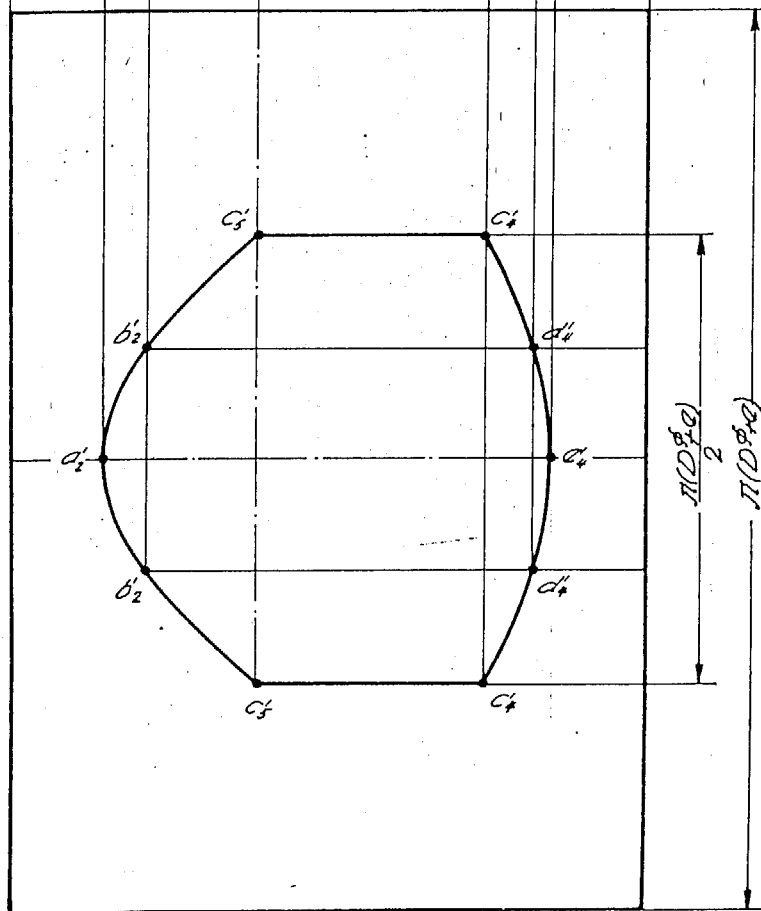


Figura 3

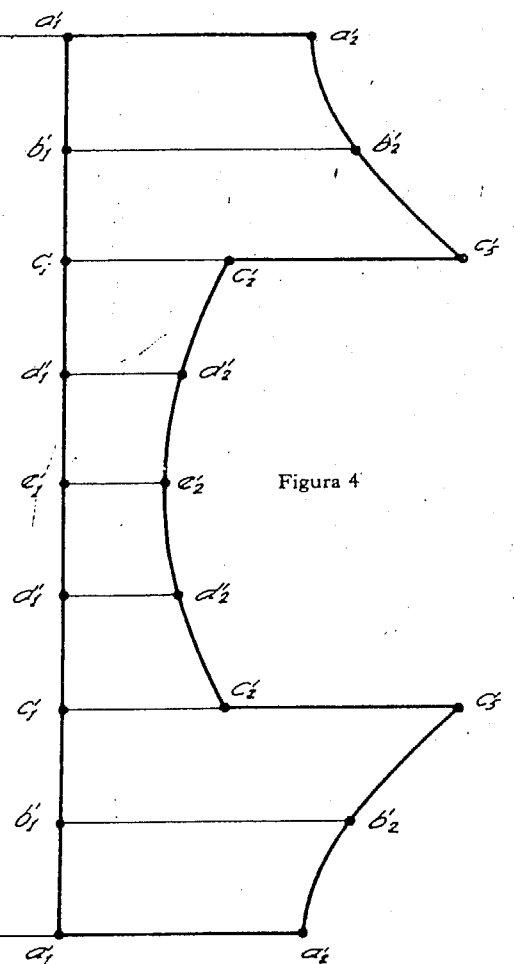


Figura 4

Intersecção de um cotovelo cilíndrico em um cilindro, cujos eixos são contidos em um mesmo plano

Representa-se o cotovelo por sua fibra média e o cilindro por sua fibra externa:

Determinação da linha de intersecção. Como neste caso só as virolas *B* e *C* (fig. 1) estão em contato com o cilindro, operar-se-á independentemente com cada uma delas para achar a curva de intersecção destas com o cilindro em questão.

Sobre o diâmetro médio do cotovelo descreve-se uma semicircunferência, que é dividido em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão *a*, *b*, etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre este os pontos de intersecção *a*₁, *b*₁, etc., e sobre a linha de intersecção das virolas *A* e *B* os pontos *a*₂, *b*₂, etc. Desde estes pontos traçam-se paralelas ao eixo da virola *B*, determinando sobre a linha de intersecção das virolas *B* e *C* os pontos *a*₄, *b*₄, etc. Também desde estes pontos se traçam paralelas ao eixo da virola *C*, ficando assim representadas as geratrizes das virolas *A*, *B* e *C*.

Nos pontos médios dos eixos das virolas *B* e *C*, traça-se uma perpendicular em ambas as partes destes, determinando sobre as respectivas geratrizes os pontos *a*₃, *b*₃, etc. e *a*₅, *b*₅, etc.

Marcando o centro em um ponto qualquer *O* do prolongamento do diâmetro do cilindro, descreve-se um quadrante de circunferência de raio (*R_m*) igual ao raio médio do enxerto. Este quadrante de circunferência é dividido em duas partes iguais, neste caso, e desde os pontos de divisão traçam-se paralelas ao diâmetro do cilindro, determinando sobre a semicircunferência os pontos de intersecção *a*₆, *b*₆, etc., a partir dos quais se traçam paralelas ao eixo horizontal do cilindro, determinando sobre as geratrizes da mesma origem das virolas *B* e *C* os pontos *c*₈, *d*₇ e *e*₇ (virola *B*) e *a*₇, *b*₇, *c*₇ e *d*₈ (virola *C*).

Estes pontos são unidos ordenadamente por meio de curvas contínuas, determinando pela intersecção destas o ponto *M*, ficando assim repre-

sentada a linha de intersecção determinada pelas virolas *B* e *C* sobre o cilindro.

As curvas que foram desenhadas com linhas imaginárias são as determinadas pelas respectivas virolas *B* e *C* individualmente.

O desenvolvimento do orifício (fig. 2) é feito de forma análoga à dos exercícios anteriores, ficando assim disposto para ser marcado sobre o cilindro depois de curvado.

Também o desenvolvimento da virola *A* (fig. 4) é feito como nos casos estudados anteriormente.

Desde o ponto *M* (fig. 1) traça-se uma paralela ao eixo da virola *B*, determinando sobre a reta que divide essa virola em duas partes iguais, o ponto de intersecção *M*₁ e sobre a linha de intersecção das virolas *A* e *B*, o ponto *M*₂, a partir do qual se traça uma paralela ao eixo da virola *A*, determinando sobre a semicircunferência o ponto *M*₃. Também desde o ponto *M* se traça uma paralela ao eixo da virola *C* para obter o ponto *M*₄.

Desenvolvimento da virola C. Em uma posição adequada, traça-se uma reta (fig. 3) de comprimento igual à semicircunferência média do enxerto ($\pi \times R_m$), dividindo-a, neste caso, em quatro partes iguais e desde os pontos de divisão *a*'₅, *b*'₅, etc., traçam-se perpendiculares a ambas as partes da reta de comprimentos iguais aos das respectivas geratrizes *a*₅*a*₄, *b*₅*b*₄, etc. e *a*₅*a*₇, *b*₅*b*₇ da figura 1, determinando assim os pontos *a*'₄, *b*'₄, *c*'₄, e *a*'₇, *b*'₇ que se unem por meio de curvas contínuas, assim como se vê na ilustração. Determina-se o ponto *M*' transportando sobre a reta *c*'₇*c*'₇ as distâncias *c*'₇*M*'₄ iguais ao comprimento do arco *cM*₃ da semicircunferência do diâmetro do cotovelo da figura 1 e traçando uma perpendicular à reta desde o ponto *M*'₄ de comprimento igual à distância *M*₄*M* da figura 1.

O desenvolvimento da virola *B* é feito de forma análoga à virola *C*. A figura 5 representa esse desenvolvimento.

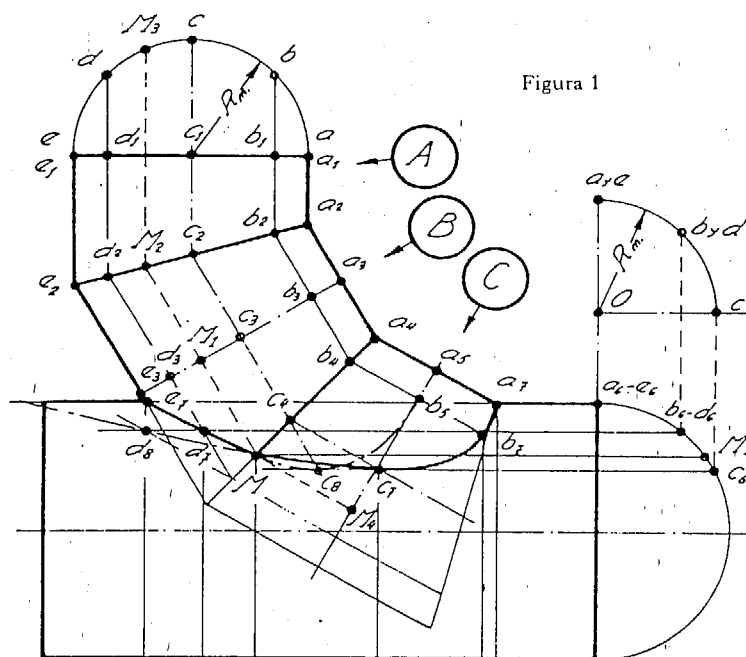


Figura 1

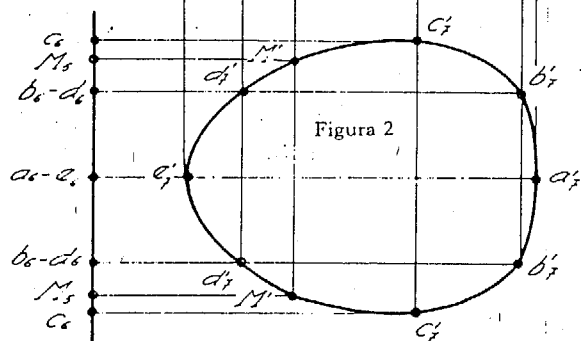


Figura 2

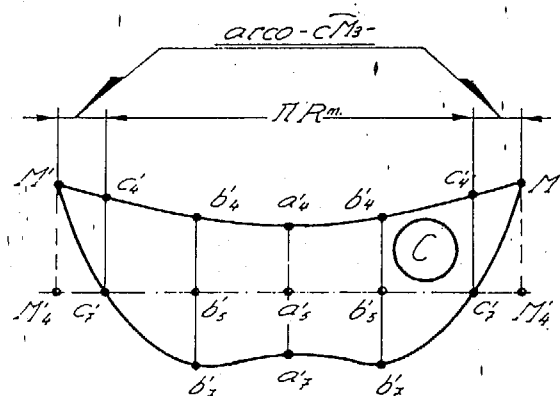


Figura 3

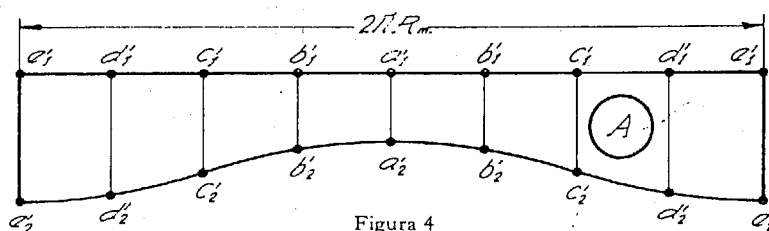


Figura 4

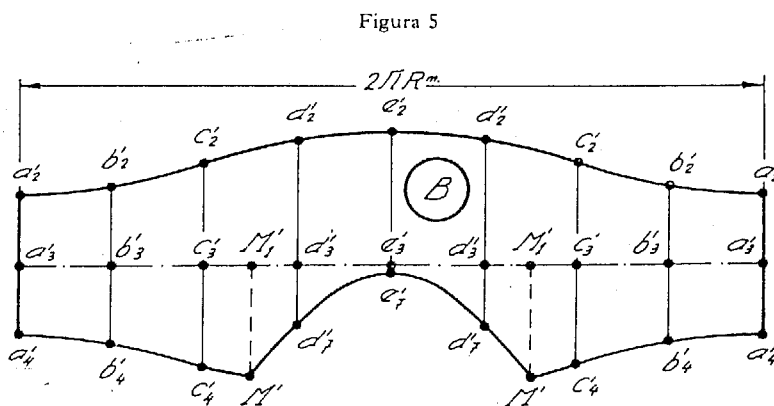


Figura 5

Intersecção de uma virola oblíqua sobre um cilindro, estando seus eixos em um mesmo plano

As figuras 1 e 2 representam ambos os corpos nas projeções horizontal e vertical, respectivamente, a virola oblíqua pela fibra média e o cilindro pela fibra externa.

Representação da linha de intersecção. A circunferência média de uma das bocas do enxerto (fig. 1) é dividida em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b , etc., traçam-se retas geratrizes paralelas ao eixo horizontal do enxerto, determinando sobre a circunferência externa do cilindro os pontos a_1, b_1 , etc., e sobre a outra boca, os pontos a_2, b_2 , etc.

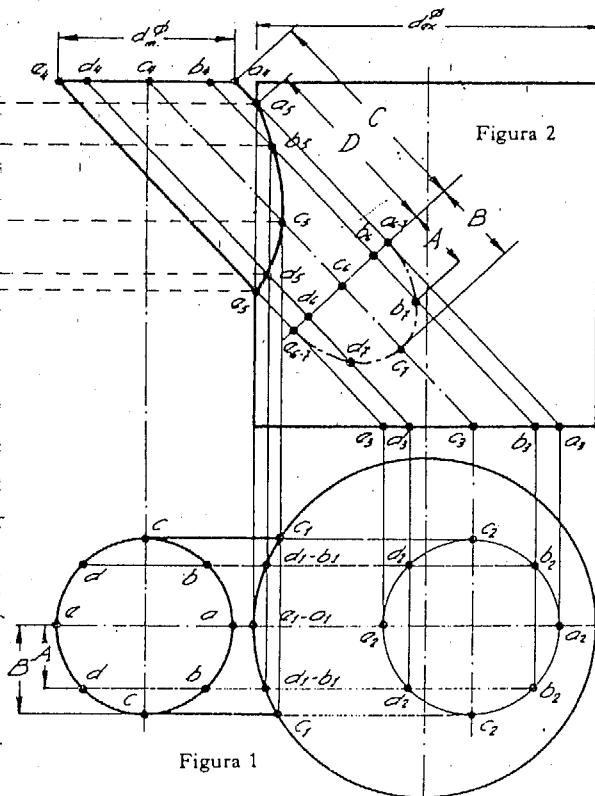
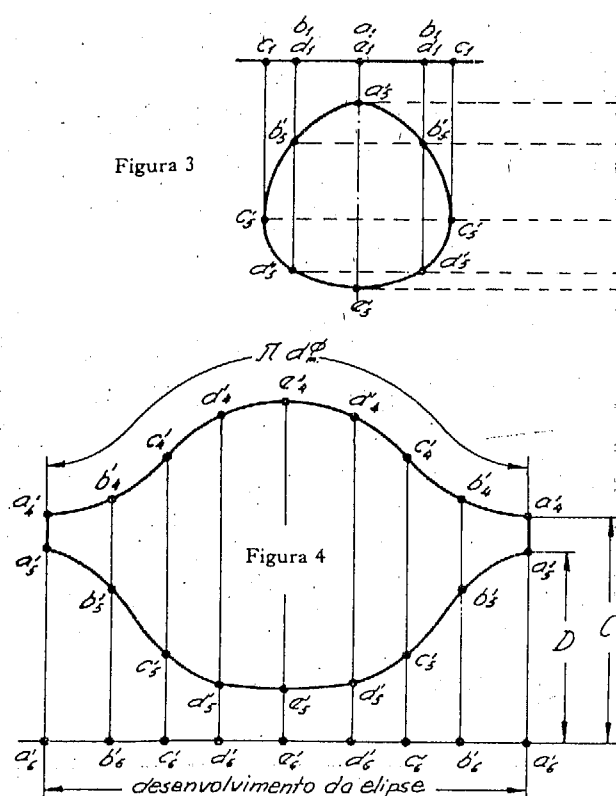
Estas geratrizes são representadas na projeção vertical da figura 2 (a_3a_4, b_3b_4 , etc.) e se projetam os pontos a_1, b_1 , etc., da figura 1, paralelamente ao eixo vertical do cilindro até cortar as geratrizes da mesma origem nos pontos a_5, b_5 , etc., (fig. 2) que se unem por meio de uma curva contínua correspondente à linha de intersecção.

Em uma posição qualquer do eixo do enxerto (fig. 2), traça-se uma perpendicular a este, cortando as geratrizes da mesma origem nos pontos

a_6, b_6 , etc. A partir destes pontos transportam-se as distâncias A e B da figura 1, determinando novos pontos que chamaremos de a_7, b_7 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim representada meia seção transversal da virola oblíqua (a outra metade é igual).

Desenvolvimento do orifício. O desenvolvimento do orifício, (fig. 3) é feito de forma análoga aos casos anteriores para depois ser marcado sobre a virola cilíndrica curvada.

Desenvolvimento do enxerto. Acopla-se uma régua flexível à semi-elipse da seção transversal da virola oblíqua (fig. 2) e marca-se nela os pontos $a_7, b_7, c_7, d_7, e_7, f_7, g_7$, etc. Esta régua flexível é endireitada e transportam-se os pontos marcados sobre uma reta (fig. 4), determinando novos pontos que chamaremos a'_6, b'_6, c'_6 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares à reta, transportando sobre estas as distâncias a_6a_4, b_6b_4 , etc. e a_6a_5, b_6b_5 , etc., da figura 2, determinando assim os pontos a'_4, b'_4 , etc. e a'_5, b'_5 que se unem por meio de curvas contínuas.



Intersecção de um prisma oblíquo em um cilindro, cuja base é paralela ao plano V de projeção

A representação do prisma é feita por sua fibra interna e a do cilindro, pela fibra externa.

Dividem-se os lados da base do prisma triangular (fig. 1) em um certo número de partes iguais (duas partes iguais cada lado, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b, c, d , etc., traçam-se perpendiculares à base do prisma, visto de perfil, (fig. 2), determinando sobre esta os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1, d_1 , etc., a partir dos quais se traçam paralelas às arestas laterais do prisma até cortar a circunferência externa do cilindro nos pontos a_2, b_2, c_2, d_2 , etc. Desde estes pontos traçam-se paralelas ao eixo horizontal do cilindro e sobre estas projetam-se os pontos a, b, c, d , etc., (fig. 1), determinando os pontos a_3, b_3, c_3, d_3 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas, pertencentes à linha de intersecção do prisma e do cilindro.

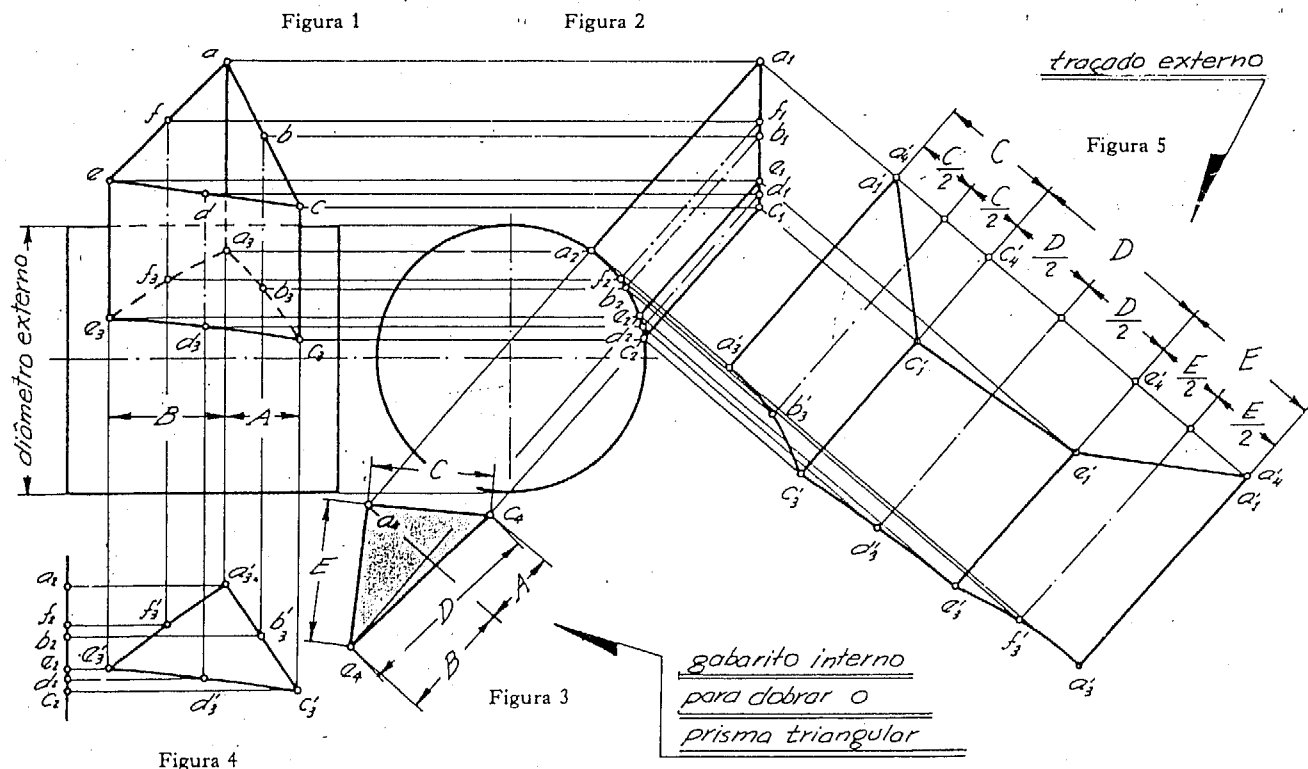
Seção transversal do prisma. Prolongam-se as arestas a_1a_2, c_1c_2 e e_1e_2 da figura 2.

Em seguida, traça-se uma perpendicular a estes prolongamentos, determinando assim o ponto a_4

(fig. 3) e em ambas as partes da perpendicular, traçam-se paralelas às distâncias respectivas A e B , tomadas da figura 1, determinando assim os pontos c_4 e e_4 que se unem por meio de retas que determinam a seção transversal do prisma (esta seção está sombreada).

Desenvolvimento do orifício para depois de curvar o cilindro. Prolongam-se as retas aa_3, bb_3 , etc. (fig. 1) e transportam-se sobre uma paralela a estas (fig. 4) os comprimentos dos arcos a_2f_2, f_2b_2 , etc., da figura 2, determinando novos pontos que também chamaremos a_2f_2 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares aos prolongamentos anteriores, cortando-as nos pontos a'_3, b'_3 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas.

Desenvolvimento do prisma. O desenvolvimento deste prisma se efetua de forma parecida ao do exercício anterior. A figura 5 representa esse desenvolvimento, sendo as distâncias C, D e E iguais às da figura 3.



Intersecção de um prisma reto sobre um cilindro

As figuras 1 e 2 dão as projeções horizontal e vertical, respectivamente, de ambos os corpos, tendo-se representado o prisma por sua fibra interna e, o cilindro, pela fibra externa.

Os lados ac , ce e ea (fig. 1) são divididos em um número adequado de partes iguais, cada um deles (duas partes iguais, por exemplo) e desde os pontos de divisão a , b , c , d , etc., traçam-se paralelas ao eixo vertical do cilindro, determinando sobre a circunferência externa do cilindro (fig. 2) os pontos a_1 , b_1 , etc., e sobre a base do prisma, os pontos a_2 , b_2 , etc.

Desenvolvimento lateral do prisma. Tomam-se as distâncias ab , bc , cd , etc. da figura 1 e transportam-se sobre o prolongamento da base do prisma da figura 2, determinando assim os pontos a'_2 , b'_2 , c'_2 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares a esse prolongamento. Paralelamente a

este traçam-se retas que partam dos pontos a_1 , b_1 , etc. da figura 2, determinando sobre as perpendiculares anteriores da mesma origem os pontos de intersecção a'_1 , b'_1 , c'_1 , d'_1 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas que limitam o desenvolvimento do prisma.

Desenvolvimento do orifício para marcar o cilindro depois de curvâ-lo. Desde os pontos a , b , etc., (fig. 1) traçam-se perpendiculares ao eixo vertical do cilindro e sobre uma paralela a estas (fig. 4), transportam-se os comprimentos dos arcos a_1f_1 , f_1b_1 , etc. da figura 2, determinando os pontos que também chamaremos a_1 , f_1 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares às anteriores até cortá-las nos pontos a'_1 , b'_1 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas. A linha-eixo que passa pelo ponto M (fig. 4) é o eixo longitudinal do cilindro.

Figura 2

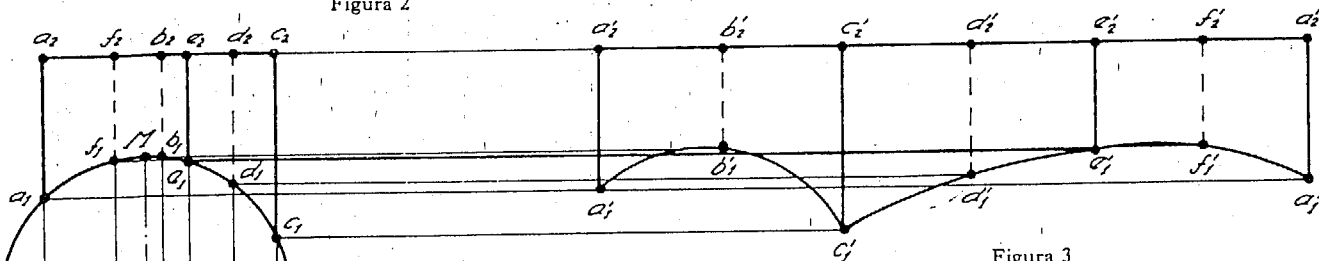


Figura 3

Figura 1

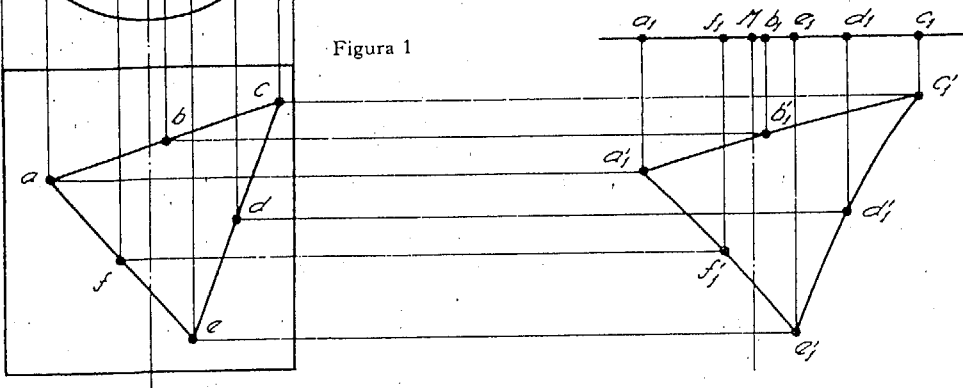


Figura 4

Intersecção de uma tremonha em um cilindro

A tremonha é formada por uma semivirola cilíndrica, uma superfície plana que, neste caso, está sombreada, e por uma semivirola oblíqua de bocas circulares. A tremonha é representada por sua fibra média e o cilindro, pela fibra externa.

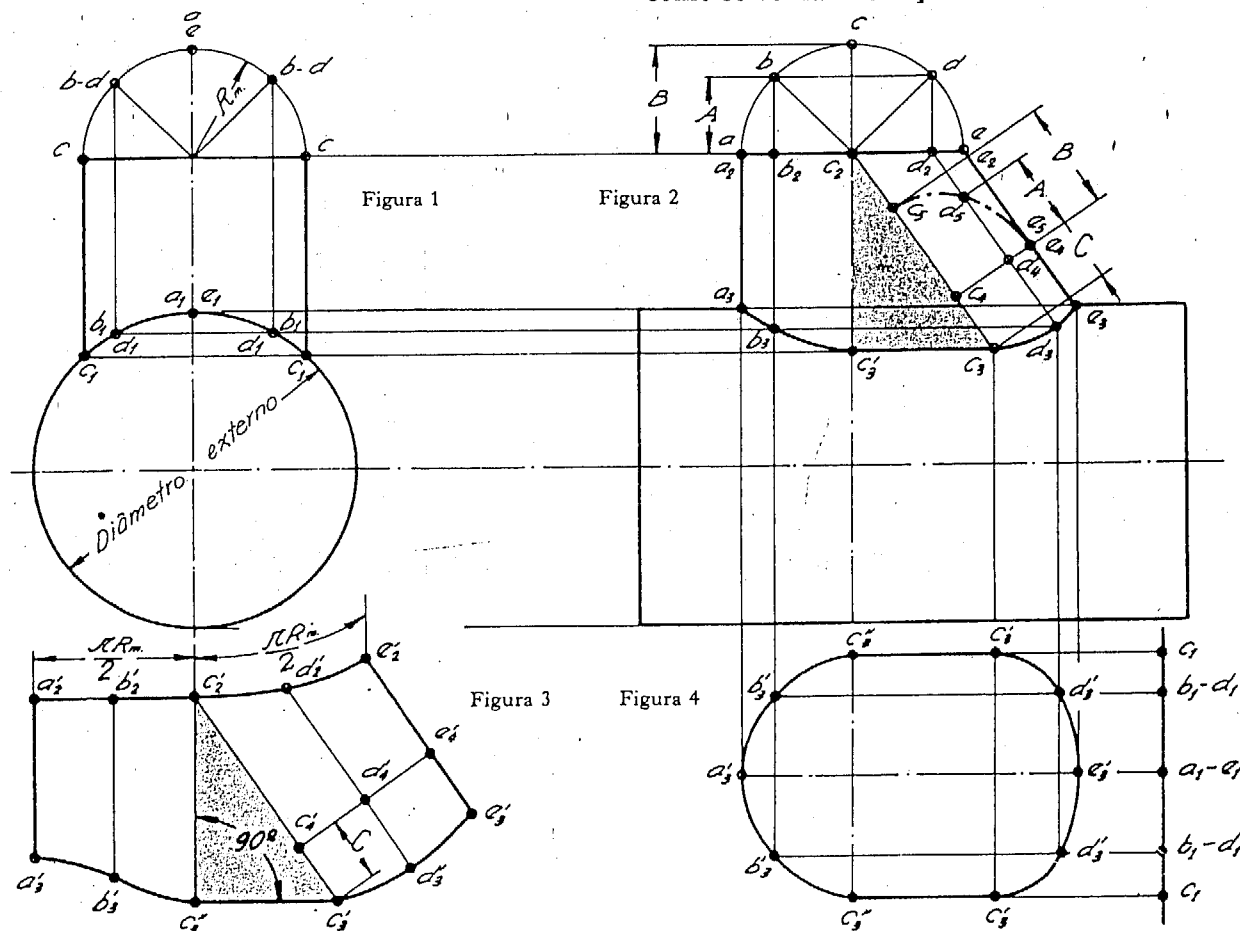
Representação da linha de intersecção. Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da tremonha (fig. 1), dividindo-se em um número adequado de partes iguais. Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se paralelas ao eixo dessa tremonha até cortar a circunferência externa do cilindro nos pontos a_1 , b_1 , etc.

Em seguida, descreve-se outra semicircunferência sobre o diâmetro médio da tremonha vista de perfil (fig. 2), que é dividida em um mesmo número de partes iguais que a anterior. Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares a esse diâmetro, determinando sobre este os pontos de intersecção a_2 , b_2 , etc. A partir destes pontos traçam-se paralelas às geratrizes extremas

das respectivas virolas reta e oblíqua que formam a tremonha, determinando sobre as projetantes dos pontos a_1 , b_1 da figura 1 os pontos a_3 , b_3 , c_3 , d_3 e e_3 , pertencentes à curva de intersecção.

Desenvolvimento da tremonha (fig. 3). O desenvolvimento desta tremonha é feito de forma parecida à das tremonhas explicadas no capítulo que trata das virolas oblíquas de bocas circulares. Na ilustração representou-se só meio desenvolvimento.

Desenvolvimento do orifício para marcá-lo depois de curvar o cilindro. Os pontos a_3 , b_3 , etc. (fig. 2) são projetados perpendicularmente ao eixo do cilindro e sobre uma paralela a estas, transportam-se as distâncias a_1b_1 , b_1c_1 , etc., iguais aos comprimentos dos arcos a_1b_1 , b_1c_1 da figura 1. Desde os pontos a_1 , b_1 , etc. (fig. 4) traçam-se perpendiculares às anteriores, determinando sobre as da mesma origem os pontos a'_3 , b'_3 , etc., que se unem por meio de retas e curvas contínuas, assim como se vê na ilustração.



Intersecção de um cilindro em um quarto de toro, cujos eixos estão em planos paralelos

Divide-se a circunferência externa do cilindro (fig. 1) em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo). Pelos pontos de divisão a, b, c etc., traçam-se retas paralelas ao eixo do toro até cortar a sua circunferência externa nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares ao diâmetro do toro da figura 2, obtendo-se assim novos pontos que são girados em

redor do centro O , cortando as geratrizes correspondentes do enxerto nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua, representam a curva de intersecção.

O desenvolvimento do enxerto é feito assim como se ilustra na figura 3.

O orifício do enxerto será marcado sobre o toro com o enxerto curvado.

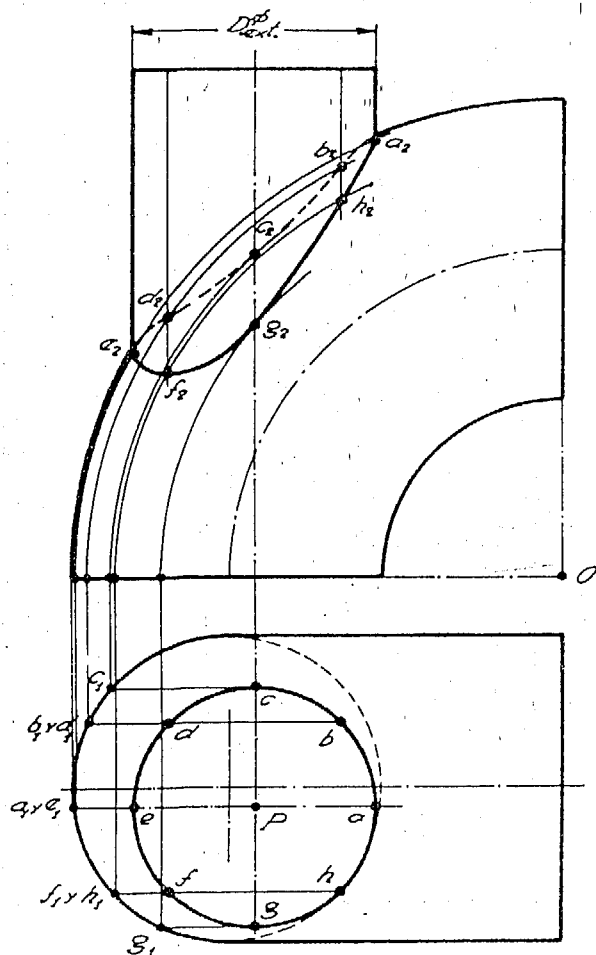


Figura 2

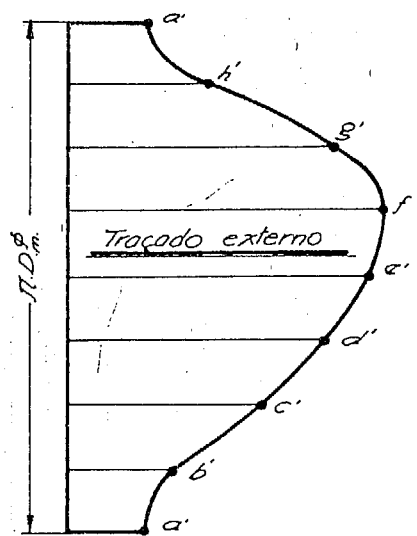


Figura 3

Figura 1

Intersecção de um cilindro em um quarto de toro, cujos eixos estão em planos perpendiculares

Divide-se a circunferência externa do enxerto (fig. 1) em um certo número de partes iguais (oito, por exemplo) e os pontos de divisão a, b, c etc., são girados em redor do centro O , obtendo-se novos pontos sobre o diâmetro do toro que são projetados perpendicularmente ao eixo do toro da figura 2, determinando sobre sua circunferência externa os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc.

Desde os pontos a_1, b_1, c_1 , etc., traçam-se paralelas ao eixo do toro, determinando sobre as geratrizes da mesma origem do enxerto os pontos de intersecção a_2, b_2, c_2 , etc.

O traçado do desenvolvimento do enxerto é feito como se ilustra na figura 3.

Também neste caso curva-se primeiro o enxerto que está sobre o toro, marcando-lhe o orifício correspondente.

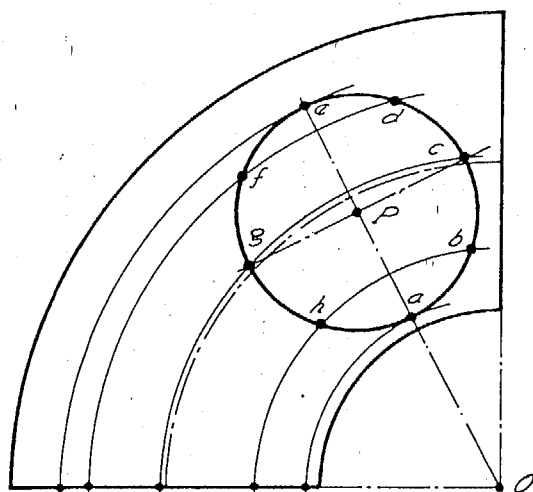


Figura 1

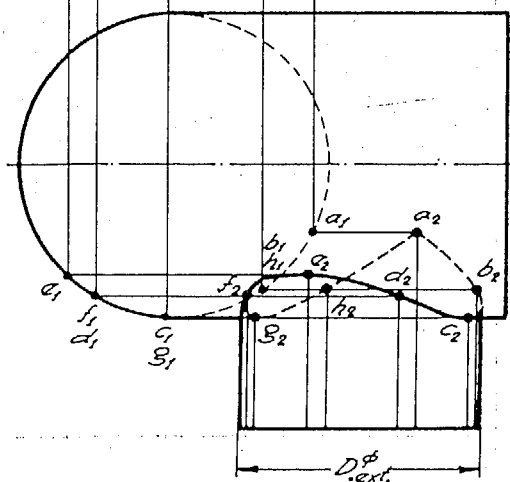


Figura 2

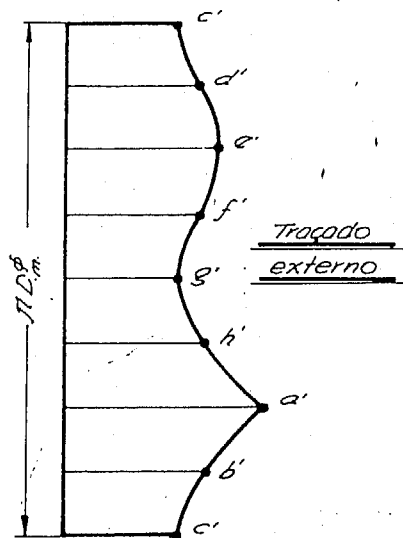


Figura 3

Intersecção de um cilindro sobre outro, tendo outro cilindro unido, cujo eixo está em plano diferente aos anteriores.

A representação dos cilindros *A* e *B* foi feita por suas fibras médias e a do outro cilindro, pela fibra externa.

Representação da curva de intersecção. Marcando o centro em um ponto qualquer do eixo da virola *B* (fig. 1), descreve-se uma circunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio do enxerto, dividindo-se em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo). Desde os pontos de divisão *a*, *b*, *c*, etc., traçam-se paralelas ao eixo da virola *B* até cortar a circunferência externa do outro cilindro nos pontos *a*₁, *b*₁, *c*₁, etc. Em uma posição qualquer, traça-se a reta *M-M* (fig. 2), perpendicular ao eixo da virola *B* e sobre esta, descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio da virola *B* e neste caso, dividimo-la em quatro partes iguais.

Desde os pontos de divisão *a*, *b*, *c* etc., traçam-se paralelas ao eixo da virola *B*, cortando a reta *M-M* nos pontos *a*₂, *b*₂, *c*₂, etc., e as projetantes dos pontos *a*₁, *b*₁, *c*₁, etc. da figura 1 nos pontos *a*₃, *b*₃, *c*₃, etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim representada a curva de intersecção.

Desenvolvimento do orifício. Desde os pontos *a*₃, *b*₃, *c*₃, etc. (fig. 2), traçam-se perpendiculares ao eixo do cilindro horizontal e sobre uma paralela qualquer a estas (fig. 3), transportam-se os comprimentos dos arcos *a*₁*b*₁, *b*₁*c*₁, etc. da figura 1, determinando assim novos pontos que também chamaremos *a*₄, *b*₄, *c*₄, etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares a essa paralela até cortar as projetantes dos pontos *a*₃, *b*₃, *c*₃, etc., nos pontos *a*₅, *b*₅, *c*₅, etc. que, unidos por meio de uma curva contínua, desenvolveriam o orifício que, ao mesmo tempo, serve como gabarito para marcá-lo sobre o cilindro depois da curvatura.

Determinação do ângulo α de deslocamento. Para determinar o ângulo α (fig. 4) formado pelo eixo da virola *A* com o plano que passa pelos eixos da virola *B* e do outro cilindro visto no sentido da direção da flecha, prolonga-se o eixo da virola *B* da figura 2 e desde *Q*₁, traça-se uma paralela a este eixo.

Em seguida, traça-se a reta *N-N* (fig. 4), paralela à reta *M-M* da figura 2, determinando os pontos *O*₂ e *Q*₂.

Marcando o centro em *O*₂, descreve-se uma circunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio da virola *B* e a partir do ponto *Q*₂, transporta-se sobre a projetante *Q*₂*Q*₁ a distância *D* tomada da figura 1, determinando assim o ponto *Q*₃ que se une com o ponto *O*₂ por meio de uma reta, achando-se assim o ângulo α de deslocamento e o ponto *F* sobre a circunferência anterior (esta circunferência também determina sobre a reta *N-N* o ponto *F*₁).

Determinação da linha de intersecção das virolas *A* e *B*. A uma distância qualquer o eixo da virola *B* da figura 2, traça-se uma paralela ao mesmo. Sobre esta paralela (fig. 5) projetam-se perpendicularmente os pontos *O*₁ e *Q*₁, determinando sobre a mesma o ponto *O*₃ e o ponto *Q*₄ na distância *E*, tomada da figura 4. (Prolonga-se também a reta *M-M* até cortar a paralela anterior no ponto *c*₄). Unindo os pontos *O*₃ e *Q*₄, determina-se o eixo da virola *A* em sua verdadeira grandeza. Portanto, a linha de intersecção das virolas *A* e *B* é a bissetriz do ângulo formado pelas retas *c*₄*O*₃ e *O*₃*Q*₄.

Marcando o centro em *c*₄ (fig. 5), descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio da virola *B* que, neste caso, divide-se em quatro partes iguais. Desde os pontos de divisão *a*, *b*, *c*, etc., traçam-se perpendiculares ao prolongamento da reta *M-M*, determinando sobre esta os pontos de intersecção *a*₄, *b*₄, *c*₄, etc., e sobre a linha de intersecção das virolas *A* e *B*, os pontos *a*₅, *b*₅, *c*₅, etc.

Desenvolvimento da virola *B*. Traça-se uma reta qualquer que chamaremos *M'-M'* (fig. 6) e sobre esta, transporta-se o comprimento da circunferência média da virola *B* ($\pi \times d_m^B$) que, neste caso, é dividida em oito partes iguais, determinando os pontos de divisão *a*₄, *b*₄, *c*₄, etc. A partir destes pontos traçam-se perpendiculares à reta *M'-M'* a que são dados os comprimentos respectivos *a*₄*a*₅, *b*₄*b*₅, etc., da figura 5, determinando assim os pontos *a*₅, *b*₅, etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

Depois, sobre a reta de referência *M'-M'* e a partir do ponto *a*₄ (parte direita), transporta-se o comprimento do arco *FF*₁ da figura 4, determinando assim o ponto *a*₂. A partir deste ponto e à esquerda, transporta-se sobre a reta *M'-M'* o comprimento $\pi \times d_m^B$ que também se divide em oito partes iguais.

Nos pontos de divisão *a*₂, *b*₂, *c*₂, etc., traçam-se perpendiculares à reta *M'-M'*, dando-lhes as distâncias *a*₂*a*₃, *b*₂*b*₃, *c*₂*c*₃, etc., da figura 2, determinando assim os pontos *a*₃, *b*₃, *c*₃, etc. A partir do ponto *a*₂ (parte esquerda), marcam-se mais duas divisões sobre a reta *M'-M'* determinando assim os pontos *b*₂ e *c*₂, a partir dos quais se traçam perpendiculares à reta anterior de comprimentos iguais aos das geratrizes *b*₂*b*₃ e *c*₂*c*₃ da mesma figura determinando assim os pontos *b*₃ e *c*₃ que se unem com os pontos *a*₃, *b*₃, *c*₃, etc., por meio de uma curva contínua. As retas *a*₃*a*₄ são prolongadas até cortar a curva anterior, ficando assim desenvolvida a virola *B*.

O desenvolvimento da virola *A* é feito tomando todos os dados da figura 5.

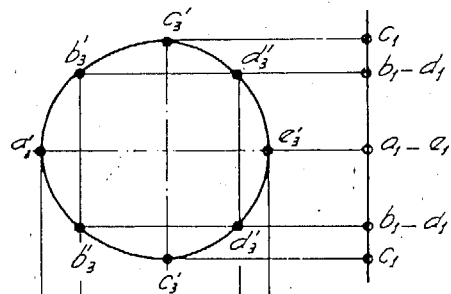


Figura 3

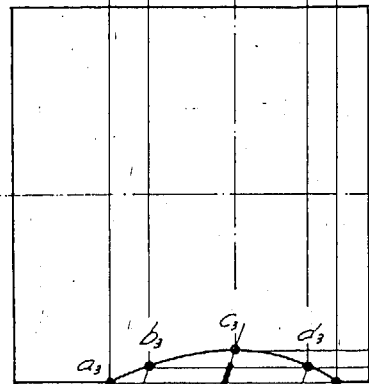


Figura 2

Figura 1

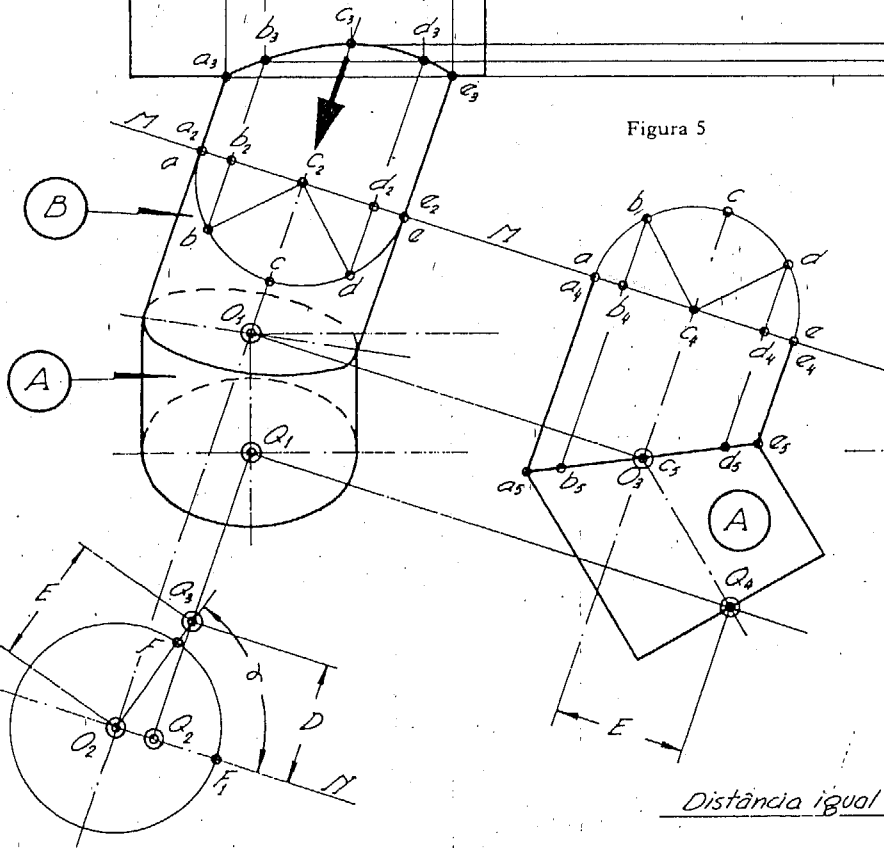
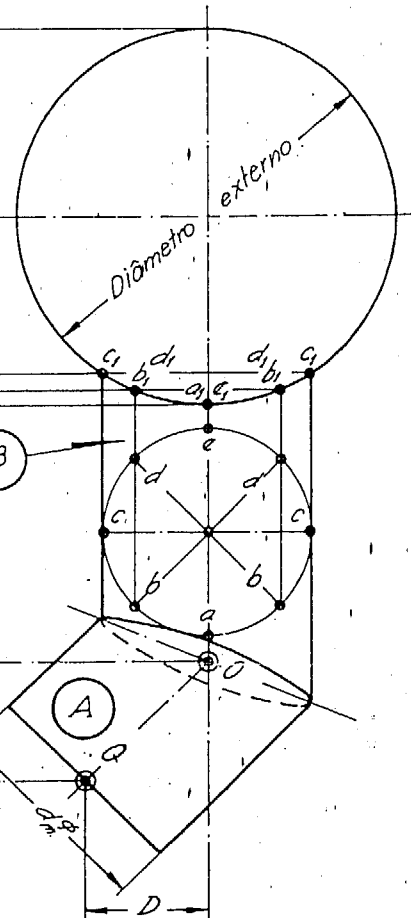


Figura 5

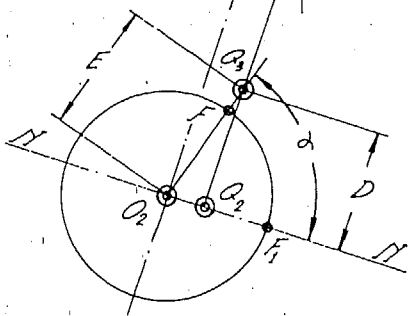


Figura 4

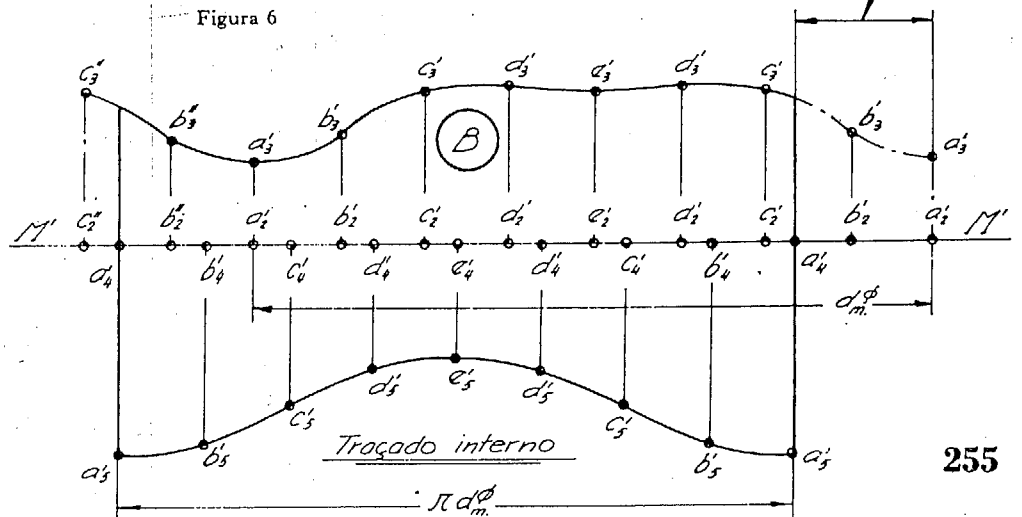


Figura 6

Intersecção de dois cilindros quaisquer

As figuras 1 e 2 representam as projeções horizontal e vertical de dois cilindros A e B , um reto e outro oblíquo de bases circulares, cujos eixos se cruzam sem cortar-se, estando à base circular do cilindro oblíquo B sobre o plano horizontal de projeção.

Método. O método consiste em seccionar a superfície de ambos os cilindros por meio de planos auxiliares secantes, paralelos aos eixos dos dois cilindros. Ao seccionar estes planos aos dois cilindros, faz-se isto seguindo geratrizes que, por sua vez, cortam-se na curva de intersecção de ambos os cilindros.

Determinação da inclinação das linhas horizontais dos planos secantes. Consegue-se a inclinação das linhas horizontais dos planos secantes escolhendo um ponto qualquer do espaço $a-a'$ (fig. 4) e traçando por ele as retas $r-r'$ e $r_1-r'_1$ que são paralelas aos eixos $OO_1-O'O'_1$ e $O_2O_3-O'_2-O'_3$.

As retas r' e r'_1 são prolongadas até cortar a linha de terra em h' e h'_1 ; estes novos pontos são projetados às retas r e r_1 , determinando assim as linhas horizontais h e h_1 das retas r e r_1 , sendo a reta que passa por estas duas linhas a inclinação das linhas dos planos auxiliares secantes que seccionarão os dois cilindros A e B .

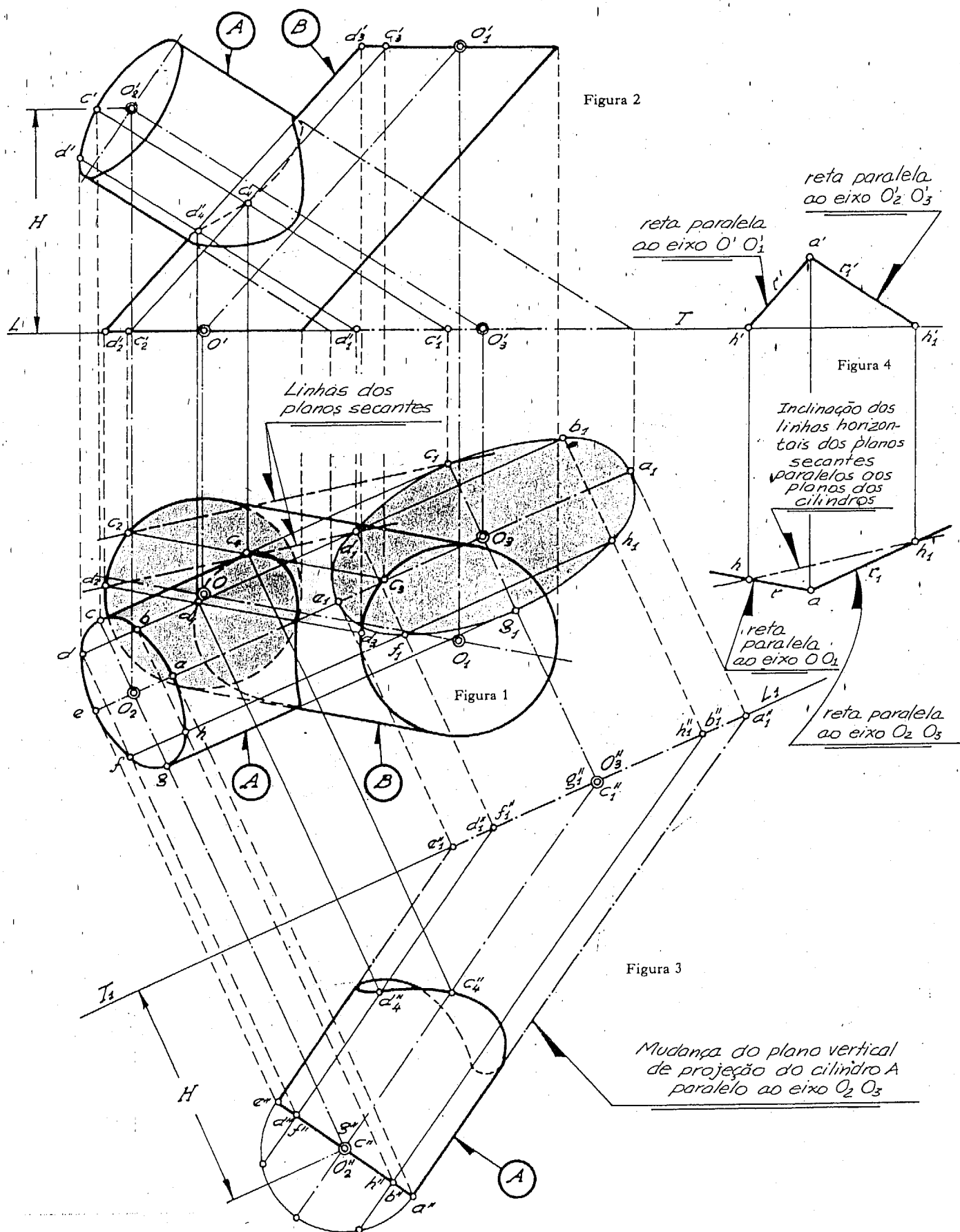
Determinação da seção elíptica do cilindro A . O cilindro A (fig. 1), seccionando-o seu prolongamento pelo plano horizontal de projeção, determina uma elipse que está sombreada. Para poder representar esta elipse é necessário recorrer a uma

mudança de plano vertical de projeção do cilindro A , situando a nova linha de terra L_1-T_1 paralela ao eixo O_2O_3 , vendo-se claramente na figura 3 a forma de representar as geratrizes de divisão $aa_1-a''a''_1$, $bb_1-b''b''_1$, $cc_1-c''c''_1$, etc., e a representação da elipse.

Determinação da curva de intersecção. Pelos pontos $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ e h_1 (fig. 1) da elipse do cilindro A , faz-se passar as linhas horizontais dos planos auxiliares secantes, cujas inclinações são iguais à da reta hh_1 da figura 4, obtendo-se novos pontos sobre a circunferência sombreada da base do cilindro B . Para maior clareza da representação do desenho, representaram-se só as linhas que passam pelos pontos c_1 e d_1 , obtendo-se assim os pontos c_2 e d_2 , a partir dos quais se traçam paralelas ao eixo do cilindro B , determinando as geratrizes c_2c_3 e d_2d_3 que cortam as geratrizes da mesma origem cc_1 e dd_1 do cilindro A nos pontos c_4 e d_4 pertencentes à curva de intersecção de ambos os cilindros.

As geratrizes cc_1, dd_1, c_2c_3 e d_2d_3 são projetadas na vista em elevação, determinando as geratrizes $c'c'_1, d'd'_1, c'_2c'_3$ e $d'_2d'_3$ que se cortam nos respectivos pontos c'_4 e d'_4 . (Estes pontos também podem ser obtidos projetado diretamente os pontos c_4 e d_4 da vista em planta).

Os dados necessários para desenvolver o cilindro A são tomados diretamente da figura 3 e para tomar os dados do cilindro B , é necessário recorrer a uma mudança de plano vertical de projeção do cilindro B , paralelo ao eixo OO_1 .



Intersecção especial de três cilindros

A intersecção dos três cilindros A , B e C que têm o mesmo diâmetro é representada na projeção horizontal (fig. 1) por seus respectivos eixos OO_1 , O_1O_2 e O_1O_3 . O cilindro A é representado com a base sobre o plano vertical de projeção, sendo seu eixo OO_1 uma reta de topo perpendicular a esse plano.

Os outros dois cilindros B e C são simétricos entre si e seus eixos O_1O_2 e O_1O_3 são inclinados com respeito aos dois planos de projeção, como se pode observar nas figuras 1 e 2.

Na figura 6 se vê graficamente qual é o método a seguir para representar a projeção da elipse do tubo B (fig. 1), embora não seja necessária esta representação para desenvolver esse tubo. (A altura H_2 da figura 6 é tomada da figura 2 e o diâmetro da semicircunferência de centro O''_2 é igual ao diâmetro do tubo B).

Os dados necessários para desenvolver os cilindros A e B são determinados efetuando uma mudança de plano vertical de projeção paralelo ao eixo $O'_1O'_2$, como se vê na figura 3. (Os dados do cilindro B servem também para desenvolver o cilindro C).

Mudança de plano vertical de projeção dos cilindros A e B (fig. 3). Traça-se a nova linha de terra $L_1 - T_1$ paralela ao eixo $O'_1O'_2$ e se projetam os centros O' , O'_1 e O'_2 da figura 2 perpendicularmente a $L_1 - T_1$, dando-lhes as alturas H e H_1 , tomadas da figura 1, determinando assim os pontos O'' , O''_1 e O''_2 que são os centros por onde passam os eixos dos cilindros A e B , em verdadeira grandeza. Depois traça-se o contorno aparente dos dois cilindros e a linha de intersecção de ambos.

Traçado das geratrizes. A circunferência de centro O' da figura 2 é dividida em um número adequado de partes iguais (doze, por exemplo) e desde os pontos de divisão a , b , c , etc. e M , N , traçam-se perpendiculares à linha de terra $L_1 - T_1$ da figura 3, determinando sobre a linha de intersecção dos dois cilindros os pontos a_1 , b_1 , c_1 , etc. e

M_1 , N_1 . (Os pontos M e N são formados pela intersecção da circunferência de centro O' e a linha de intersecção dos cilindros B e C).

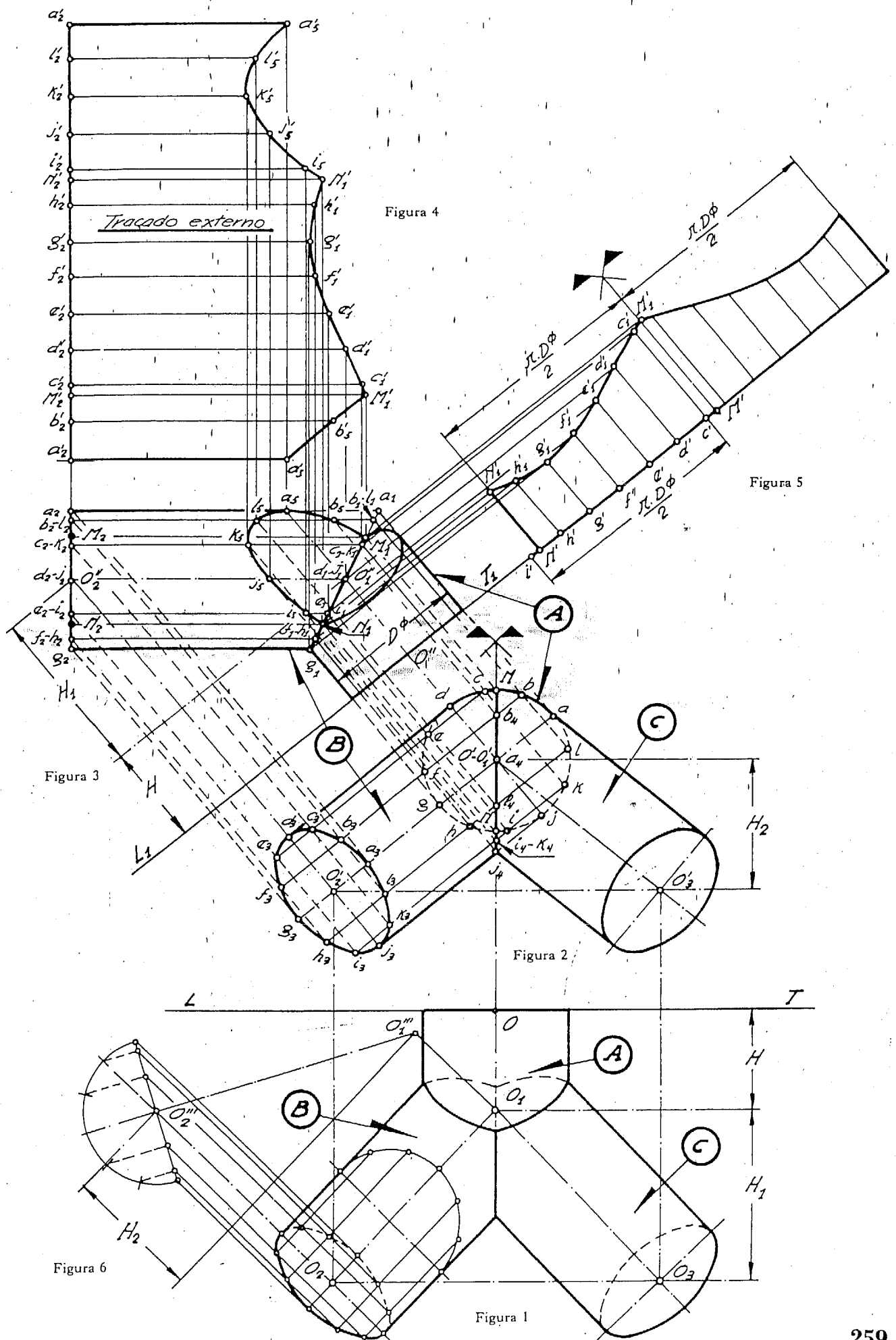
Os novos pontos a_1 , b_1 , c_1 , etc. e M_1 , N_1 , são projetados paralelamente ao eixo do cilindro B até cortar o seu diâmetro nos pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc. e M_2 , N_2 .

Pelos pontos a , b , c , etc., da figura 2 traçam-se retas de geratrizes paralelas ao eixo $O'_1O'_2$ do cilindro B , cortando as projetantes de a_2 , b_2 , c_2 , etc., da figura 3 nos pontos a_3 , b_3 , c_3 , etc. e a linha de intersecção dos cilindros B e C , nos pontos a_4 , b_4 , i_4 , j_4 , k_4 e l_4 . Estes novos pontos são projetados perpendicularmente à linha de terra $L_1 - T_1$ da figura 3, determinando sobre as geratrizes da mesma origem do tubo B os pontos de intersecção a_5 , b_5 , i_5 , j_5 , k_5 e l_5 .

Desenvolvimento do cilindro A . Tomam-se as distâncias dos arcos Mc , cd , de , ef , fg , gh e hN da circunferência neutra de centro O' (fig. 2) e se transportam sobre o prolongamento do diâmetro do cilindro A da figura 5, determinando os pontos M' , c' , d' , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares. Desde os pontos M_1 , c_1 , d_1 , etc., da figura 3, traçam-se paralelas ao diâmetro do cilindro A , cortando as perpendiculares anteriores nos pontos M'_1 , c'_1 , d'_1 , etc. que são unidos por meio de uma curva contínua, ficando determinado meio desenvolvimento do cilindro A , sendo a outra metade simétrica a esta, assim como se vê na figura 5.

Desenvolvimento do cilindro B (fig. 4). Este cilindro se desenvolve de forma análoga à anterior, considerando que se deve curvâ-lo, ficando o traçado pela parte externa.

Desenvolvimento do cilindro C . O desenvolvimento do cilindro C é igual ao do cilindro B , variando somente a curvatura, já que o traçado deve ficar na parte interna.



INTERSECÇÕES DE CONES EM CILINDROS

EXERCÍCIO

117

Intersecção de um cone em um cilindro, perpendicularmente, com os eixos em um mesmo plano

Primeiramente representa-se o tronco de cone por sua fibra média e o cilindro, por sua fibra externa; depois descreve-se uma semicircunferência (fig. 1) sobre o diâmetro médio do tronco de cone, dividindo-a em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro médio do enxerto, determinando sobre este os pontos de intersecção a_1 , b_1 , etc., a partir dos quais se traçam retas geratrizes que partam do vértice V , determinando sobre a circunferência externa do cilindro os pontos de intersecção a_2 , b_2 , etc.

Depois traça-se outra semicircunferência (fig. 2) sobre o diâmetro médio do enxerto, dividindo-a em um mesmo número de partes iguais que a anterior. Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro médio do enxerto, determinando sobre o mesmo os pontos de intersecção a_3 , b_3 , etc.; por onde passam retas geratrizes que partam do vértice V_1 .

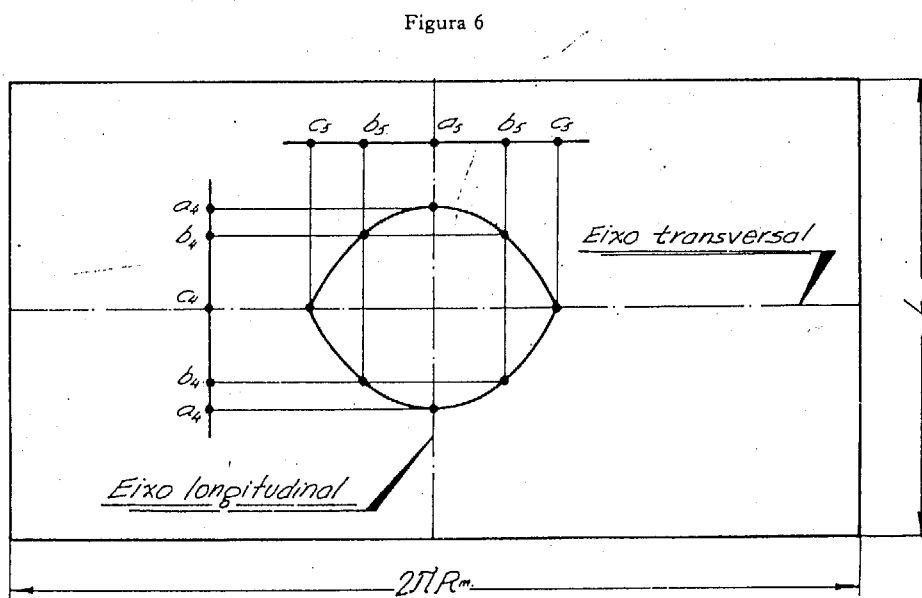
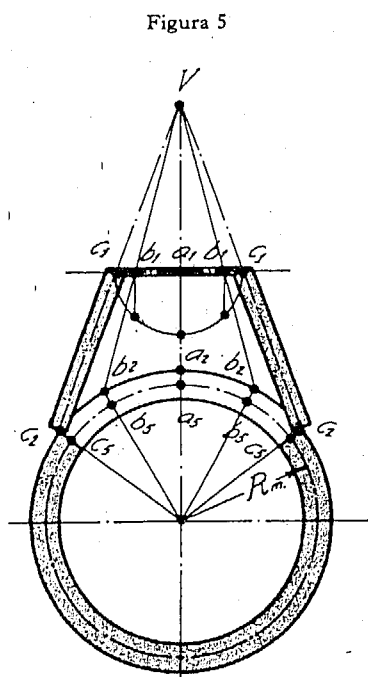
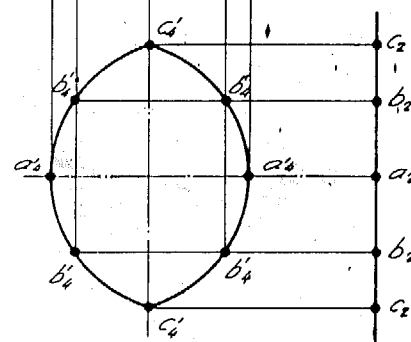
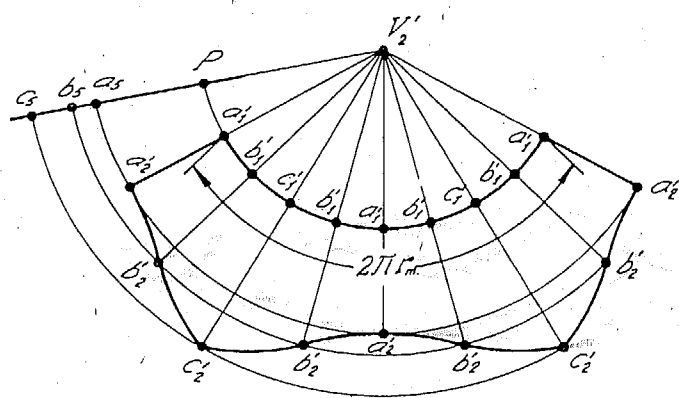
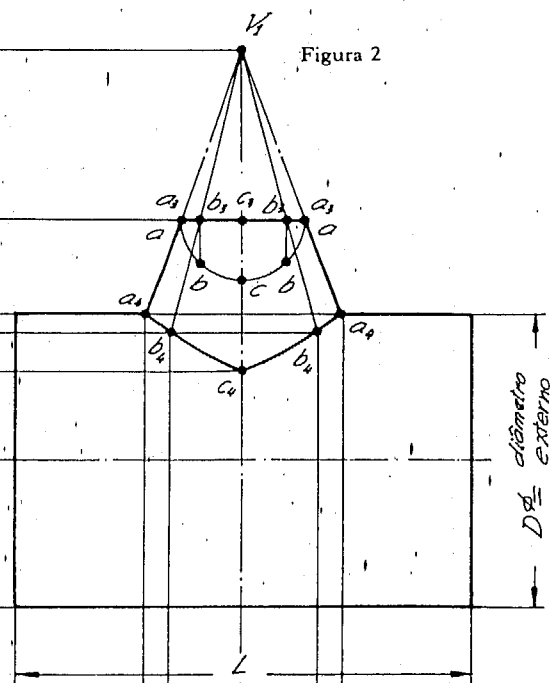
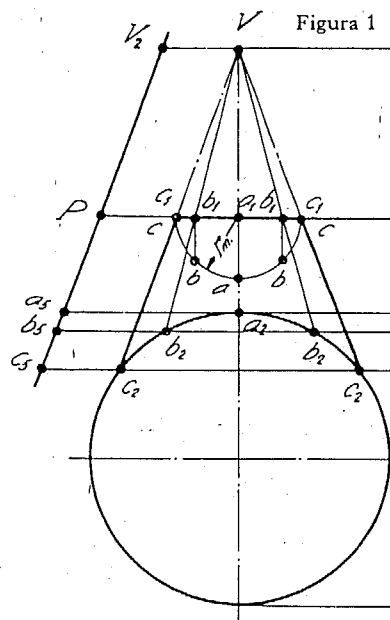
Os pontos a_2 , b_2 , etc. (fig. 1) são projetados paralelamente ao eixo horizontal do cilindro, determinando sobre as geratrizes da mesma origem (fig. 2) os pontos de intersecção a_4 , b_4 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua equivalente à linha de intersecção.

Desenvolvimento do enxerto. Traça-se uma paralela à geratriz extrema do cone (fig. 1) e se projetam os pontos a_2 , b_2 , etc., perpendicularmente ao eixo, determinando sobre esta os pontos a_5 , b_5 , etc.; também se projeta o vértice V perpendicularmente ao eixo do enxerto até cortar a paralela

em V_2 . Acha-se o ponto P prolongando o diâmetro médio do enxerto. Transporta-se esta paralela à figura 3 e marcando o centro no ponto V'_2 , descreve-se um arco que parta do ponto P e se transporta sobre este arco um comprimento igual ao da circunferência média do tronco de cone ($2\pi \times r_m$), dividindo-a em oito partes iguais. Desde o ponto V'_2 traçam-se retas geratrizes que passam pelos pontos de divisão a'_1 , b'_1 , etc. e marcando o centro no ponto anterior, traçam-se arcos que partam dos pontos a_5 , b_5 e c_5 , determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos de intersecção a'_2 , b'_2 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento.

Desenvolvimento do orifício. Projetam-se os pontos a_4 , b_4 , etc. (fig. 2) perpendicularmente ao eixo horizontal do cilindro e sobre uma paralela a estas (fig. 4), transportam-se os comprimentos dos arcos a_2b_2 e b_2c_2 da figura 1, determinando novos pontos que também chamaremos a_2 , b_2 e c_2 ; a partir dos quais se traçam perpendiculares às anteriores até cortá-las nos pontos a'_4 , b'_4 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas, ficando assim desenvolvido o orifício que será marcado, neste caso, sobre o cilindro depois de ser curvado.

Caso se queira traçar o orifício antes de curvar o cilindro, tal como ilustra a figura 6, unem-se os pontos a_2 , b_2 e c_2 da circunferência externa (fig. 5) com o centro do cilindro, determinando sobre a circunferência média do mesmo os pontos a_5 , b_5 e c_5 , sendo as distâncias a_5b_5 e b_5c_5 da figura 6 iguais aos comprimentos dos arcos a_5b_5 e b_5c_5 , respectivamente, da figura 5.



Intersecção de um cone em um cilindro, perpendicularmente, estando seus eixos em planos paralelos

Também neste caso, como no anterior, representou-se o cone por sua fibra média e o cilindro, pela fibra externa.

Este caso se desenvolve de forma análoga à anterior, considerando que o comprimento do arco

Mc_2 da figura 1 deve ser transportado sobre a figura 4 a partir do eixo longitudinal.

Nota. Desejando-se marcar o orifício antes de curvar o cilindro, opera-se como se indica nas figuras 5 e 6 do exercício anterior.

Figura 1

Figura 2

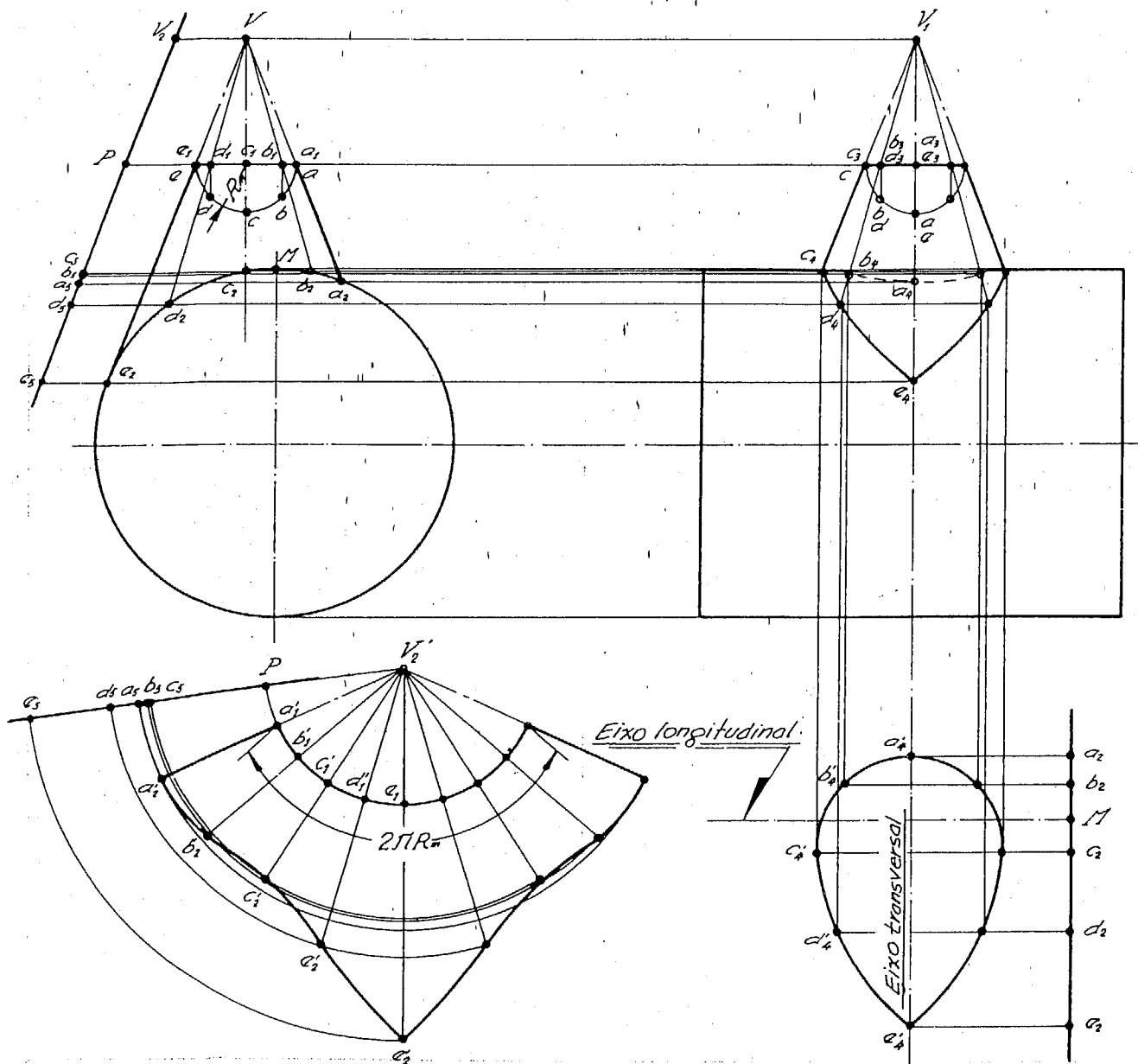


Figura 3

Figura 4

Intersecção de um cone sobre um cilindro, cujos eixos estão inclinados e situados em um mesmo plano

O enxerto é representado por sua fibra média e o cilindro, pela fibra externa, respectivamente.

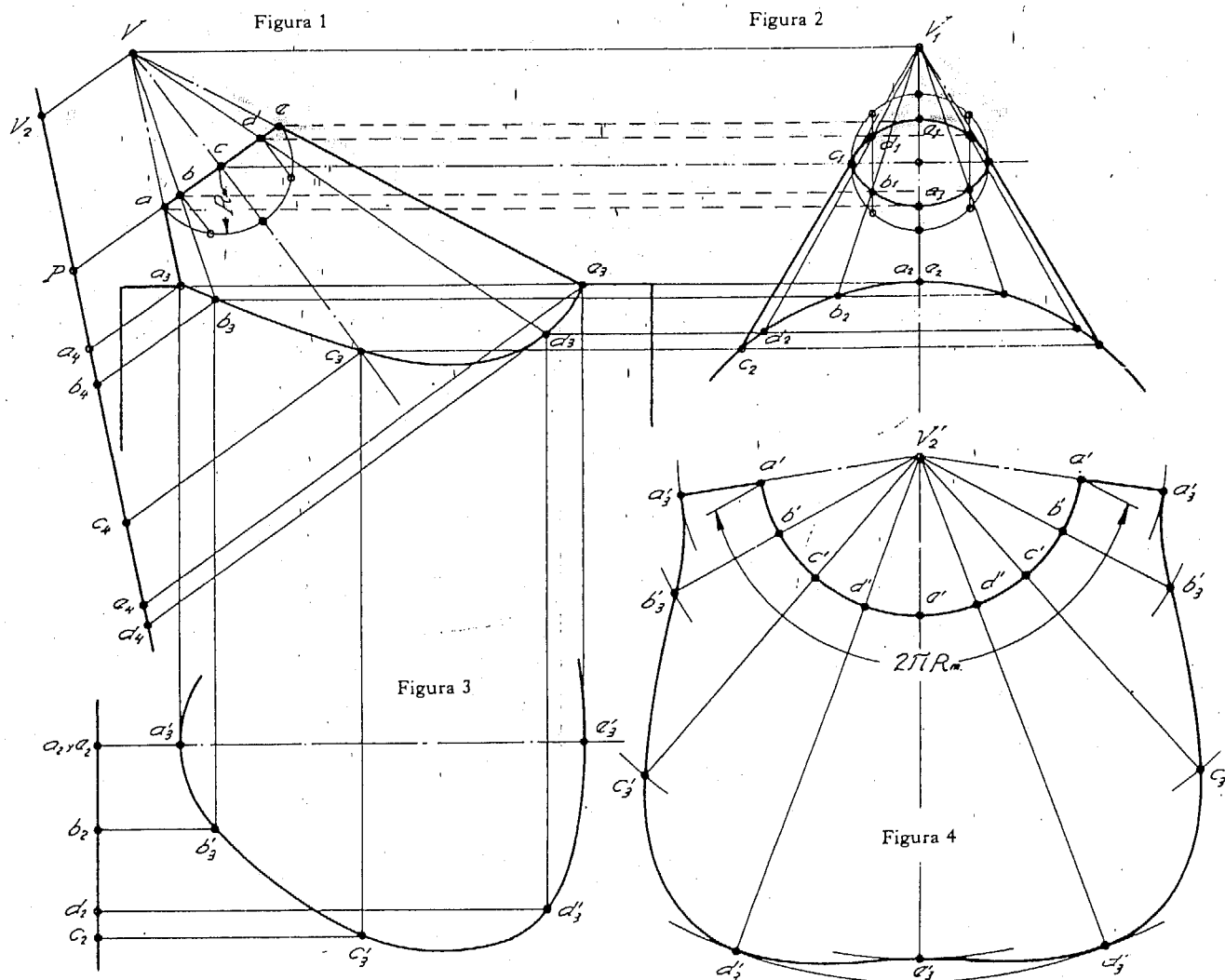
Representação da linha de intersecção. Sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1), descreve-se uma semicircunferência, dividindo-a em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão, traçam-se perpendiculares ao diâmetro do enxerto, determinando os pontos a, b, c , a partir dos quais se traçam retas geratrizes que partam do vértice V .

Marcando o centro no eixo do enxerto (fig. 2), descreve-se uma circunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio do enxerto que, neste caso, é dividida em oito partes iguais; traçando depois paralelas ao eixo vertical do enxerto desde os pontos

de divisão dessa circunferência e a partir dos quais são projetados perpendicularmente os pontos a, b, c , etc. da figura 1, determinam-se os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc.

Por estes pontos traçam-se retas geratrizes que partem do vértice V_1 , determinando sobre a circunferência externa do cilindro os pontos a_2, b_2, c_2 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares ao eixo do enxerto até cortar as geratrizes da mesma origem (fig. 1) nos pontos a_3, b_3, c_3 , etc. Estes pontos são unidos por meio de uma curva contínua, ficando assim representada a linha de intersecção.

O desenvolvimento do orifício e do enxerto é feito como se explica no exercício 117.



Intersecção de um cone sobre um cilindro, cujos eixos estão inclinados e situados em planos paralelos

O cone é representado por sua fibra média e o cilindro, por sua fibra externa.

Resolve-se estes caso como o anterior.

Figura 1

Figura 2

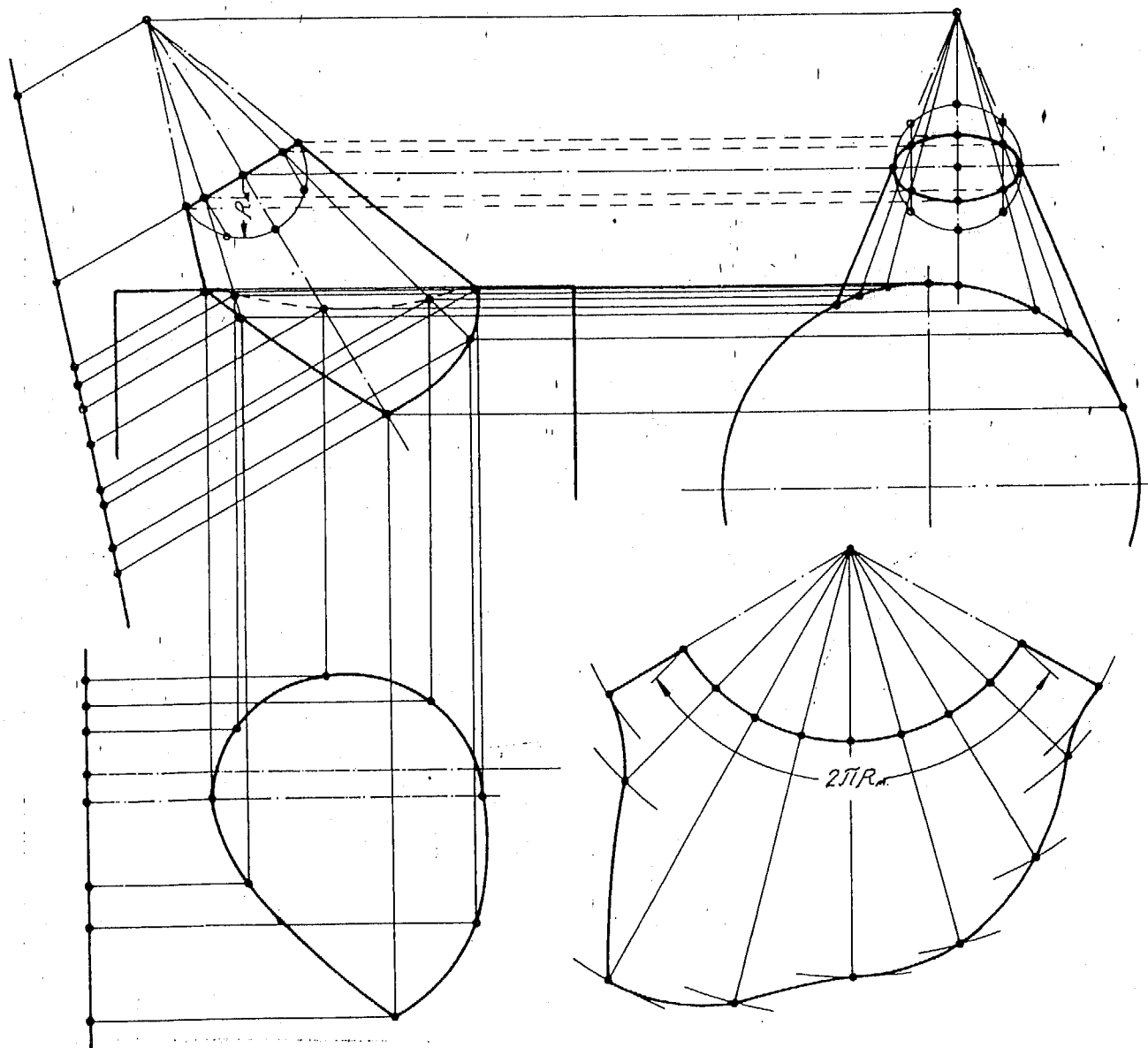


Figura 3

Figura 4

Curva de intersecção de um cone e de um cilindro pelo método das esferas

Este método só é aplicável quando os eixos de ambos os corpos estiverem em um mesmo plano, embora tenham uma inclinação qualquer.

Representação da linha de intersecção. Marcando o centro no ponto de intersecção O de ambos os eixos, descreve-se um certo número de arcos quaisquer (dois, neste caso), determinando sobre as geratrizes extremas de ambos os corpos os respectivos pontos de intersecção $a-a$ e $b-b$, a partir dos quais se traçam perpendiculares aos seus res-

pectivos eixos, determinando os pontos de intersecção a_1 e b_1 , pertencentes à linha de intersecção. Repetindo várias vezes esta mesma operação, determinam-se outros pontos pertencentes à linha de intersecção que se unem por meio de uma curva contínua com os pontos de intersecção das geratrizes extremas do cilindro e do cone.

Nota. Ver o exercício 137.

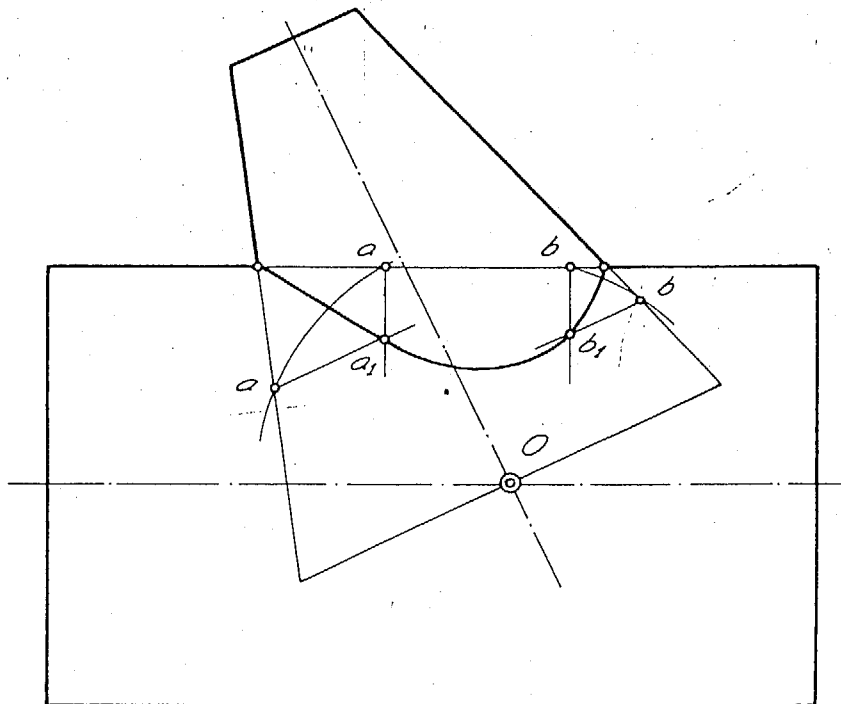


Figura 1

Intersecção de um cone oblíquo em um cilindro

As projeções horizontal (fig. 1) e vertical (fig. 2) são representadas pela fibra média do cone oblíquo e pela fibra externa do cilindro.

Representação da linha de intersecção. Divide-se a circunferência média da base do cone oblíquo (fig. 1) em certo número de partes iguais (oito, por exemplo); unindo os pontos de divisão a , b , etc., com o vértice V_1 por meio de retas geratrizes que cortam a circunferência externa do cilindro nos pontos a_1 , b_1 , etc., determinam-se as geratrizes do cone e a linha de intersecção de ambos os corpos que, neste caso, confunde-se com a circunferência externa do cilindro.

Desde os pontos de divisão a , b , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro médio do cone oblíquo (fig. 2), determinando sobre este os pontos de intersecção a_2 , b_2 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes. Em seguida, projetam-se os pontos a_1 , b_1 , etc. (fig. 1) paralelamente ao eixo vertical do cilindro, determinando sobre as geratrizes do cone (fig. 2) os pontos de intersecção a_3 , b_3 , etc., que se unem ordenadamente por meio de uma curva contínua, determinando assim a representação da linha de intersecção vista em elevação.

Determinação das geratrizes reais do cone oblíquo. Em um ponto qualquer X do prolongamento da base do cone (fig. 3), traça-se uma perpendicular e desde V (fig. 2), traça-se uma perpendicular a esta, determinando o ponto de intersecção V_2 .

A partir do ponto X e à direita deste, transportam-se sobre o prolongamento da base as distâncias V_1a , V_1b , etc., da figura 1, determinando os pontos a_4 , b_4 , etc., que são unidos por meio de re-

tas no ponto V_2 , determinando-se as geratrizes reais.

Uma vez achadas as geratrizes reais, traçam-se paralelas ao diâmetro do cone desde os pontos a_3 , b_3 , etc. (fig. 2), determinando sobre as geratrizes reais da mesma origem (fig. 3) os pontos de intersecção a_5 , b_5 , etc.

Desenvolvimento do orifício. Traçam-se duas retas quaisquer perpendiculares entre si (fig. 4) e transportam-se sobre estas as respectivas distâncias a_6b_6 , b_6c_6 , etc. (fig. 2) e os comprimentos dos arcos a_1b_1 , b_1c_1 , etc., (fig. 1), determinando sobre essas retas os pontos que também chamaremos a_6 , b_6 , etc. e a_1 , b_1 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares às suas respectivas retas, determinando pela intersecção destas os pontos a'_3 , b'_3 , etc. Estes pontos são unidos por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido o orifício que serve como gabarito para marcá-lo no cilindro depois de ser curvado.

Desenvolvimento do cone oblíquo. O desenvolvimento deste cone (fig. 5) foi feito inteiro, como se explica no capítulo de cones oblíquos. A partir do vértice V'_2 , transportam-se sobre as geratrizes da mesma origem as respectivas distâncias V'_2a_5 , V'_2b_5 , etc. da figura 3, determinando assim os pontos a'_5 , b'_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua (linha de intersecção desenvolvida).

Nota. Caso o enxerto fosse um tronco de cone ou se o seu eixo estivesse em um plano paralelo ao do cilindro, desenvolver-se-ia de forma análoga à que foi exposta.

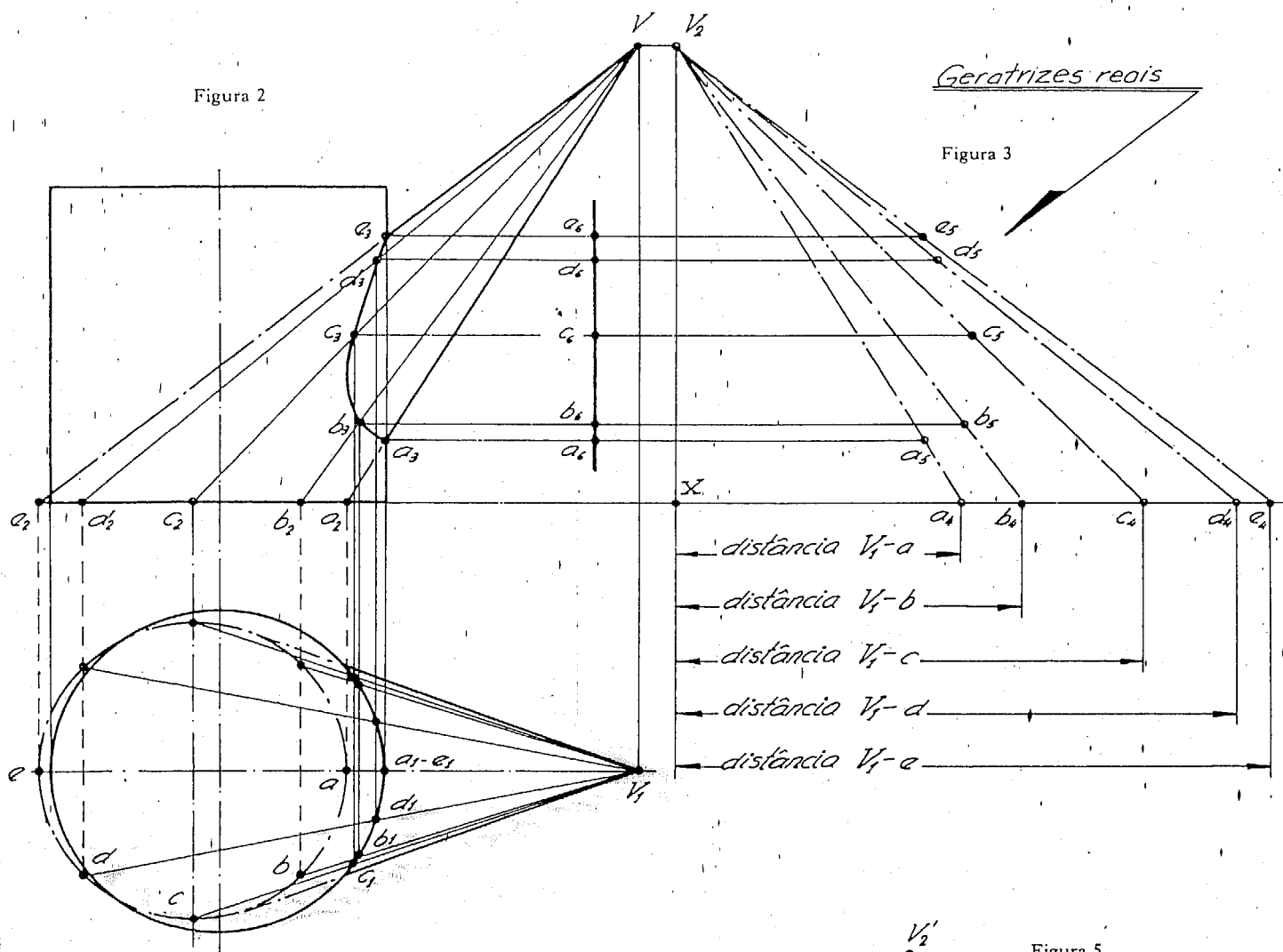
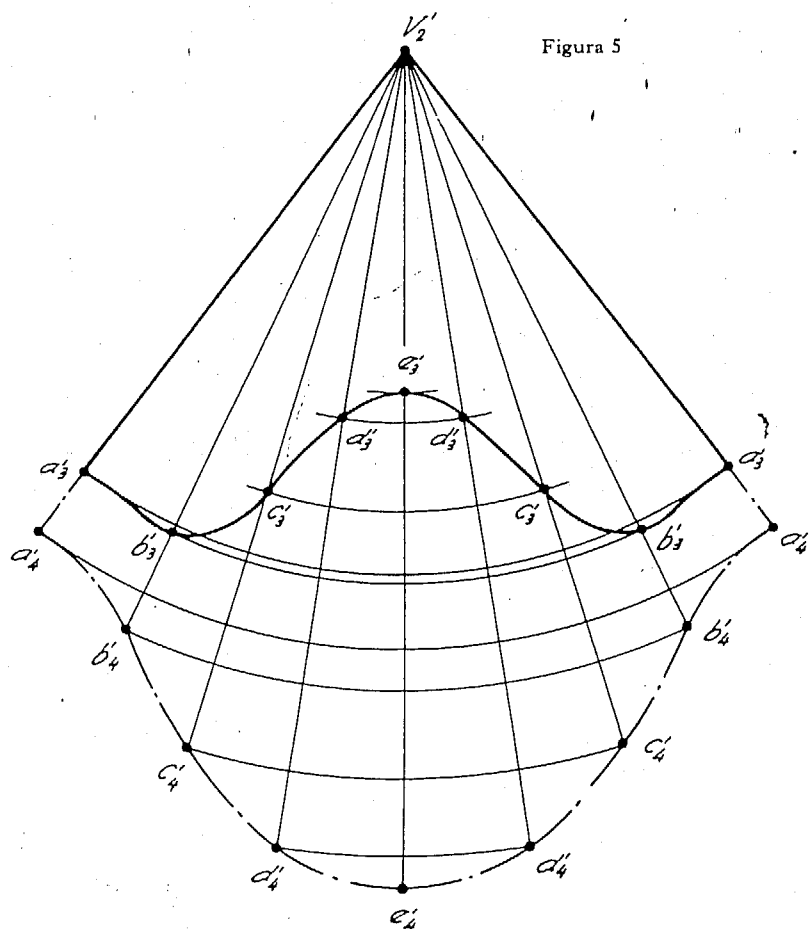
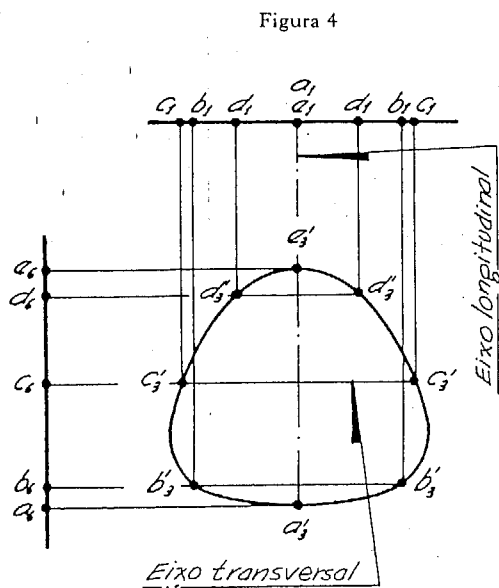


Figura 1



INTERSECÇÕES CÔNICAS

EXERCÍCIO

123

Intersecção de um cone sobre outro, cujos eixos são paralelos (primeiro método)

Um dos métodos mais fáceis que existem para desenvolver as intersecções cônicas é o que consiste em representar o enxerto por sua fibra média e o outro cone pela fibra externa, como se representou neste caso.

Para maior clareza só se representou a metade das circunferências das bases desses cones na projeção horizontal (fig. 2) e em seus respectivos vértices V_1 e W_1 .

O método que vamos empregar neste caso para desenvolver estes cones, consiste em seccioná-los por meio de planos secantes que passam pelos vértices V e W de ambos. (Para facilitar o trabalho, os planos secantes passarão pelas geratrizes de divisões iguais ao enxerto). Chamaremos a linha de intersecção dos planos secantes de *charneira* porque podemos imaginar que é o eixo de rotação de um plano secante que adota as posições das geratrizes de divisão do enxerto (ver na parte de "Geometria descritiva" a seção referente a Intersecções).

Representação da linha de intersecção. Divide-se a semicircunferência do enxerto (fig. 2) em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro do enxerto, determinando os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc. (fig. 1) que se unem com o vértice W do enxerto por meio de retas geratrizes.

Em seguida traça-se a charneira dos planos secantes que passam pelos vértices V e W , determinando sobre a linha de terra $L-T$ o ponto Y (linha horizontal da charneira). A partir deste ponto traça-se uma perpendicular à $L-T$ até cortar a reta que passa pelos pontos V_1 e W_1 (a charneira vista em planta) no ponto Y_1 (fig. 2).

Este ponto é unido com os pontos de divisão a, b, c , etc., por meio de retas (linhas horizontais dos planos secantes) que cortam a semicircunferência externa do cone grande nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares ao diâmetro do cone (fig. 1), determinando sobre ele os pontos de intersecção a_3, b_3, c_3 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes. Como as geratrizes da mesma origem de ambos os cones pertencem ao mesmo plano secante, os pontos de intersecção a_4, b_4, c_4 , etc., de ambos pertencerão, logicamente, à linha de intersecção de ambos os cones. (Os pontos a_4, b_4, c_4 , etc., são uni-

dos por meio de uma curva contínua, ficando assim representada a linha de intersecção).

Pelos pontos a_4, b_4, c_4 , etc. traçam-se retas perpendiculares aos eixos dos cones, determinando sobre uma paralela à geratriz extrema do enxerto os pontos a_5, b_5, c_5 , etc., e sobre a geratriz extrema do outro cone, os pontos a_6, b_6, c_6 , etc. (O ponto W_2 é determinado traçando-se uma perpendicular ao eixo do enxerto desde o vértice W).

Desenvolvimento do orifício. Marcando o centro em V , descreve-se um arco que parta de Q e sobre este arco (fig. 3), transportam-se os comprimentos dos arcos a_2b_2, b_2d_2 , etc., da figura 2, determinando hovers pontos que também chamaremos a_2, b_2, c_2 , etc. Estes pontos são unidos com o vértice V por meio de retas e marcando o centro em V , descrevem-se arcos que partam dos pontos a_6, b_6, c_6 , etc., determinando sobre as retas anteriores da mesma origem os pontos a'_4, b'_4, c'_4 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua, determinariam o desenvolvimento do orifício que serve de gabarito para marcá-lo sobre o cone depois da curvatura.

Desenvolvimento do enxerto. Desenvolve-se o cone inteiro (fig. 4); divide-se em oito partes iguais neste caso, e transporta-se sobre as geratrizes da mesma origem as distâncias W_2a_5, W_2b_5 , etc. da figura 1, determinando os pontos a'_4, b'_4 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua, desenvolveriam o enxerto.

Desenvolvimento do cone com seu orifício. Na figura 1-bis representou-se o mesmo cone da figura 1 mas, com sua espessura e com o eixo médio, chamando de V neste caso o vértice do cone que passa pela fibra média (o vértice V da figura 1 é o vértice externo). O desenvolvimento do cone com seu orifício foi representado claramente na figura 3-bis, sendo os comprimentos dos arcos a_7b_7, b_7c_7 , etc., iguais aos dos arcos a_7b_7, b_7c_7 , etc., do diâmetro médio do cone da figura 2-bis.

Caso o enxerto seja mais alto que o outro cone, a solução poderá ser obtida como se vê na figura 5.

Se os vértices de ambos os cones estiverem à mesma altura, acharemos a linha de intersecção de ambos, assim como se ilustra na figura 6.

Tracado do orifício para
depois de curvar
o cone, marcado
sobre o cone
por fora

Figura 1

Charneira dos
planos secantes

Figura 3

Figura 2

Figura 3 bis

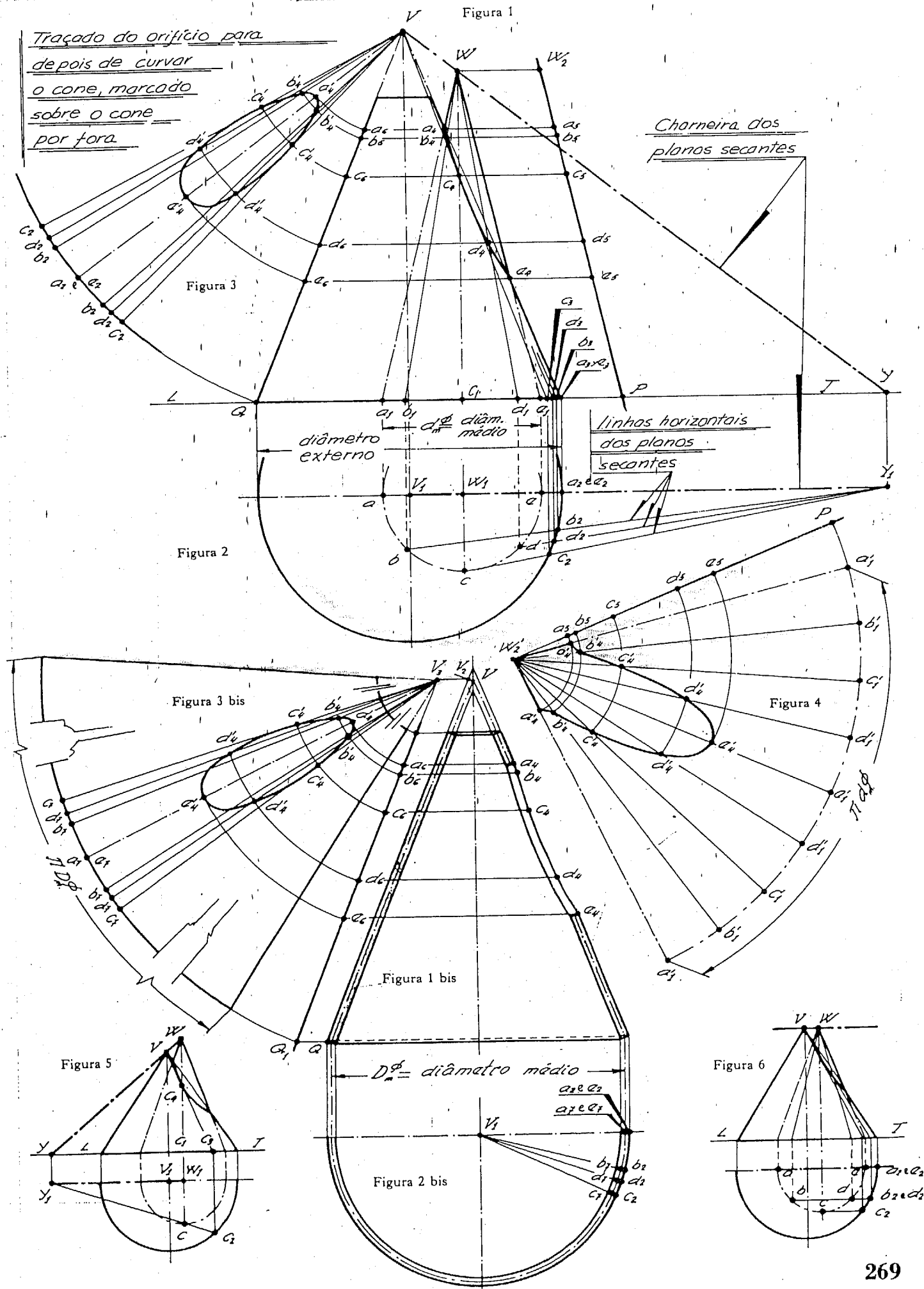
Figura 4

Figura 1 bis

Figura 5

Figura 6

Figura 2 bis



Intersecção de dois cones, cujos eixos são paralelos (segundo método)

A representação do enxerto é feita por sua fibra média e a do outro cone, pela fibra externa.

Se um cone reto for seccionado perpendicularmente ao seu eixo por meio de um plano secante, teríamos uma seção circular.

Na perspectiva da figura 1 representa-se dois cones cujos eixos são paralelos e seccionados por meio de um plano secante determinado por uma circunferência em cada um deles. Como estas circunferências pertencem ao mesmo plano, os pontos de intersecção 1-1 de ambas as circunferências logicamente pertencerão à linha de intersecção de ambos os cones.

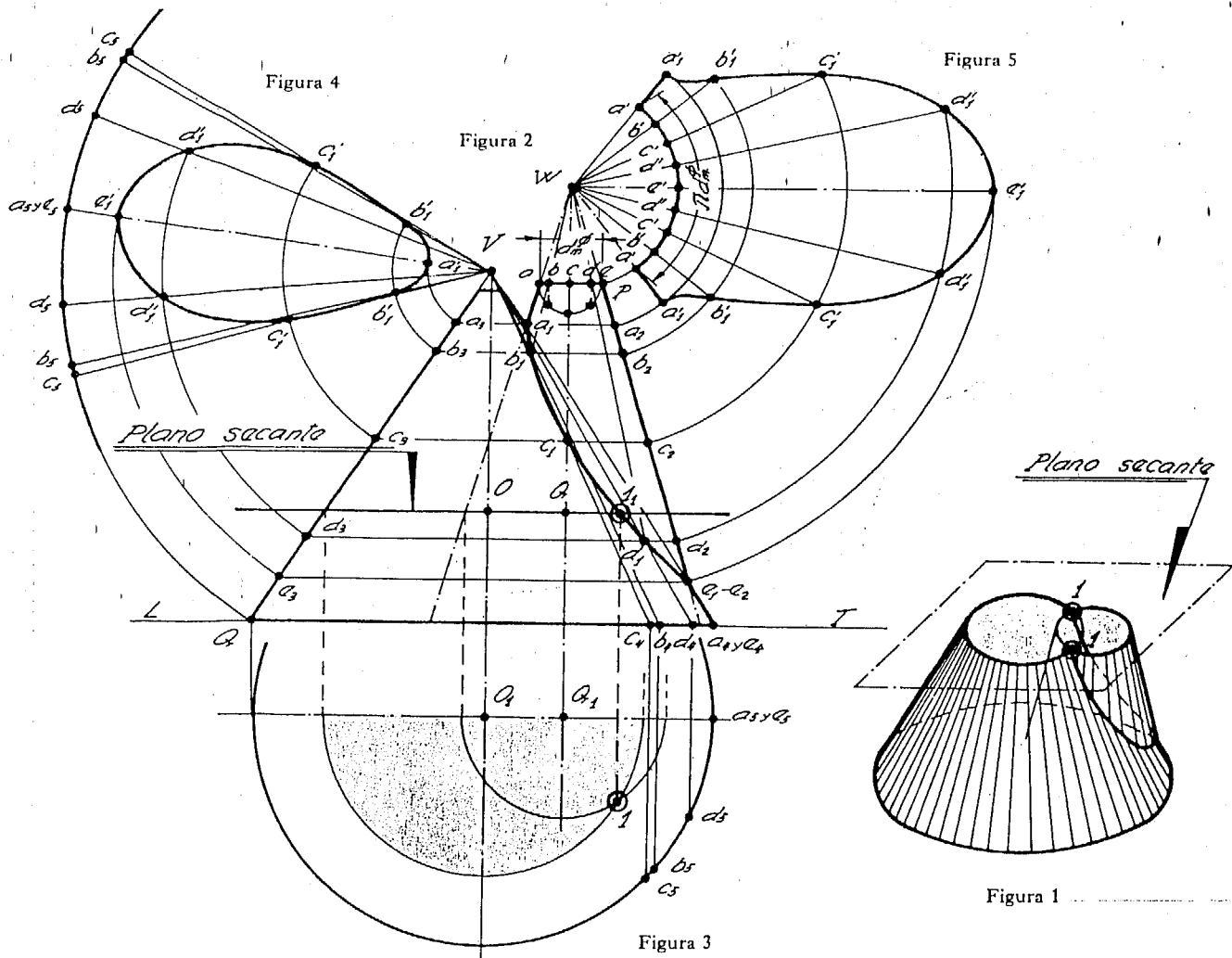
A figura 2 representa um plano secante qualquer, perpendicular aos eixos dos cones e que determina as duas semicircunferências sombreadas (fig. 3), sendo o ponto de intersecção 1 o pertencente à linha de intersecção; logo, projetando este ponto perpendicularmente ao plano secante, de-

termina-se o ponto I_1 . Repetindo esta operação com vários planos, acharemos todos os pontos que desejamos e pertencentes à linha de intersecção, unindo-os depois por meio de uma curva contínua.

Em seguida, descreve-se uma semicircunferência (fig. 2) sobre o diâmetro médio do enxerto, dividindo-a em um número adequado de partes iguais e desde os pontos de divisão, traçam-se perpendiculares a esse diâmetro, determinando os pontos a, b, c etc., a partir dos quais se traçam retas que partam de W , determinando sobre a linha de intersecção os pontos a_1, b_1, c_1 , etc.

O desenvolvimento de ambos os cones é feito de forma análoga ao caso anterior.

Os pontos a_5, b_5 , etc. (fig. 3) foram achados projetando os pontos a_4, b_4 , etc., e estes últimos foram obtidos traçando retas geratrizes que, partem de V e passam pelos pontos a_1, b_1, c_1 , etc.



Curva de intersecção de dois cones pelo método das esferas

Este método só é aplicável quando os eixos de ambos os corpos estiverem em um mesmo plano, embora a inclinação destes seja uma inclinação qualquer.

Representação da curva de intersecção. Marcando o centro no ponto de intersecção O de ambos os eixos, descreve-se um certo número de arcos de raios quaisquer (dois arcos, neste caso, na parte direita da figura), determinando sobre as geratrizes extremas de ambos os cones os respectivos pontos de intersecção $a-a$ e $b-b$, a partir dos quais se

traçam perpendiculares aos seus respectivos eixos, determinando os pontos de intersecção a_1 e b_1 pertencentes à linha ou curva de intersecção de ambos os corpos. Repetindo várias vezes esta mesma operação, determinaremos quantos pontos desejarmos, unindo-os depois com os pontos de intersecção das geratrizes extremas por meio de uma curva contínua.

A linha de intersecção da parte esquerda é feita de forma análoga à anterior.

Nota. Ver o exercício 137.

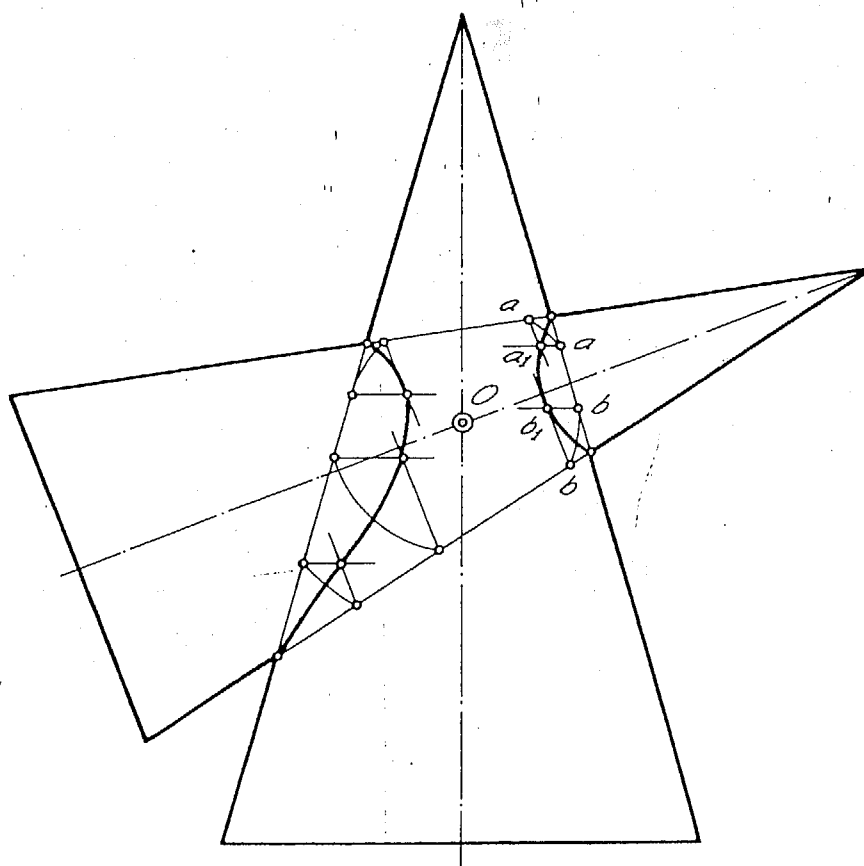


Figura 1

Intersecção de dois cones, cujos eixos são perpendiculares e estão contidos em um mesmo plano

Para resolver este caso só é necessário representar a projeção vertical (fig. 1) de ambos os cones. O enxerto foi representado por sua fibra média e o outro cone, pela fibra externa.

Representação da linha de intersecção (fig. 1). Unem-se os vértices V e W dos cones por meio de uma reta que corta o prolongamento da base do cone no ponto Y .

Em seguida, descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto, dividindo-a em um número adequado de partes iguais e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares a esse diâmetro, cortando-o nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com o vértice W do enxerto por meio de retas geratrizes.

A partir do vértice V traçam-se retas que passem pelos pontos de divisão a, b, c , etc., e que cortem o diâmetro do cone nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc.

Em seguida, descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro externo do cone de vértice V e marcando o centro em V_1 (projeção horizontal de V), descrevem-se arcos que partam dos pontos b_2, c_2 , etc., determinando sobre o eixo vertical (parte inferior) os pontos b_3, c_3 , etc., que se unem com o ponto Y por meio de retas que cortam a semicircunferência anterior nos pontos b_4, c_4 , etc. A partir destes pontos traçam-se perpendiculares ao diâmetro do cone de vértice V , determinando os pontos b_5, c_5 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes, determinando sobre as geratrizes da mesma origem do enxerto os pontos de intersecção b_6, c_6 , etc., que unidos com os pontos a_6 e c_6 por meio de uma curva contínua, levam a obter a linha de intersecção de ambos os cones.

Desde os pontos a_6, b_6 , etc. traçam-se perpendiculares aos eixos dos respectivos cones, determinando sobre uma paralela à geratriz extrema do enxerto os pontos de intersecção a_7, b_7, c_7 , etc., e

sobre a geratriz extrema do outro cone, os pontos a_8, b_8, c_8 , etc. (Determina-se o ponto W_1 projetando sobre a paralela anterior o vértice W).

Desenvolvimento do orifício (fig. 2). Marcando o centro no ponto V , descreve-se um arco que parta do ponto Q e sobre este arco transportam-se os comprimentos dos arcos a_4b_4, b_4c_4 , etc. da semicircunferência da base do cone de vértice V (fig. 1), determinando assim novos pontos que também chamaremos a_4, b_4 , etc. (fig. 2), que se unem com o ponto V por meio de retas. Marcando o centro em V , descrevem-se arcos que partam dos pontos a_8, b_8 , etc. (fig. 1), determinando sobre as retas anteriores da mesma origem (fig. 2) os pontos de intersecção a'_6, b'_6 , etc., que se unirão ordenadamente por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido o orifício que serve de gabarito para marcá-lo sobre o cone de vértice V depois de ser curvado.

Desenvolvimento do enxerto. Traça-se a reta W'_1P (fig. 3) com os respectivos pontos a_7, b_7 , etc., igual à reta W_1P da figura 1 com os pontos a_7, b_7 , etc. Marcando o centro em W'_1 , descreve-se um arco que parte de P e se transporta sobre o arco o comprimento da circunferência média da base do enxerto ($2\pi \times R_m$). Este arco, neste caso, é dividido em oito partes iguais, determinando assim os pontos de divisão a'_1, b'_1 , etc., que se unem com o ponto W'_1 , a partir do qual se descrevem arcos que partam dos pontos a_7, b_7 , etc., determinando sobre suas correspondentes geratrizes desenvolvidas os pontos de intersecção a'_5, b'_5 que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento.

Nota. Se quisermos marcar o orifício antes de curvar o cone, a operação será feita como se ilustra nas figuras 1-bis e 3-bis do exercício 123.

[illegible][illegible]

Figura 1

Figura 2

Linhas horizontais dos planos secantes

Charneira dos planos secantes

Figura 1

Figura 2

Linhas horizontais dos planos secantes

Charneira dos planos secantes

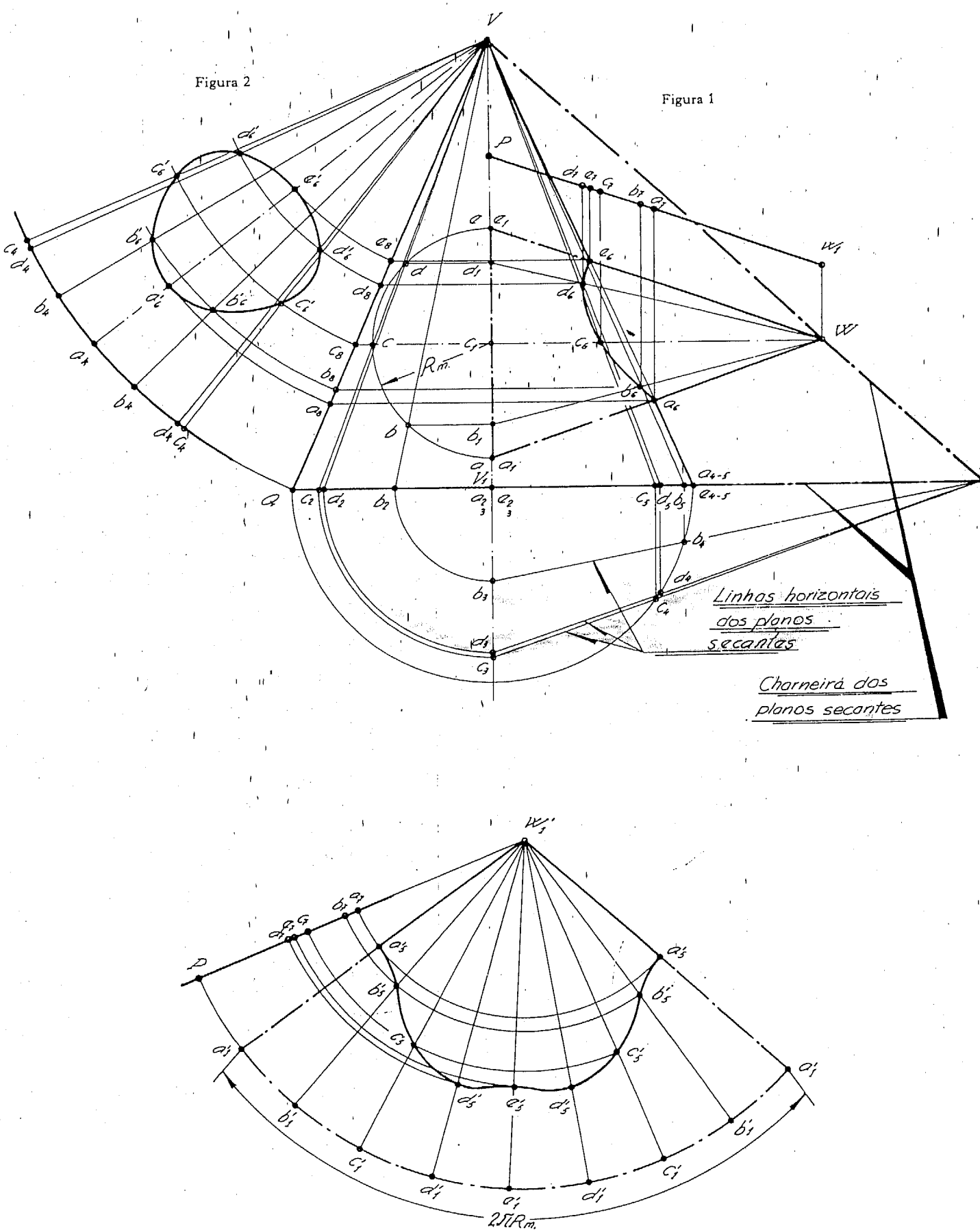


Figura 1

Figura 2

Linhas horizontais dos planos secantes

Charneira dos planos secantes

25Rm

Intersecção de dois cones, cujos eixos são perpendiculares e situados em planos paralelos

Na projeção vertical (fig. 1) representa-se o enxerto por sua fibra média e o cone de vértice V por sua fibra externa. Na projeção horizontal (fig. 2) representa-se a semicircunferência externa do cone de vértice V e sua projeção V_2 . Também representou-se o eixo do cone de vértice W e sua projeção W_1 .

Os vértices V e W (fig. 1) são unidos por meio de uma reta (chamada *charneira*), determinando sobre o prolongamento da base o ponto de intersecção Y .

Este ponto é projetado perpendicularmente ao prolongamento da base até cortar no ponto Y (fig. 2) a reta que passa pelos pontos V_2 e W_1 (*charneira* vista em planta).

A figura 3 representa uma vista do cone de vértice V da figura 1, conforme a flecha; também se representa a circunferência média de centro O do enxerto.

Esta circunferência é dividida em certo número de partes iguais (oito, por exemplo) e pelos pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se retas que partem do vértice V_1 e cortam o diâmetro da base do cone nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. As distâncias d_2c_2, c_2e_2, e_2b_2 , etc., da figura 3 são transportadas sobre o eixo vertical da figura 2, determinando assim os pontos d'_2, c'_2, e'_2 , etc., que se unem com o ponto Y_1 por meio de retas que cortam a semicircunferência externa do cone nos pontos d_3, c_3, e_3 , etc. Estes pontos são projetados perpendicularmente à base do cone de vértice V (fig. 1), determinando os pontos a_4, b_4, c_4 , etc. (só se colocou a letra no ponto a_4 por falta de espaço); estes pontos são unidos com o vértice V por meio de retas geratrizes.

Depois descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1) que, neste caso, é dividida em oito partes iguais e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro do enxerto, cortando-o nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., que unidos com o vértice W

por meio de retas geratrizes, determina-se pela intersecção com as geratrizes da mesma origem do cone os pontos a_5, b_5, c_5 , etc., pertencentes à linha de intersecção de ambos os cones (estes pontos se unem por meio de uma curva contínua).

Os pontos a_5, b_5, c_5 , etc., e o vértice W são projetados perpendicularmente ao eixo do enxerto, determinando sobre uma paralela à geratriz extrema deste os pontos de intersecção a_6, b_6, c_6 , etc. e W_2 . Também se projetam estes pontos perpendicularmente ao eixo do cone de vértice V até cortar a sua geratriz extrema nos pontos a_7, b_7, c_7 , etc.

Desenvolvimento do orifício (fig. 4). Marcando o centro no ponto V , descreve-se um arco que parte de Q e se traça o eixo do cone, cortando o arco no ponto M .

A partir do ponto M e à esquerda, transportam-se sobre o arco os comprimentos Mg_3, Mh_3, Mf_3 , etc., da figura 2, tomados em arco, determinando assim novos pontos que também chamaremos g_3, h_3, f_3 , etc., que se unem com o ponto V por meio de retas. Marcando o centro em V , descrevem-se os arcos que partem dos pontos a_7, b_7 , etc., determinando sobre as retas correspondentes os pontos a'_5, b'_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento do orifício, servindo de gabarito para marcá-lo sobre o cone de vértice V depois de ser curvado.

Desenvolvimento do enxerto (fig. 5). Primeiramente desenvolve-se o enxerto como se fosse um cone inteiro, dividindo-se em oito partes iguais; depois transportam-se sobre suas correspondentes geratrizes as distâncias W_2a_6, W_2b_6 , etc., da paralela à geratriz extrema do enxerto da figura 1, determinando assim os pontos a'_5, b'_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

Nota. Se quisermos marcar o orifício antes de curvar o cone, a operação será feita assim como se ilustra nas figuras 1-bis e 3-bis do exercício 123.

Figura 4

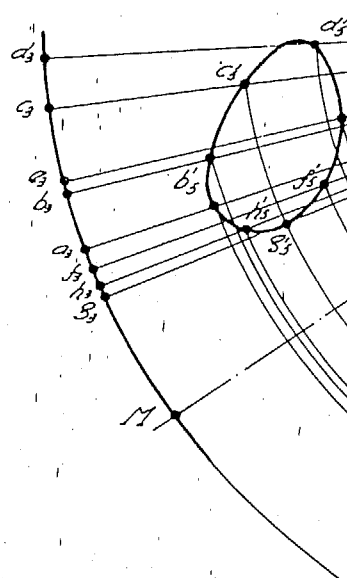


Figura 1

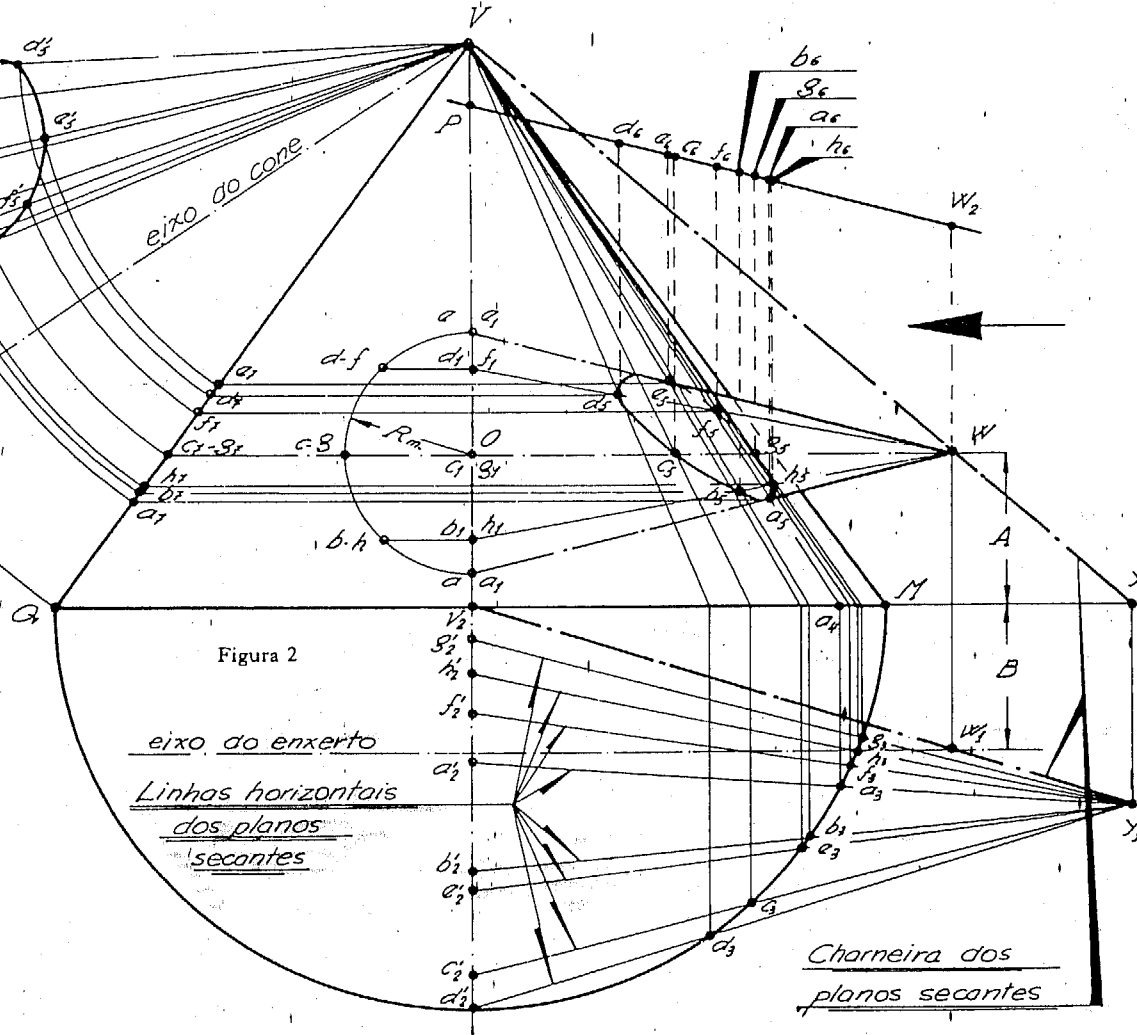


Figura 2

eixo do enxerto
Linha horizontal
dos planos
secantes

Charneira dos
planos secantes

Vista por flecha

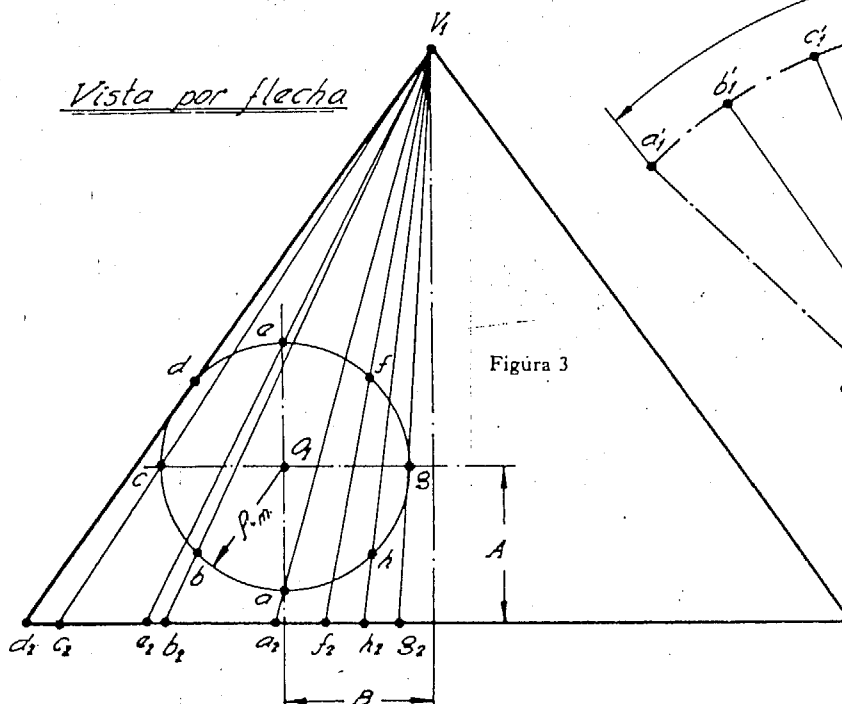


Figura 3

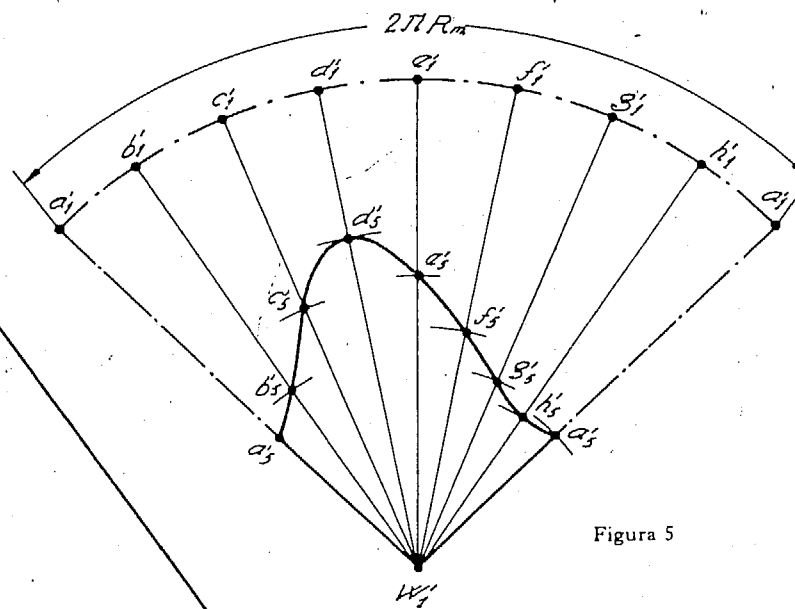


Figura 5

Intersecção de dois cones, cujos eixos são inclinados entre si e contidos em um mesmo plano

A representação do enxerto foi feita por sua fibra média e a representação do cone de vértice V foi feita pela fibra externa. A figura 1 representa a projeção vertical e a figura 2 só representa meia projeção horizontal da base do cone de vértice V e da base do enxerto, já que não é necessário fazer a representação inteira.

Primeiramente unem-se os vértices V e W (fig. 1) por meio de uma reta (*charneira*) que corta a linha de terra $L-T$ no ponto Y . Pelos vértices V_1 e W_1 (fig. 2), vista em planta, traça-se uma reta (*charneira* vista em planta) e desde o ponto Y , traça-se uma perpendicular à $L-T$, cortando a reta anterior no ponto Y_1 .

Representação da linha de intersecção. Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1), dividindo-a em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro do enxerto, determinando os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com o vértice W por meio de retas geratrizes.

A partir dos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., traçam-se perpendiculares indefinidas à $L-T$, cortando o eixo horizontal da figura 2 nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. Desde estes pontos transportam-se as respectivas ordenadas bb_1, cc_1 , etc., da figura 1, determinando assim os pontos b_3, c_3 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua (linha imaginária), determinariam meia vista em planta da base do enxerto.

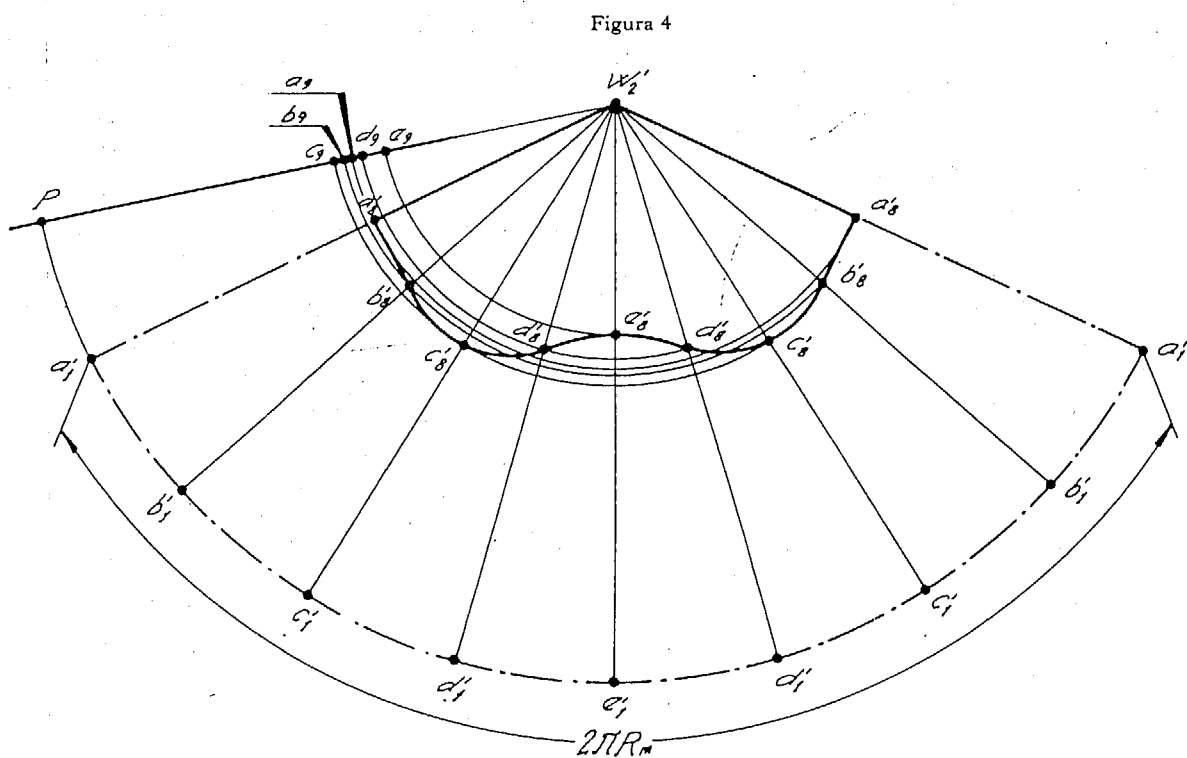
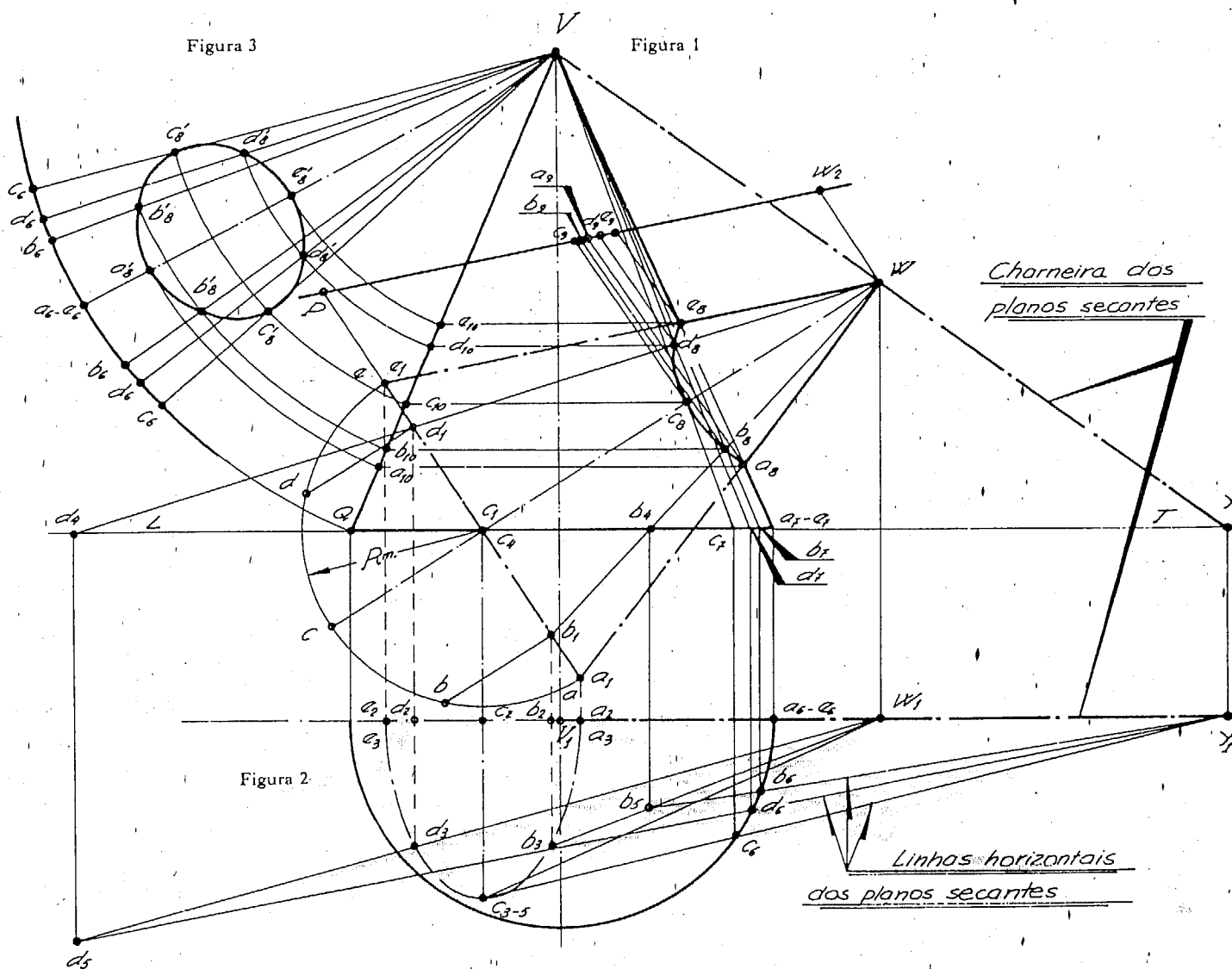
A geratriz Wd_1 prolongada determina sobre a linha de terra $L-T$ o ponto d_4 e sobre a geratriz

Wb_1 o ponto b_4 . Estes pontos são projetados perpendicularmente à $L-T$, determinando sobre as retas que passam pelos pontos W_1b_3 e W_1d_3 os pontos de intersecção b_5 e d_5 (fig. 2). Os pontos a_3, b_5, c_5, d_5 e e_3 são unidos com o ponto Y_1 por meio de retas, (estas retas são as linhas horizontais dos planos secantes que passam pelas geratrizes de divisão do enxerto) que cortam a semicircunferência externa do cone de vértice V nos pontos a_6, b_6, c_6 , etc. Desde estes pontos traçam-se perpendiculares ao diâmetro do cone de vértice V (fig. 1), determinando os pontos de intersecção a_7, b_7, c_7 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes que cortam as da mesma origem do enxerto nos pontos a_8, b_8, c_8 , etc. Estes pontos são unidos por meio de uma curva contínua, ficando assim representada a linha de intersecção de ambos os cones.

Desde os pontos a_8, b_8, c_8 , etc., traçam-se perpendiculares ao eixo do enxerto, de forma que cortem uma paralela à geratriz extrema do enxerto nos pontos a_9, b_9, c_9 , etc.; também se projeta o diâmetro e o vértice W , determinando assim os respectivos pontos P e W_2 . Também desde os pontos a_8, b_8, c_8 , etc., se traçam perpendiculares ao eixo do cone de vértice V até cortarem a sua geratriz extrema nos pontos a_{10}, b_{10}, c_{10} , etc.

O desenvolvimento do orifício (fig. 3) para marcá-lo sobre o cone de vértice V depois de ser curvado e o desenvolvimento do enxerto (fig. 4) são feitos de forma análoga à dos casos anteriores.

Nota. Se quisermos marcar o orifício antes de curvar o cone, a operação será feita assim como se ilustra nas figuras 1-bis e 3-bis do exercício 123.



e à mesma altura

A linha de intersecção, o desenvolvimento do

Nota! Se os eixos de ambos os cones não estiverem em um mesmo plano, as linhas horizontais que passam pelos pontos b_5 , c_5 e d_5 também serão paralelas à sua correspondente *charneira*.



278

EXERCÍCIO

130

Intersecção de dois cones, cujos eixos são inclinados e se encontram em planos paralelos

Neste caso, como nos anteriores, o enxerto foi representado por sua fibra média e o cone de vértice V , por sua fibra externa.

Charneira. A projeção vertical (fig. 1) da charneira pode ser achada unindo os vértices V e W de ambos os cones por meio de uma reta que corta a $L-T$ no ponto Y .

A projeção horizontal (fig. 2) dessa charneira é determinada unindo os vértices V_1 e W_1 por meio de uma reta e projetando-a no ponto Y da figura 1, determinando assim o ponto Y_1 .

A linha de intersecção de ambos os cones, o desenvolvimento dos mesmos e o desenvolvimento do orifício são feitos da mesma maneira como se explicou no exercício 126.

Figura 1

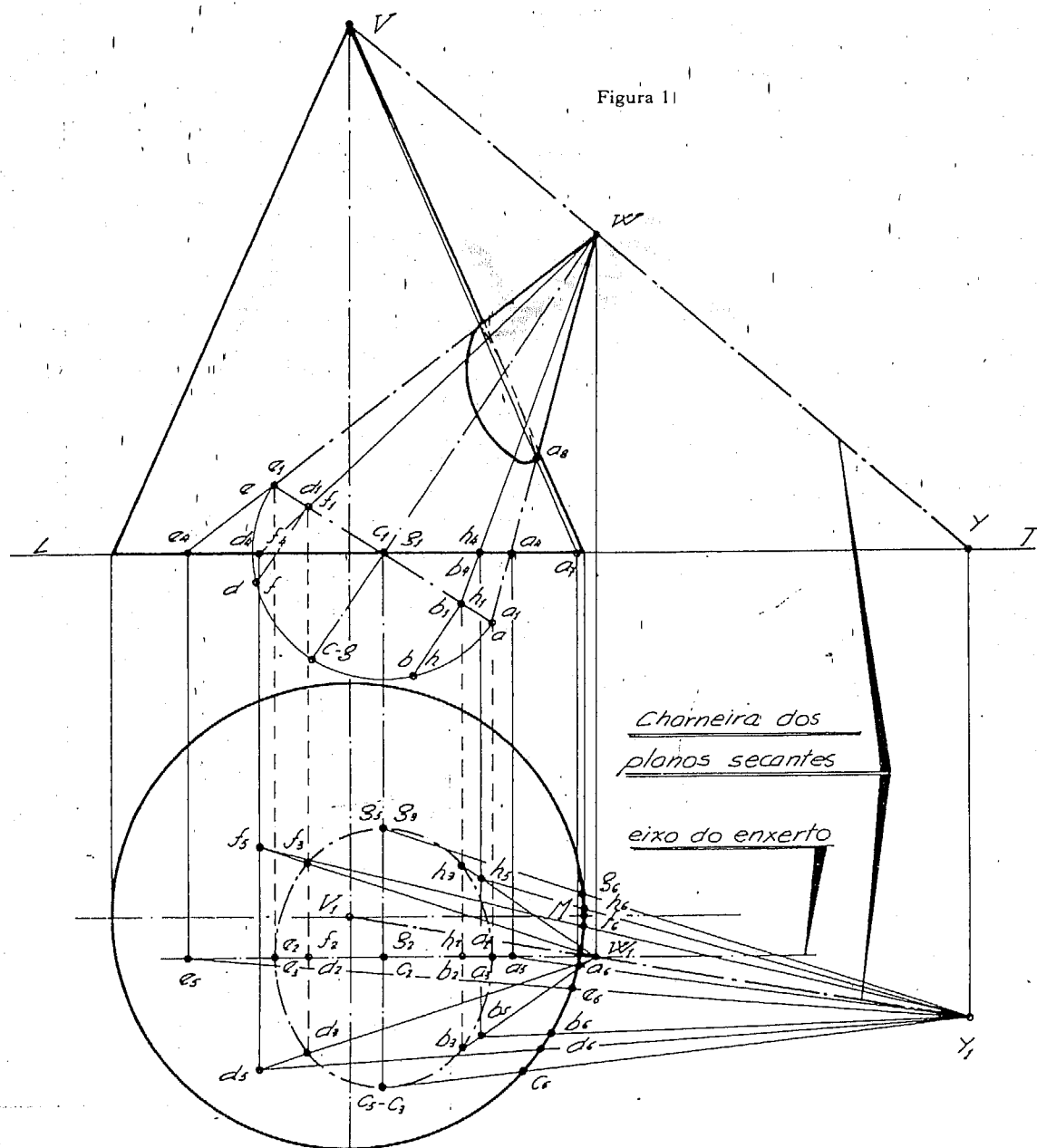


Figura 2

Intersecções cônicas (outro método)

Na "Geometria descritiva" na parte que trata de intersecções de cilindros com cones e cones entre si (figs. 113, 114, 115, 116 e 117), explicou-se claramente este novo método pelo qual queremos determinar a curva de intersecção de ambos os cones sem necessidade de construir a elipse diretriz do enxerto.

Representação da curva de intersecção. Traça-se uma reta pelo diâmetro do enxerto (fig. 1) até cortar a charneira (a charneira é a reta $X-Y$ que passa pelos vértices V e W de ambos os cones) no ponto X e a linha de terra $L-T$ no ponto N . Marcando o centro em N , descrevem-se arcos que partam do ponto O e do ponto X , determinando sobre a linha de terra $L-T$ os pontos O_1 e X_1 , respectivamente. A partir destes pontos, traçam-se perpendiculares à linha de terra $L-T$ até cortar o prolongamento da charneira vista em planta (a charneira vista em planta é a reta V_1-Y_1) nos pontos O_2 e X_2 (fig. 3).

Marcando o centro em O_2 , descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao diâmetro médio do enxerto, dividindo-a em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde X_2 traçam-se retas que passem pelos pontos de divisão a, b, c , etc., até cortar a perpendicular à $L-T$ de o ponto N nos pontos $a_1 - b_1 - c_1$, etc., que se unem com o ponto Y_1 da figura 2, determinando sobre a circunferência externa da base do cone de vértice V_1 os pontos a_2, b_2, c_2 , etc. A partir destes pontos, traçam-se perpendiculares ao diâmetro do cone de vértice V da figura 1, determinando os pontos a_3, b_3, c_3 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes.

Em seguida, descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1) que neste caso é dividida em quatro partes iguais. Desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se per-

pendiculares ao diâmetro até cortar os pontos a_4, b_4, c_4 , etc., que se unem com o vértice W por meio de retas geratrizes até cortar as da mesma origem do cone de vértice V nos pontos a_5, b_5, c_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim representada a curva de intersecção de ambos os cones.

Caso o eixo do cone de vértice W não seja paralelo ao plano de projeção vertical, como acontece nas figuras 4 e 5, recorre-se a uma mudança de plano, assim como se vê nas figuras 5 e 6, podendo já determinar-se a curva de intersecção, tal como foi feito anteriormente.

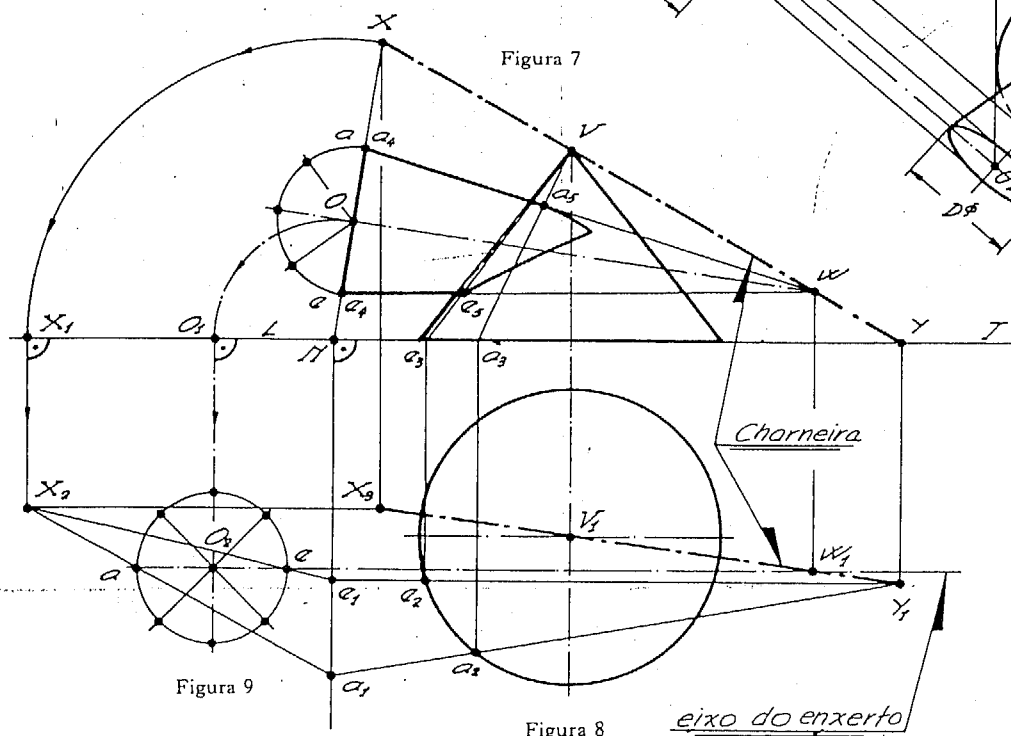
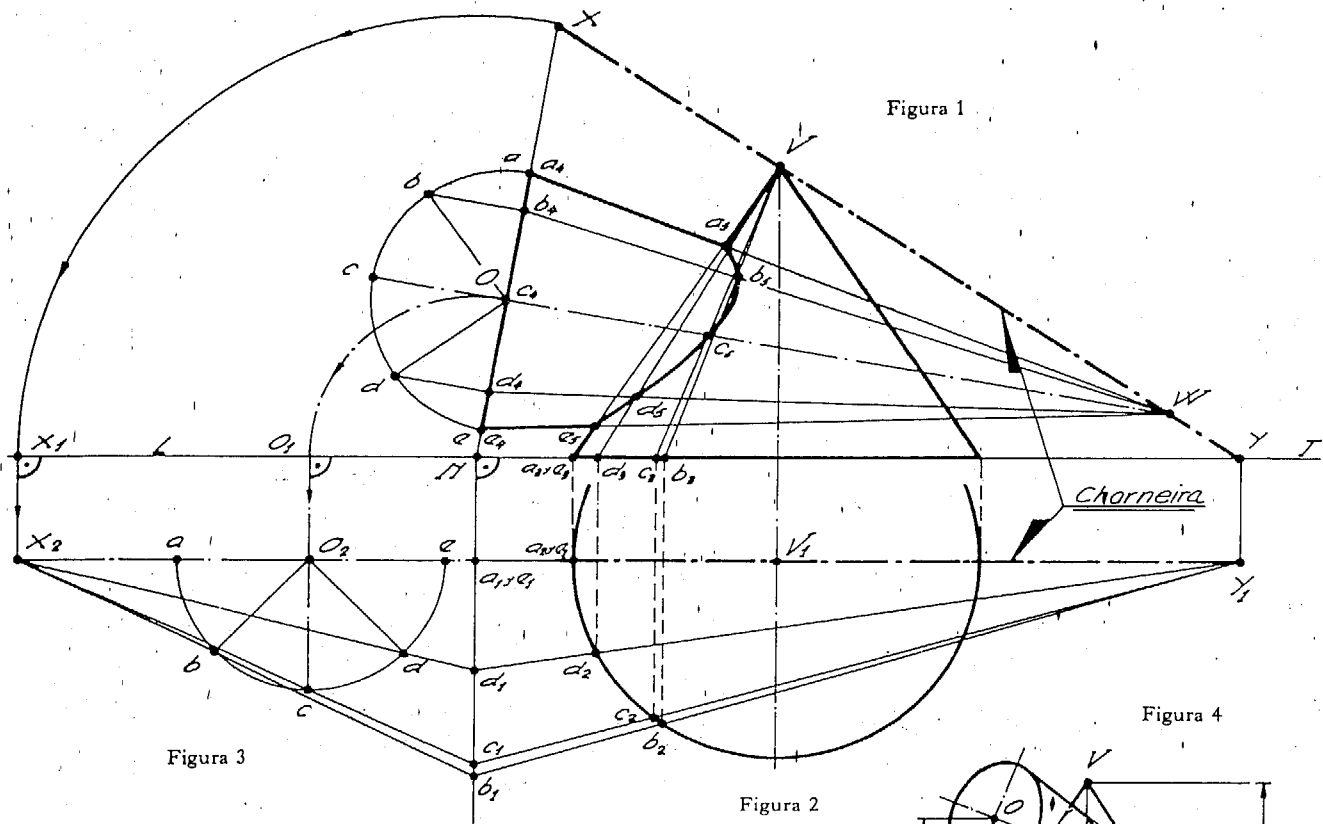
Também pode acontecer que os eixos de ambos os cones não estejam em um mesmo plano, como os que estão representados nas figuras 7 e 8. A representação da charneira X_3-Y_1 (fig. 8), vista em planta, pode ser achada unindo os vértices V_1 e W_1 de ambos os cones, vistos em planta, e projetando os pontos X e Y da figura 7 perpendicularmente à $L-T$ até cortar a reta que passa por V_1 e W_1 nos pontos X_3 e Y_1 , respectivamente.

O ponto X_2 (fig. 9) pode ser achado projetando o ponto X_3 sobre a projetante de X_1 até cortá-la no ponto X_2 .

O ponto O_2 foi achado traçando uma perpendicular à $L-T$ desde o ponto O_1 até cortar o eixo do enxerto visto em planta.

A curva de intersecção de ambos os cones pode ser achada como se explicou no princípio. (Neste caso representou-se a curva de intersecção e dois dos pontos a_5 e e_5 que serviram para determiná-la).

Nota. Uma das formas mais práticas de representar os cones é representando o enxerto por sua fibra média e o outro cone pela fibra externa. O desenvolvimento do orifício e do enxerto pode ser feito de forma análoga aos casos anteriores).



INTERSECÇÕES DE CILINDROS EM CONES

EXERCÍCIO

132

Intersecção de um cilindro sobre um cone, sendo seus eixos paralelos

As projeções vertical (fig. 1) e horizontal (fig. 2) foram representadas pela fibra média do cilindro e pela fibra externa do cone.

Representação da linha de intersecção. Secciona-se o cilindro e o cone por meio de planos secantes, que passam pelas geratrizes de divisão do cilindro, sendo a linha de intersecção destes planos a linha que passa pelo eixo do cone e que chamaremos de *charneira*, já que podemos imaginar que em vez de vários planos seccionarem ambos os corpos, só um é que girará em redor dessa *charneira* até adotar a posição das geratrizes de divisão do cilindro.

A circunferência média do enxerto visto em planta (fig. 2), é dividida em um número adequado de partes iguais (oito, por exemplo) e pelos pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se retas que partem de V_1 , cortando a circunferência externa do cone nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc. (estas retas são as linhas horizontais dos planos secantes $P-I, P-II$, etc.).

Em seguida, traçam-se perpendiculares à base do cone desde os pontos a_1, b_1, c_1 , etc., determinando os pontos de intersecção a_2, b_2, c_2 , etc. (fig. 1), que se unem com o vértice V por meio de retas geratrizes (estas geratrizes são as que determinam os planos secantes $P-I, P-II$, etc.).

Desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se paralelas ao eixo vertical do cilindro, determinando sobre seu diâmetro (fig. 1), os pontos de intersecção a_3, b_3, c_3 , etc., ficando assim representadas as geratrizes do cilindro que cortam as geratrizes da mesma origem do cone nos pontos a_4, b_4, c_4 , etc. Estes pontos são unidos por meio de uma régua flexível, representando-se assim a linha de intersecção do cilindro e do cone.

Desenvolvimento do orifício. Os pontos a_4, b_4, c_4 , etc. (fig. 1) são projetados perpendicularmente ao eixo do cone até cortar a sua geratriz extrema nos pontos a_5, b_5, c_5 , etc.

Marcando o centro em V' (fig. 3), descreve-se um arco indefinido de raio igual à distância VP da figura 1 e sobre este arco, transportam-se os comprimentos dos arcos e_1d_1, d_1c_1 , etc., da figura 2, formando-se novos pontos sobre o arco que

também chamaremos e_1, d_1 , etc., a partir dos quais se traçam retas até uni-las com o ponto V' , ficando assim representadas sobre o desenvolvimento as geratrizes do cone.

A partir de V' , transportam-se sobre as geratrizes da mesma origem as distâncias Va_5, Vb_5 , etc., da figura 1, determinando os pontos a'_4, b'_4 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento do orifício que servirá de gabarito para marcá-lo sobre o cone depois de ser curvado.

Desenvolvimento do enxerto (fig. 4). Em uma posição adequada, traça-se uma reta de comprimento igual ao da circunferência média do enxerto ($\pi \times d_m^2$) e se divide em oito partes iguais neste caso. Desde os pontos de divisão a'_3, b'_3, c'_3 , etc., traçam-se perpendiculares à reta anterior de comprimentos iguais aos das geratrizes a_3a_4, b_3b_4, c_3c_4 , etc., da figura 1, determinando assim os pontos a'_4, b'_4, c'_4 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

Também se pode representar a linha de intersecção do cilindro e do cone seccionado estes por meio de planos secantes que sejam perpendiculares a ambos os eixos.

Primeiramente representam-se as seções circulares que formam os planos sobre o cone (fig. 2-bis), passando estas pelos pontos de divisão da circunferência média do enxerto. Depois projetam-se os pontos a_2, b_2, c_2 , etc., perpendicularmente à $L-T$, determinando sobre a geratriz extrema do cone os pontos a_3, b_3, c_3 , etc., a partir dos quais passam os planos secantes $P-I, P-II$, etc., que cortam as geratrizes do enxerto em a_4, b_4, c_4 , etc.

O desenvolvimento do orifício (fig. 3-bis) e do enxerto (fig. 4-bis) é feito de forma análoga à do caso anterior. Os comprimentos dos arcos $b'_4b'_4, c'_4c'_4$, etc., da figura 3 bis são iguais aos dos respectivos arcos bb, cc , etc. da figura 2-bis.

Para simples verificação, ver em "Geometria descritiva" o capítulo correspondente a intersecções de cilindros em cones.

Nota. Se quisermos marcar o orifício antes de curvar o cone, a operação será feita assim como se ilustra nas figuras 1-bis e 3-bis do exercício 123.

Intersecção de um cilindro sobre um cone, cujos eixos são perpendiculares e contidos em um mesmo plano

A representação do cilindro foi feita por sua fibra média e a do cone, por sua fibra externa.

Nas respectivas figuras 1 e 2 representam-se as projeções vertical e horizontal da intersecção de ambos os corpos.

Determinação da linha de intersecção. Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1), dividindo-a em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto, determinando sobre seu diâmetro os pontos a_1, b_1, c_1 , etc., e sobre a geratriz extrema do cone os pontos de intersecção a_2, b_2, c_2 , etc. (estas paralelas são as geratrizes do enxerto e ao mesmo tempo os planos secantes que passam por estas geratrizes).

Em seguida, projetam-se os pontos a_2, b_2, c_2 , etc. paralelamente ao eixo do cone até cortar o eixo horizontal do mesmo (fig. 2) nos pontos a_3, b_3, c_3 , etc., a partir dos quais se traçam circunferências de centro comum V_1 .

Sobre o diâmetro médio do enxerto, visto em planta (fig. 2), descreve-se uma semicircunferência que neste caso é dividida em quatro partes iguais e desde os pontos de divisão a , b , c , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto até cortar as circunferências anteriores da mesma origem nos pontos a_4 , b_4 , c_4 , etc., pertencentes à linha de intersecção da projecção

horizontal. A partir destes pontos, traçam-se paralelas ao eixo vertical do cone até cortar as geratrizes da mesma origem do enxerto (fig. 1) nos pontos a_5 , b_5 , c_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, sendo esta a linha de intersecção de ambos os corpos.

Desenvolvimento do orifício. Marcando o centro no ponto V' (fig. 3), descreve-se um arco indefinido de raio igual ao comprimento da geratriz VP da figura 1 e sobre este arco transportam-se os comprimentos dos arcos a_5b_5 , b_5d_5 , etc., da figura 2, determinando assim novos pontos que também chamaremos a_6 , b_6 , etc., que se unem com o ponto V' . (Os pontos a_6 , b_6 da figura 2 foram achados unindo os pontos a_4 , b_4 , etc., com o ponto V_1).

A partir de V' , transportam-se sobre as retas $V'a_6$, $V'b_6$, etc., as respectivas distâncias Va_2 , Vb_2 , etc. da figura 1, determinando os pontos a'_6 , b'_6 , etc. que se unem por meio de uma curva contínua.

O desenvolvimento do enxerto é feito de forma análoga à dos exercícios anteriores.

Nota. Verificar o capítulo de intersecções (figs. 98, 99, 100 e 101), da "Geometria descritiva".

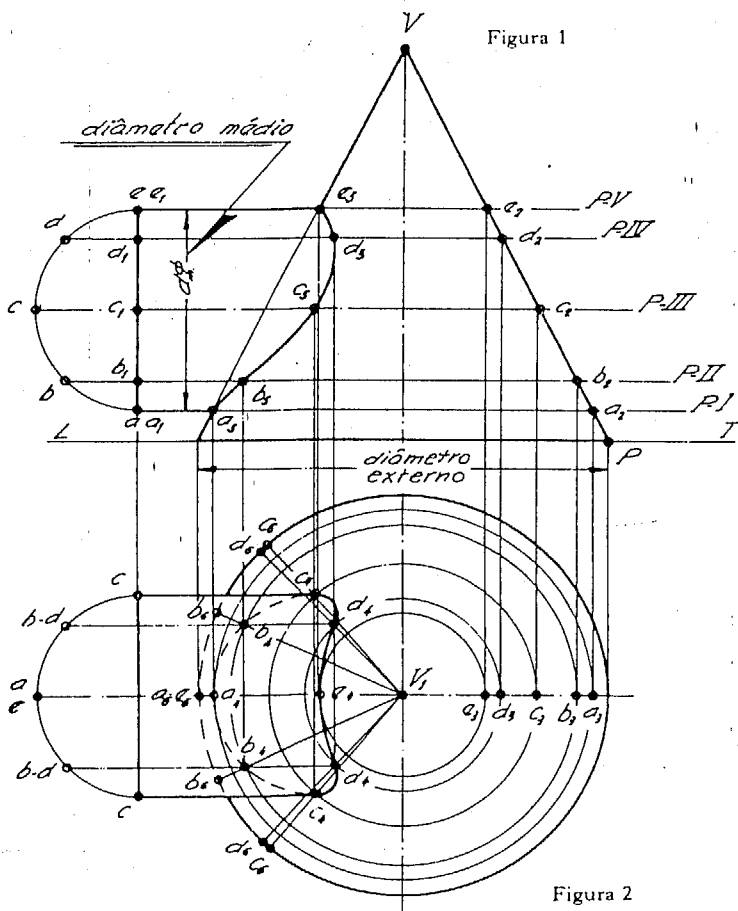


Figura 2

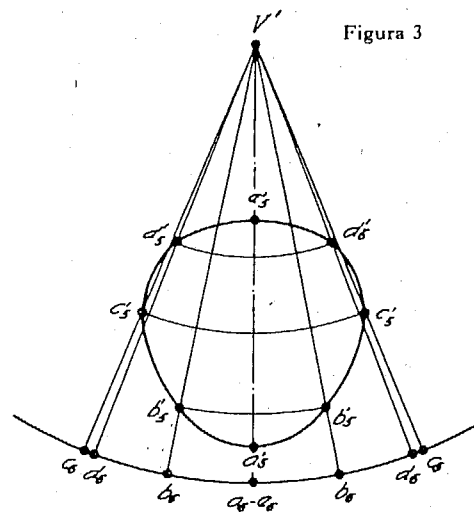


Figura 3

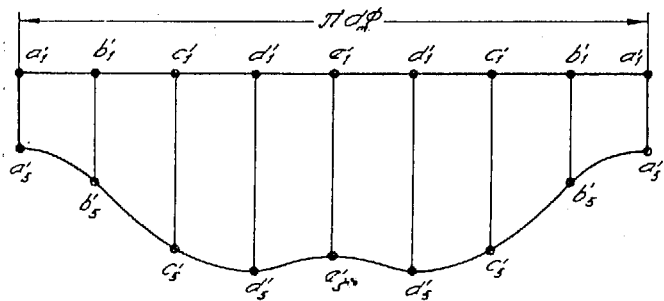


Figura 4

EXERCÍCIO

134

Intersecção de um cilindro sobre um cone, cujos eixos são perpendiculares e contidos em planos paralelos

Esta representação também foi feita como a do caso anterior, sendo o cilindro representado pela fibra média e o cone pela fibra externa.

Na projeção horizontal (fig. 2) vê-se claramente o deslocamento dos eixos do cone e do cilindro.

Também podem ser vistas as seções circulares do cone formadas pelos planos $P-I$, $P-II$, $P-III$, etc. da projeção vertical (fig. 1).

A linha de intersecção, o desenvolvimento do orifício e o desenvolvimento do cone são feitos de forma análoga à do caso anterior.

Figura 1

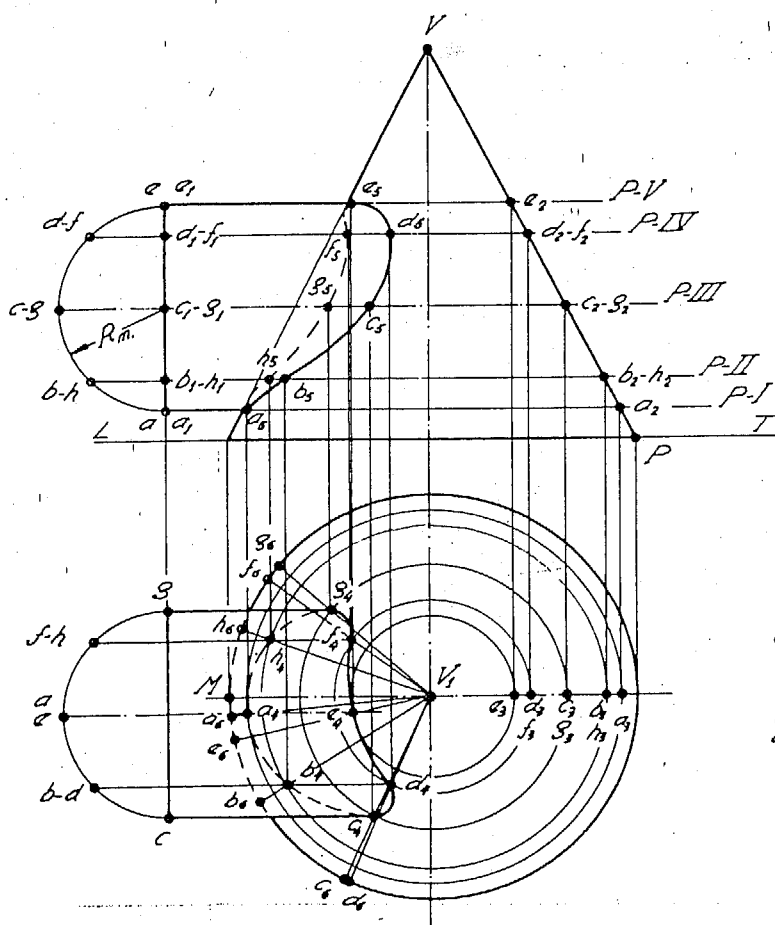


Figura 2

Figura 3

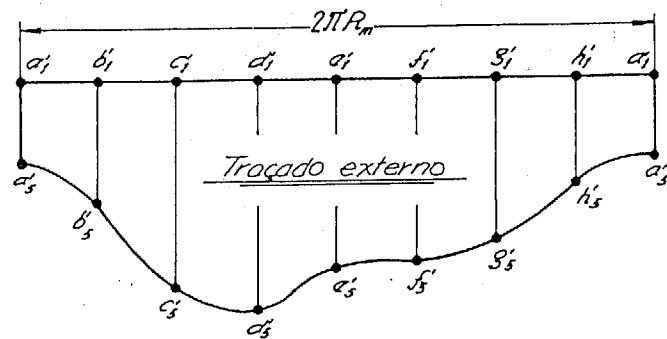
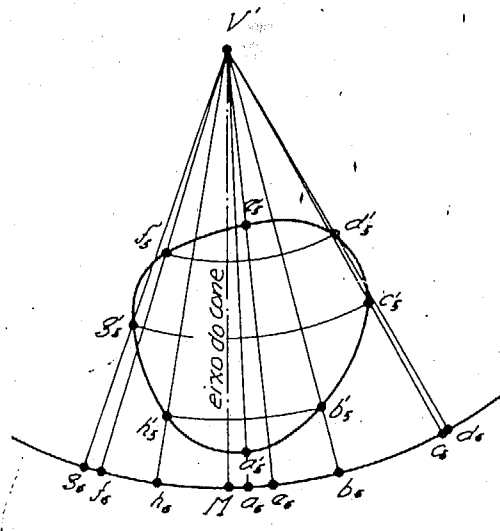


Figura 4

Intersecção de um cilindro sobre o cone, cujos eixos são oblíquos e contidos em um mesmo plano

As projeções vertical (fig. 1) e horizontal (fig. 2) foram feitas pela fibra média do enxerto e pela fibra externa do cone.

O método que vamos empregar para achar a curva de intersecção de ambos os corpos consiste em seccionar estes por meio de vários planos secantes que passam pela geratrizes de divisão do cilindro, passando a linha de intersecção destes planos pelo vértice do cone, sendo ao mesmo tempo paralela às geratrizes do cilindro. A linha de intersecção dos planos secantes será chamada de *charneira*, já que esta pode ser o eixo de um plano secante que gira até adotar as posições das geratrizes de divisão do cilindro (ver em "Geometria descritiva" as figuras 108, 109, 110 e 112).

Representação da curva de intersecção. Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1), dividindo-a em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto, determinando sobre seu diâmetro os pontos a_1, b_1, c_1 , etc., e sobre a linha de terra $L-T$ os pontos a_2, b_2, c_2 , etc.

Em um ponto qualquer O do eixo do enxerto (fig. 2), descreve-se outra semicircunferência de raio R_m igual ao raio médio do enxerto e neste caso a mesma será dividida em quatro partes iguais. Desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto até cortar as projeções dos pontos a_1, b_1, c_1 , etc. e a_2, b_2, c_2 , etc., da figura 1 nos respectivos pontos a_3, b_3, c_3 , etc. e a_4, b_4, c_4 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas, assim como ilustra a figura 2.

Pelo vértice V (fig. 1) traça-se uma reta (*charneira* que seja paralela às geratrizes do cilindro e corte a linha de terra no ponto Y , a partir do qual se traça uma perpendicular à $L-T$ até cortar o eixo do enxerto (fig. 2) no ponto Y_1 .

A partir de Y_1 traçam-se retas que passam pelos pontos a_4, b_4, c_4 , etc. (linhas horizontais dos pla-

nos secantes) até cortar a circunferência externa da base do cone nos pontos a_5, b_5, c_5 , etc., que se unem com o ponto V_1 por meio de retas (geratrizes do cone formadas pelos planos secantes) que cortam as geratrizes da mesma origem do enxerto nos pontos a_6, b_6, c_6 , etc., pertencentes à curva de intersecção do cilindro e do cone. Estes pontos são projetados perpendicularmente à $L-T$, determinando sobre as geratrizes da mesma origem do enxerto os pontos a_7, b_7, c_7 , etc. (fig. 1), que se unem por meio de uma curva contínua.

Desenvolvimento do orifício. Os pontos a_7, b_7, c_7 , etc., são projetados perpendicularmente ao eixo do cone, determinando sobre a geratriz extrema os pontos de intersecção a_8, b_8, c_8 , etc.

Marcando o centro em V (fig. 1), descreve-se um arco que parta de P e sobre este arco transportam-se os comprimentos dos arcos a_5d_5, d_5c_5 , etc., da figura 2, determinando os pontos que também chamaremos a_5, d_5 , etc., que se unem com o vértice V por meio de retas (geratrizes desenvolvidas). Desde V descrevem-se arcos que partam de a_8, b_8 , etc., até cortar as retas da mesma origem (fig. 3) nos pontos a'_7, b'_7 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido o orifício do cone que, ao mesmo tempo, serve para ser marcado sobre este depois de ser curvado.

Caso queiramos traçar o orifício diretamente sobre o cone e antes de ser curvado, o procedimento será feito como se explica no exercício 123 (figs. 1-bis e 3-bis).

Desenvolvimento do enxerto. Traça-se uma reta (fig. 4) de comprimento igual ao da circunferência média do cilindro que neste caso é dividido em oito partes iguais. Desde os pontos de divisão a'_1, b'_1 , etc., traçam-se perpendiculares à reta e transportam-se sobre estas os comprimentos das respectivas geratrizes a_1a_7, b_1b_7 , etc., da figura 1, determinando assim os pontos a'_7, b'_7 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

*Intersecção de um cilindro sobre um cone,
cujos eixos são oblíquos e contidos em
planos paralelos*

Este exercício pode ser resolvido como o anterior, mas transportando o comprimento do arco e_5M da figura 2 sobre o arco da figura 3, ficando assim traçado o eixo do cone.

A representação horizontal da charneira (fig. 2) sempre será uma paralela à linha de terra $L-T$

que passa pelo ponto V_1 (vértice do cone na projeção horizontal).

Com uma simples inspeção das figuras 1, 2, 3 e 4 e da explicação do exercício anterior, este exercício ficará explicado com toda clareza.

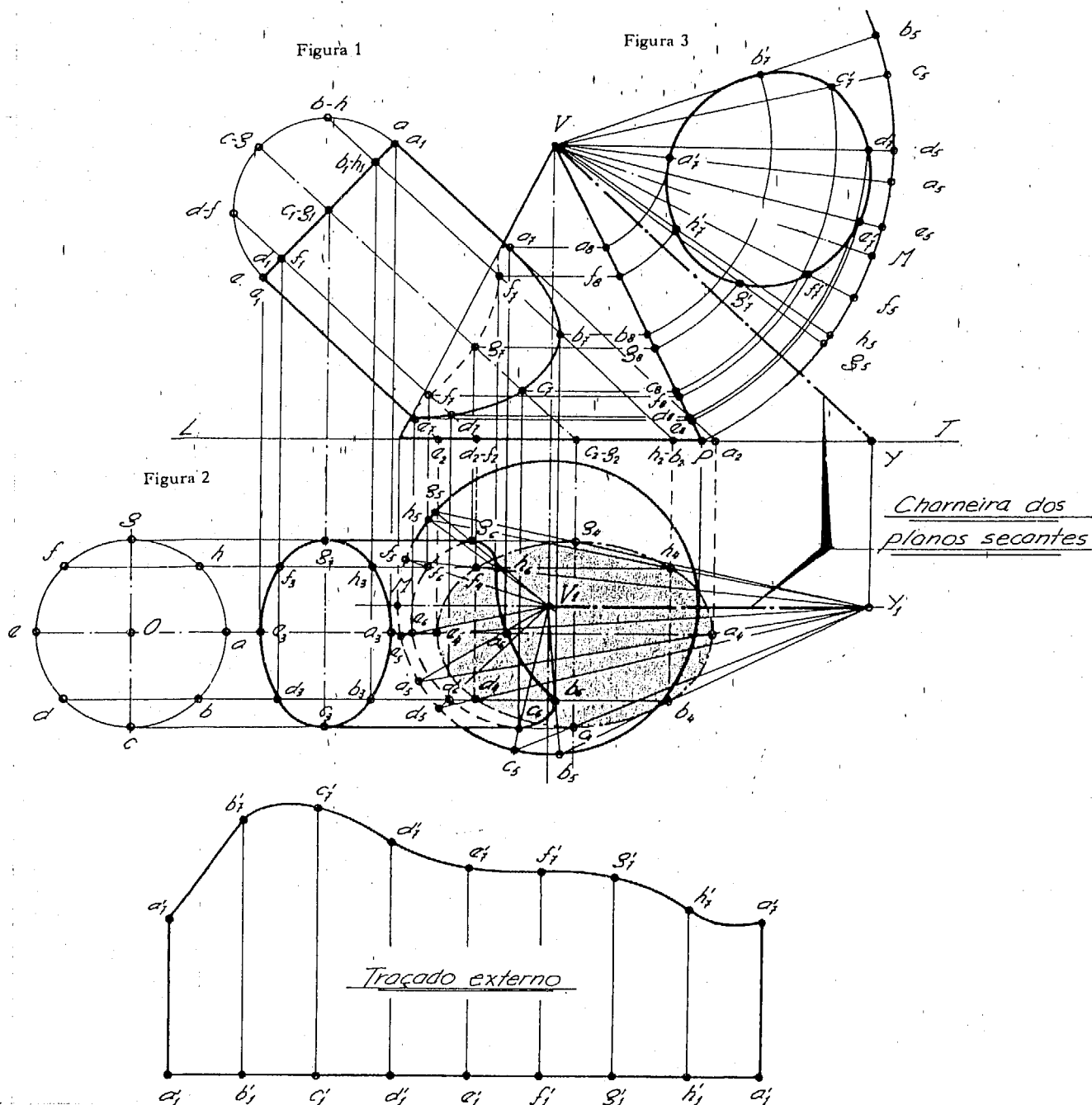


Figura 4

Curva de intersecção de um cilindro e de um cone pelo método das esferas

Este método só é aplicável para achar a curva de intersecção de ambos os corpos quando seus eixos estiverem em um mesmo plano, embora suas posições possam ser quaisquer posições.

Todas as seções que forem feitas para o cilindro ou para o cone por meio de planos secantes perpendiculares aos eixos destes, proporcionarão circunferências. Também proporciona seções circulares qualquer plano secante que corte uma esfera.

Na perspectiva da figura 1 representou-se um cilindro e um cone seccionados por dois planos secantes perpendiculares aos seus respectivos eixos que proporcionam circunferências (estas estão sombreadas) que estão inscritas na esfera de centro O (O é o ponto de intersecção dos eixos do cilindro e do cone).

As duas circunferências anteriores formam por suas intersecções os pontos a_1 que neste caso pertencem à curva de intersecção de ambos os corpos.

A figura 2 dá uma posição correta do cilindro e do cone, cujos eixos estão em um mesmo plano e são paralelos ao plano vertical de projeção. As cir-

cunferência de formação dos planos secantes anteriores são representadas, neste caso, por meio de retas perpendiculares aos seus respectivos eixos, que se cortam no ponto a_1 pertencente à curva de intersecção de ambos os corpos. Como se pode observar, a esfera de centro O passa pelas extremidades dos diâmetros das circunferências anteriores.

A figura 3 representa os mesmos corpos anteriores e desde o ponto de intersecção O de seus eixos descrevem-se arcos de circunferências de raios quaisquer (estes arcos são as esferas mencionadas no princípio), cortando as geratrizes extremas de ambos os corpos nos pontos a e b que se unem entre si por meio de retas que ao mesmo tempo são perpendiculares aos respectivos eixos do cilindro e do cone, determinando-se, pela intersecção destas, os pontos a_1 e b_1 pertencentes à curva de intersecção.

Desta mesma maneira pode-se achar quantos pontos se desejar e estes pontos serão unidos com os pontos de intersecção das geratrizes extremas por meio de uma curva contínua, como se vê na ilustração.

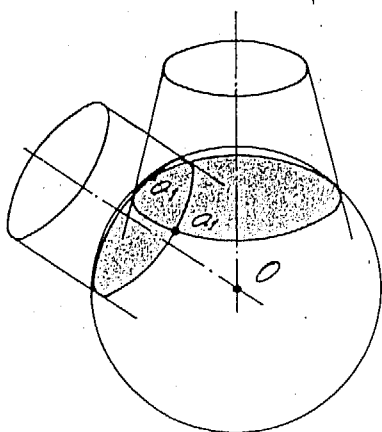


Figura 1

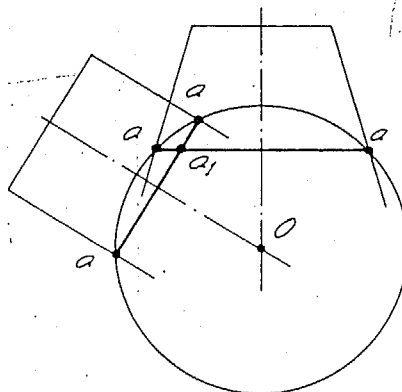


Figura 2

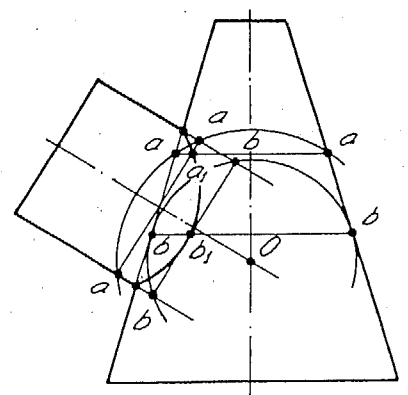


Figura 3

Intersecção de um cilindro oblíquo sobre um cone

A representação do cilindro oblíquo é feita por sua fibra média e a do cone, pela fibra externa. O enxerto é um cilindro oblíquo de bases circulares e paralelas, estando uma delas situada sobre o mesmo plano horizontal de projeção do cone.

Representação da curva de intersecção. Divide-se a semicircunferência diretriz da base do cilindro (fig. 2) em um número adequado de partes iguais (seis partes iguais, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se retas geratrizes paralelas ao eixo do enxerto até cortar a outra semicircunferência nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares à linha de terra $L-T$ determinando sobre o diâmetro médio do cilindro (fig. 1, parte superior) os pontos a_2, b_2, c_2 , etc.

Desde V (fig. 1) traça-se uma reta chamada *charneira* que seja paralela ao eixo do enxerto, determinando sobre a $L-T$ o ponto de intersecção Y .

Pelo ponto V_1 (fig. 2) traça-se uma reta paralela à linha de terra $L-T$ e projeta-se nela o ponto Y , determinando assim o ponto Y_1 , a partir do qual se traçam retas que passam pelos pontos de divisão a, b, c , etc., da semicircunferência diretriz do enxerto até cortar a circunferência externa da base do cone nos pontos a_3, b_3, c_3 , etc., que se unem com o ponto V_1 por meio de retas geratrizes que cortam as da mesma origem do enxerto nos pontos a_4, b_4, c_4 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua, fariam representar assim a curva de intersecção vista em *planta*. Estes pontos são projetados perpendicularmente à $L-T$, determinando sobre as geratrizes da mesma origem do enxerto que passam pelos pontos a_2, b_2, c_2 , etc., os pontos de intersecção a_5, b_5, c_5 , etc. (fig. 1) que se unem por meio de uma curva contínua, sendo esta a curva de intersecção vista em *elevação*.

Seção transversal do enxerto (fig. 1). Em uma posição qualquer, traça-se uma perpendicular ao eixo do enxerto, determinando sobre suas geratrizes os pontos de intersecção a_6, b_6, c_6 , etc. A partir destes pontos transportam-se sobre as geratrizes correspondentes as distâncias A, B e C da figura 2, determinando assim os pontos a_7, b_7, c_7 , etc., que

unidos por meio de uma curva contínua, fariam determinar assim a seção transversal do enxerto (neste caso só foi representada meia seção).

Desenvolvimento do orifício. Desde os pontos a_5, b_5, c_5 , etc. (fig. 1), traçam-se perpendiculares ao eixo do cone, determinando sobre a geratriz extrema os pontos de intersecção a_8, b_8, c_8 , etc. Em seguida, descreve-se um arco desde V que parta de P e se transporta sobre este arco os comprimentos dos arcos a_3f_3, f_3e_3 , etc., da figura 2, determinando assim novos pontos que também chamaremos a_3, f_3, e_3 , etc., (fig. 3) que se unem com o ponto V por meio de retas. Marcando o centro em V , descrevem-se arcos que partam de a_8, b_8, c_8 , etc., até cortar as correspondentes retas anteriores nos pontos a'_5, b'_5, c'_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido meio orifício (a outra metade é simétrica a esta).

Desenvolvimento do enxerto (fig. 4). Em uma posição adequada, traça-se uma reta de comprimento igual a duas vezes o desenvolvimento da semi-elipse da seção transversal da figura 1 e flexiona-se uma régua flexível até acoplá-la a esta semi-elipse, marcando-a nos pontos a_7, b_7, c_7 , etc., sobre a régua flexível. Transporta-se esta régua sobre a reta anterior (fig. 4), marcando-se os pontos a_7, b_7, c_7 da régua, determinando assim novos pontos que chamaremos a'_6, b'_6, c'_6 , etc., por onde passam retas perpendiculares a essa reta. A partir dos pontos a'_6, b'_6, c'_6 , etc., e para cima, transportam-se sobre as perpendiculares anteriores os comprimentos das respectivas geratrizes a_6a_2, b_6b_2 , etc., da figura 1, determinando os pontos a'_2, b'_2, c'_2 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua. [Esta curva deve ter um comprimento igual a $(\pi \times d_m^2)$].

A partir de a'_6, b'_6, c'_6 , etc. e abaixo da reta, transportam-se os comprimentos das geratrizes a_6a_5, b_6b_5 , etc., da figura 1, determinando desta maneira os pontos a'_5, b'_5, c'_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

Nota. Caso os eixos do enxerto e do cone não estiverem em um mesmo plano, o procedimento será o mesmo deste caso.

[illegible][illegible]

Intersecção de um cilindro sobre um cone sem necessidade de representar a elipse diretriz

Em "Geometria descritiva" na parte que trata de intersecções de cilindros com cones e cones entre si, sem necessidade de desenhar a elipse diretriz (figs. 113, 114, 115, 116 e 117), explica-se claramente este novo método através do qual queremos determinar a curva de intersecção de ambos os corpos sem necessidade de representar a elipse diretriz do enxerto cilíndrico.

Representação da curva de intersecção. Traça-se uma reta pelo diâmetro do enxerto (fig. 1) até cortar a *charneira* no ponto X e a $L-T$ em N (a *charneira* é a reta XY que passa pelo vértice V do cone e é paralela ao eixo do enxerto).

Marcando o centro no ponto N , descrevem-se arcos que partam dos pontos X e O , determinando sobre a linha de terra $L-T$ os respectivos pontos X_1 e O_1 .

A partir destes pontos, traçam-se perpendiculares à $L-T$ até cortar o prolongamento da *charneira*, vista em planta, nos pontos X_2 e O_2 , respectivamente. (A *charneira*, vista em planta, sempre tem que coincidir com o eixo do enxerto, também visto em planta, por estarem os eixos de ambos os corpos em um mesmo plano).

Marcando o centro em O_2 (fig. 3), descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao do enxerto cilíndrico, dividindo-a em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Pelos pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se retas que partam de X_2 até cortar a perpendicular à $L-T$ traçada desde o ponto N nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc., que se unem com o ponto y_1 (fig. 2) por meio de retas que cortam a circunferência externa do cone nos pontos a_2, b_2, c_2 , etc. A partir destes pontos, traçam-se perpendiculares ao diâmetro do cone (figura 1), determinando os pontos a_3, b_3, c_3 , etc., que se unem com seu vértice V por meio de retas geratrizes.

Depois descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio do enxerto (fig. 1) que, neste caso, é dividido em quatro partes iguais. Desde

os pontos de divisão a, b, c , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto até cortar o diâmetro nos pontos a_4, b_4, c_4 , etc., e as geratrizes da mesma origem do cone nos pontos a_5, b_5, c_5 , etc., que unidos por meio de uma curva contínua, fazem representar a curva de intersecção de ambos os corpos.

Desenvolvimento do orifício (fig. 4). Marcando o centro em V , descreve-se um arco que parta de P e se transporta sobre este os comprimentos dos arcos a_2d_2, d_2c_2 , etc., da figura 2, determinando os pontos que também chamaremos a_2, b_2, c_2 , etc., que se unem com o ponto V . Marcando o centro neste ponto, descrevem-se arcos que partam dos pontos a_6, b_6, c_6 , etc., até cortar as suas correspondentes retas nos pontos a'_5, b'_5, c'_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido o orifício que serve de gabarito para marcá-lo sobre o cone depois de ser curvado. (Os pontos a_6, b_6, c_6 , etc., foram determinados traçando perpendiculares ao eixo do cone desde os pontos a_5, b_5, c_5 , etc., até cortar a geratriz extrema do cone).

Desenvolvimento do enxerto (fig. 5). Em uma posição adequada, traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do enxerto e que neste caso divide-se em oito partes iguais. Desde os pontos de divisão a'_4, b'_4, c'_4 , etc., traçam-se perpendiculares a essa reta de comprimentos iguais aos das geratrizes da mesma origem a_4a_5, b_4b_5, c_4c_5 , etc., da figura 1, determinando assim os pontos a'_5, b'_5, c'_5 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento.

Caso os eixos de ambos os corpos não estiverem em um mesmo plano, a curva de intersecção de ambos os corpos poderá ser achada assim como se vê nas ilustrações das figuras 5, 7 e 8. Neste caso, a *charneira* vista em *planta* (fig. 7) não coincide com o eixo do cilindro mas passa pelo vértice V_1 do cone e é paralela à $L-T$.

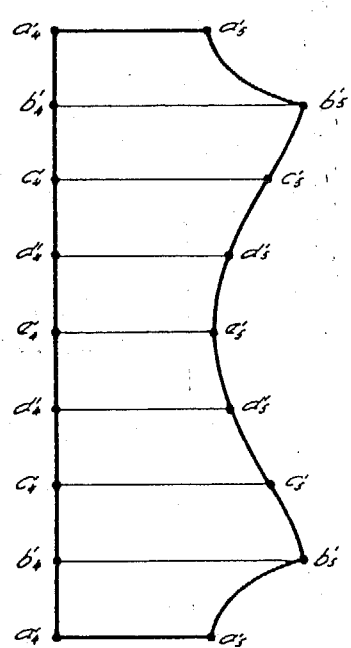
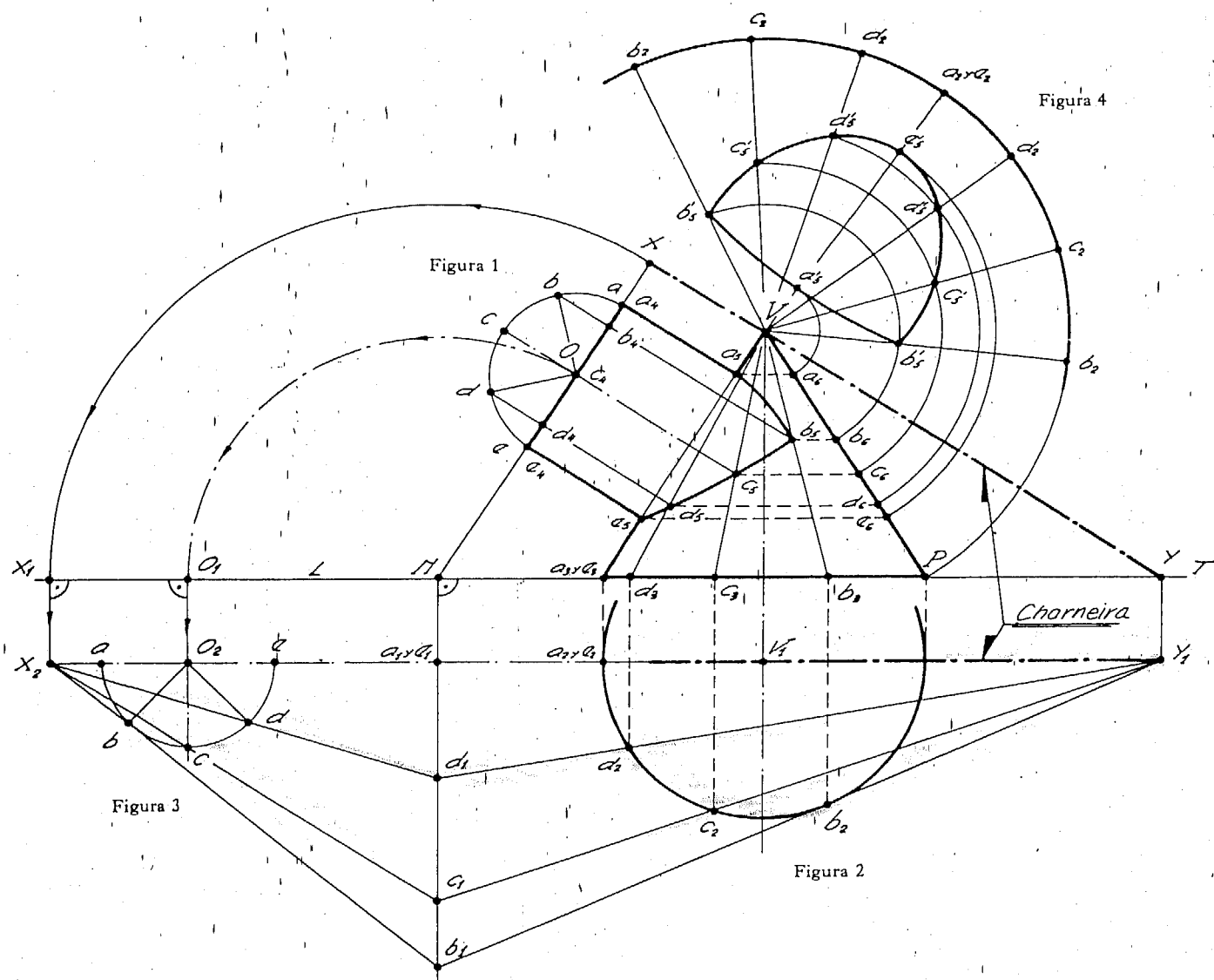


Figura 5

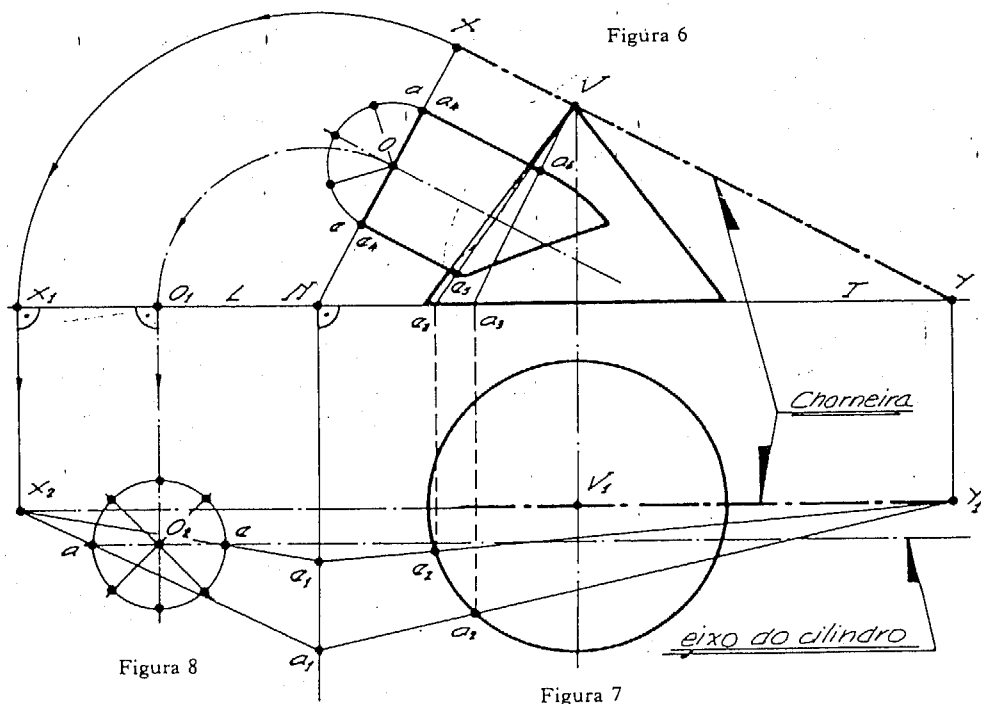


Figura 8

Figura 7

INTERSECÇÕES DE CILINDROS RETOS EM CONES OBLÍQUOS

EXERCÍCIO

140

Intersecção de um cilindro em um cone oblíquo, perpendicularmente à base

O cilindro é representado por sua fibra externa e o cone, pela fibra média.

Sobre a base do cone descreve-se uma semicircunferência equivalente à sua base e outra equivalente à base do enxerto (fig. 1). A semicircunferência do enxerto é dividida em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão a, b , etc., traçam-se paralelas ao eixo do enxerto até cortar em seu diâmetro os pontos a_1, b_1 , etc., formando assim as geratrizes do cilindro.

O vértice V do cone é projetado perpendicularmente ao prolongamento de sua base, formando assim o ponto V_1 , a partir do qual se traçam retas que passam pelos pontos de divisão a, b , etc., e cortam a outra semicircunferência nos pontos a_2, b_2 , etc. Desde estes pontos traçam-se perpendiculares ao diâmetro do cone, determinando os pontos de intersecção a_3, b_3 , etc., que unidos com o vértice V por meio de retas geratrizes, cortarão as geratrizes da mesma origem do enxerto nos pontos a_4, b_4 , etc., pertencentes à curva de intersecção.

Marcando o centro em V_1 , descrevem-se arcos que partam de a_2, b_2, c_2 , etc., determinando sobre o prolongamento da base do cone os pontos a_5, b_5, c_5 , etc., que se unem com o vértice V . A partir dos pontos a_4, b_4, c_4 , etc., traçam-se paralelas à base do cone até cortar as grandezas reais correspondentes nos pontos a_6, b_6, c_6 , etc.

O desenvolvimento do enxerto é feito como se ilustra na figura 2.

Desenvolvimento do cone (fig. 3). Primeiramente desenvolve-se o cone, conforme o procedimento explicado no capítulo de cones oblíquos e depois transportam-se sobre o arco desenvolvido da base as distâncias $e_2'd_2', d_2'c_2'$, etc., iguais aos comprimentos dos arcos e_2d_2, d_2c_2 , etc., da figura 1.

Os pontos e_2', d_2' , etc. são unidos com o ponto V' e marcando o centro neste mesmo ponto, descrevem-se arcos de raios iguais às distâncias Va_6, Vb_6, Vc_6 , etc., da figura 1, determinando assim os pontos a_4', b_4' , etc., que se unem por meio de uma curva contínua que forma o orifício do enxerto.

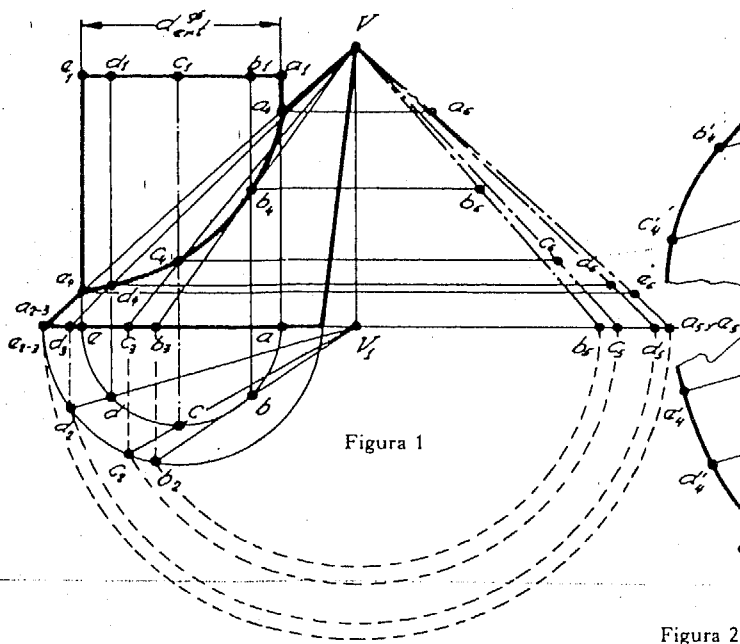


Figura 1

Figura 2

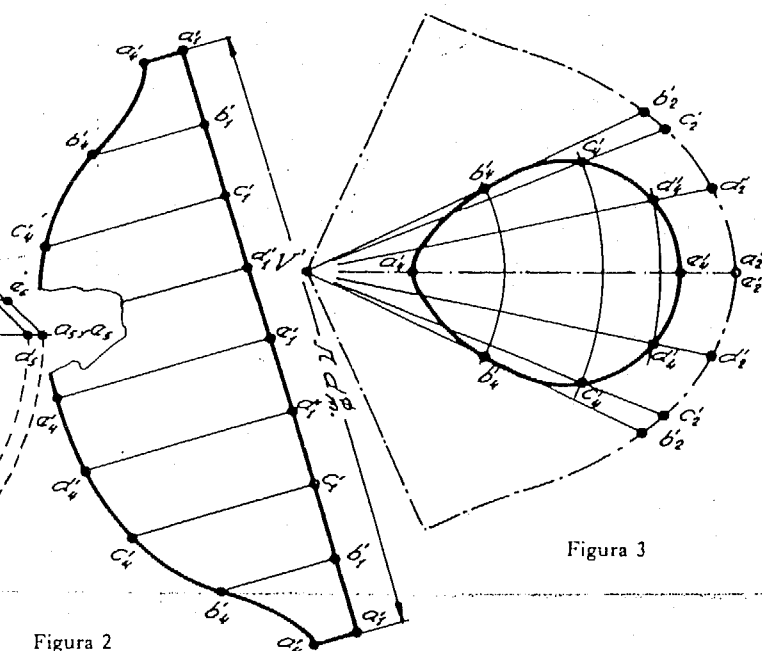


Figura 3

Intersecção de um cilindro em um cone oblíquo, estando o cilindro inclinado com respeito à base do cone

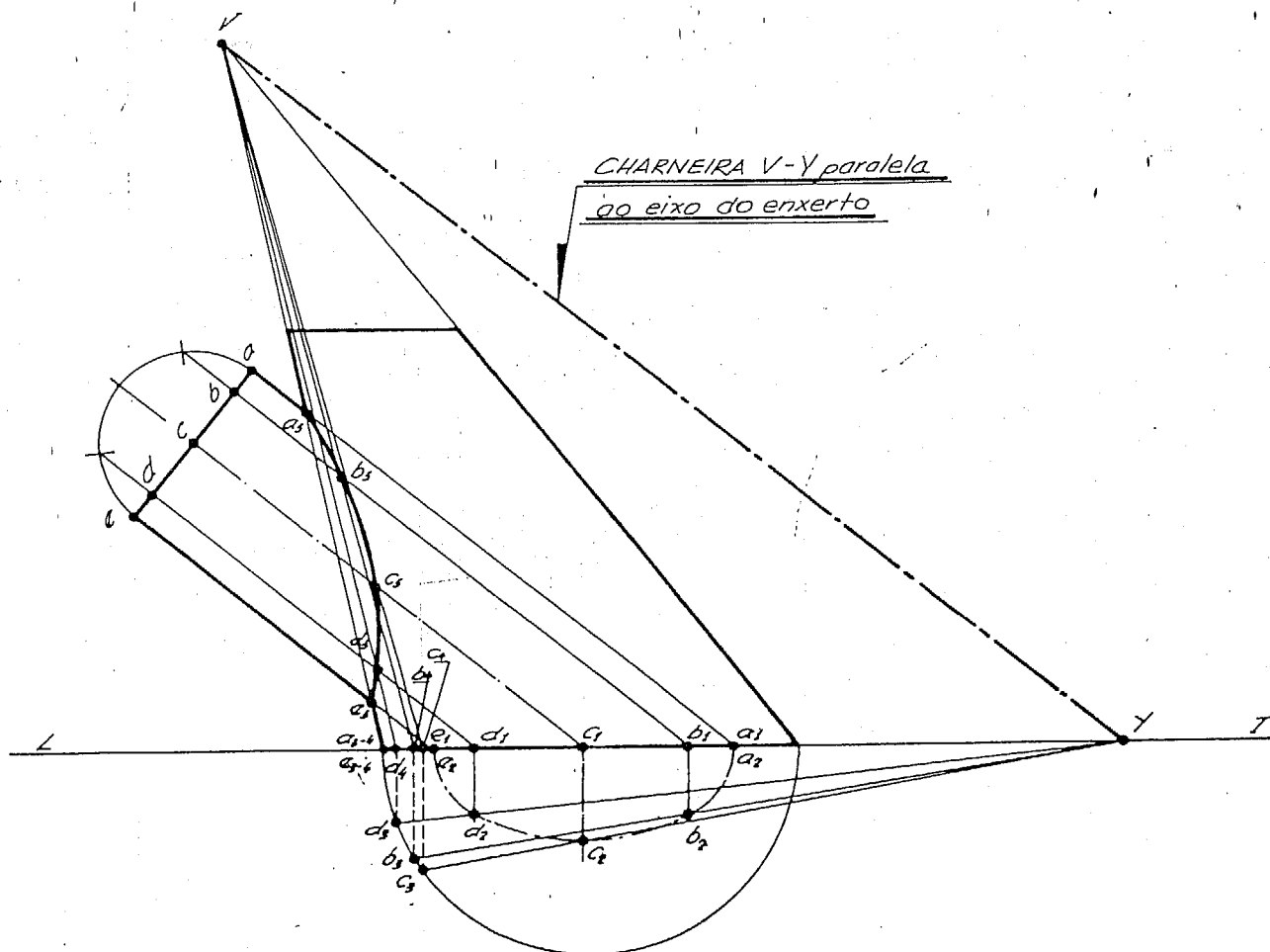
Uma vez representados o cone por sua fibra média e o cilindro pela fibra externa, descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro do enxerto, dividindo-a em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão, traçam-se retas geratrizes do enxerto que cortam o diâmetro deste nos pontos a , b , c , etc., e no diâmetro do cone, em a_1 , b_1 , c_1 , etc.

A partir destes pontos, traçam-se perpendiculares à base do cone dando-lhes as ordenadas correspondentes da semicircunferência anterior, determinando assim os pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

Desde o vértice V traça-se uma reta paralela ao eixo do enxerto, determinando sobre a linha $L-T$ o ponto Y , a partir do qual se traçam retas que passam pelos pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc. e que cortam a semicircunferência da base do cone nos pontos a_3 , b_3 , c_3 , etc.

A partir destes pontos, traçam-se perpendiculares ao diâmetro do cone, cortando-o nos pontos a_4 , b_4 , c_4 , etc., que se unem por meio de retas geratrizes com o vértice V , determinando sobre as geratrizes da mesma origem do enxerto os pontos a_5 , b_5 , c_5 , etc., correspondentes à curva de intersecção.

As grandezas reais do cone e seu desenvolvimento são como do caso anterior.



Intersecção de um cilindro em um cone oblíquo, sendo seu eixo paralelo à base do cone

Neste exercício podem ocorrer dois casos: um, em que o eixo do enxerto seja cortado com o do cone e, em outro, em que os eixos se cruzem mas que não se cortem.

Primeiro caso. Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro externo do enxerto, dividindo-a em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão, traçam-se retas geratrizes paralelas ao eixo do enxerto, determinando sobre o eixo do cone os pontos O , P e Q e sobre a geratriz externa, os pontos L , M e N . (Também a outra geratriz extrema é cortada nos pontos a_2 e e_2 pelas geratrizes extremas do enxerto).

Os pontos O , P , Q e L , M , N são projetados perpendicularmente à base do cone, determinando assim os pontos de intersecção O_1 , P_1 , Q_1 e L_1 , M_1 , N_1 , respectivamente. Marcando o centro nos pontos O_1 , P_1 e Q_1 , descrevem-se arcos que partam de L_1 , M_1 e N_1 , determinando sobre as geratrizes correspondentes os pontos de intersecção b_1 , c_1 e d_1 que se projetam perpendicularmente às geratrizes da mesma origem do enxerto, cortando-se nos pontos b_2 , c_2 e d_2 que unidos com os pontos a_2 e e_2 por meio de uma curva contínua, fariam representar a curva de intersecção do cilindro e do cone.

O vértice V é projetado perpendicularmente ao prolongamento da base do cone, determinando assim o ponto de intersecção V_1 . A partir destes pontos, traçam-se retas que passam pelos pontos b_1 , c_1 e d_1 , cortando a semicircunferência descrita sobre o diâmetro neutro do cone nos pontos b_3 , c_3 e d_3 . Estes pontos e o ponto P são girados em redor do ponto V_1 até cortar o prolongamento da base

do cone nos pontos b_4 , c_4 , d_4 e P_1 . Estes pontos são unidos com o vértice V , determinando sobre os prolongamentos das geratrizes do enxerto os pontos a_5 , b_5 , c_5 , d_5 e e_5 .

Desenvolvimento do cone (fig. 2). Primeiramente traça-se o desenvolvimento do cone e, depois, marca-se nele o eixo $V'P'$. Em ambas as partes de P' , transportam-se sobre o arco desenvolvido da base os arcos $P'b'_3$, $b'_3d'_3$, etc., iguais aos arcos Pb_3 , b_3d_3 , etc. da figura 1. Os pontos b'_3 , d'_3 e c'_3 são unidos com o vértice V' e desde este ponto, descrevem-se arcos de raios iguais às distâncias Va_5 , Vb_5 , Vc_5 , etc., da figura 1, determinando assim os pontos de intersecção a'_2 , b'_2 , c'_2 , d'_2 e e'_2 que se unem por meio de uma curva contínua que limita o desenvolvimento do orifício do enxerto.

Desenvolvimento do enxerto (fig. 3). Traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do cilindro ($2\pi \times R_m$) e se divide em oito partes iguais neste caso. Desde os pontos de divisão a' , b' , c' , etc., traçam-se perpendiculares à reta e dá-se-lhes o comprimento correspondente das geratrizes aa_2 , bb_2 , cc_2 , etc., da figura 1, determinando assim os pontos a'_2 , b'_2 , c'_2 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua.

Segundo caso. Embora neste caso não foram cortados os eixos de ambos os corpos, o desenvolvimento poderá ser feito exatamente como no caso anterior, já que o sistema consiste em passar planos secantes pelas geratrizes de divisão do cilindro e que ao mesmo tempo seccionam o cone formando seções circulares.

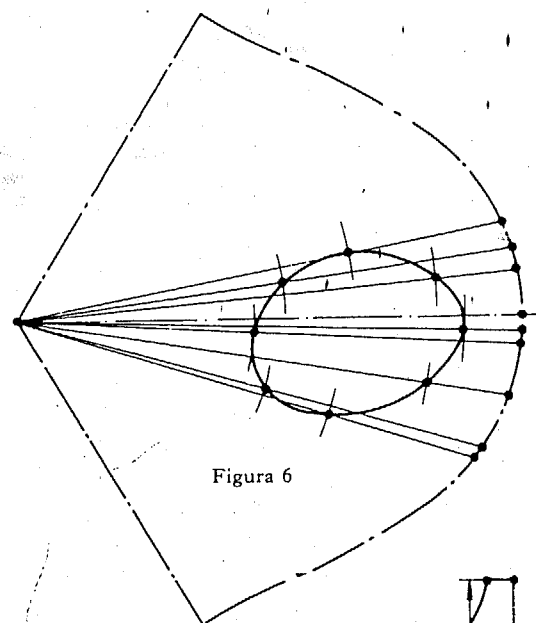
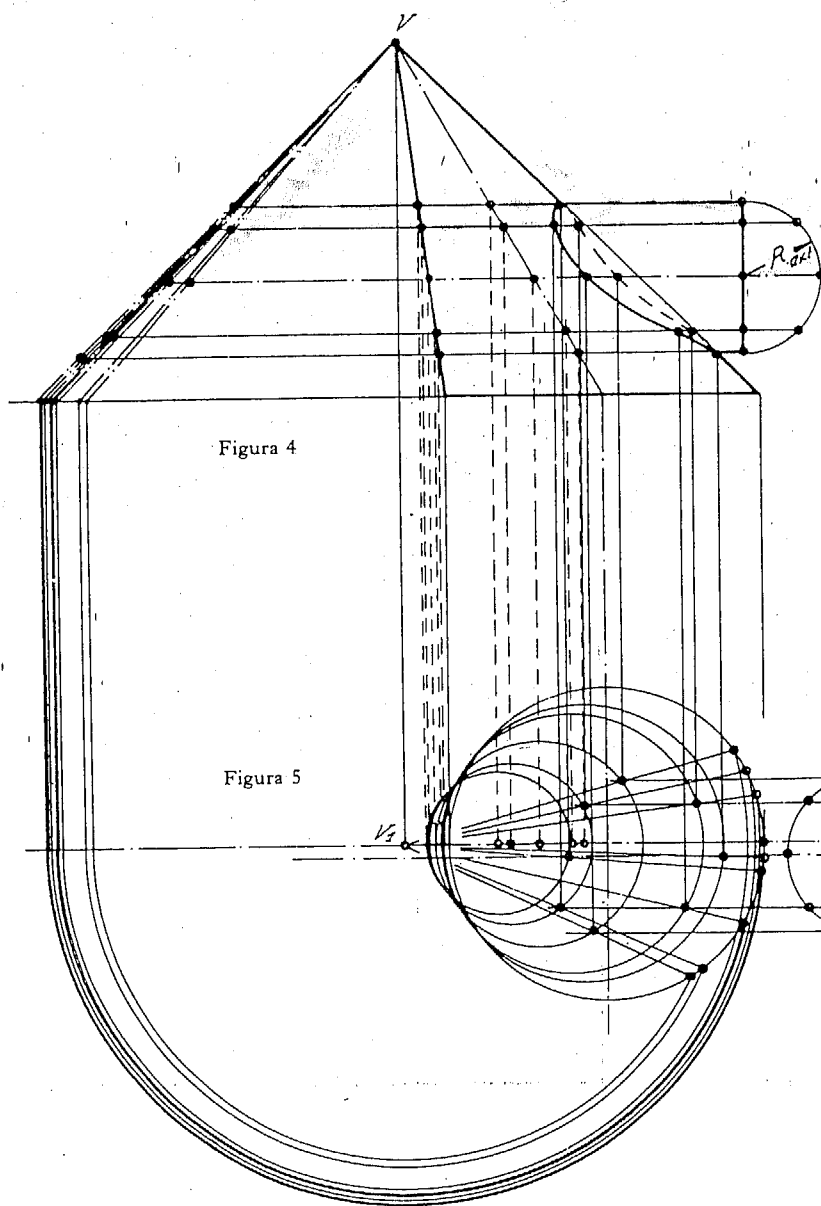
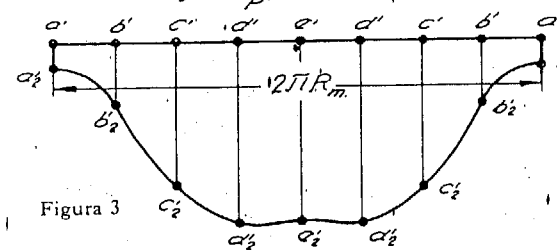
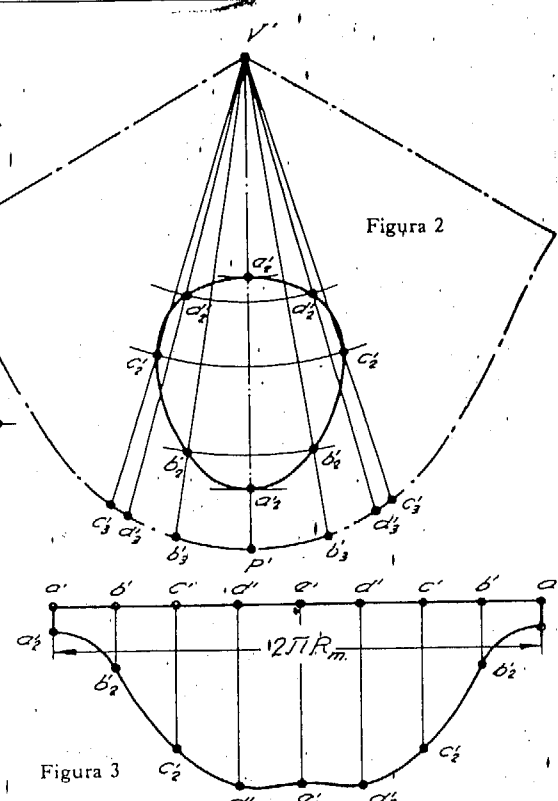
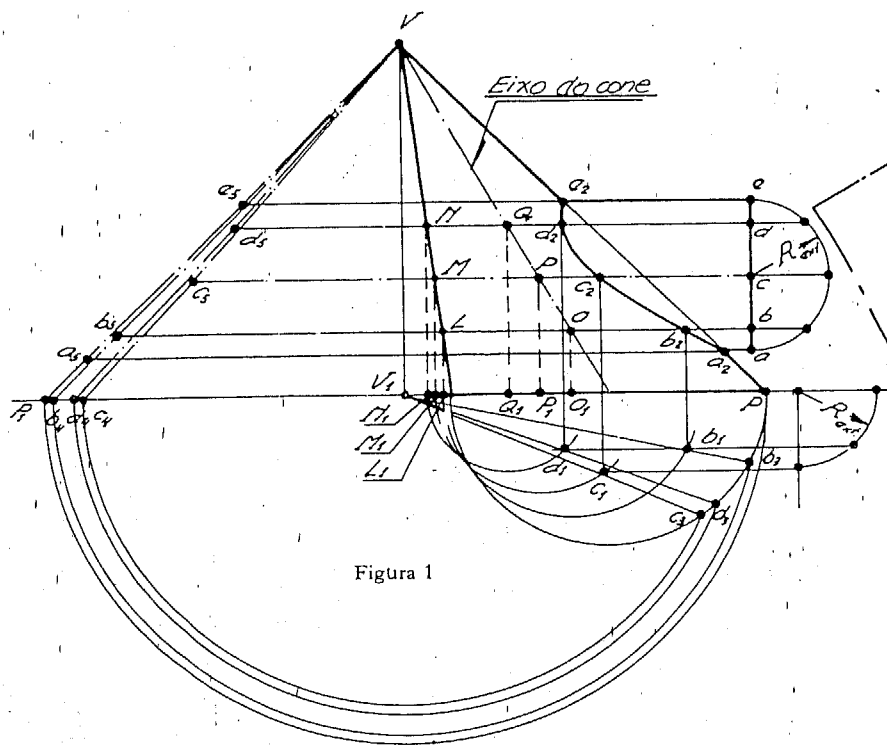
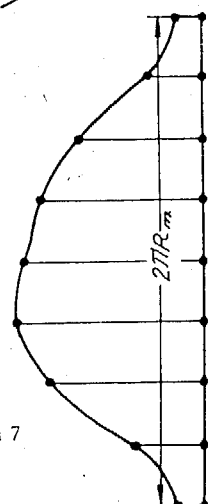


Figura 5



Método das esferas secantes

Pelo método das esferas secantes pode-se determinar a curva de intersecção de uma infinidade de corpos quando os eixos destes estiverem em um mesmo plano, como será explicado nos exemplos a seguir:

Intersecção de um cilindro oblíquo de bocas circulares sobre um cilindro reto (fig. 1). Primeiramente traçam-se paralelas indefinidas à base do cilindro oblíquo até cortar as suas geratrizes extremas como, por exemplo, as paralelas ab e cd . A partir do centro destas paralelas, traçam-se perpendiculares às mesmas até cortar o eixo do cilindro nos pontos O_1 e O_2 . Desde O_1 e O_2 traçam-se arcos que passam, respectivamente, pelos pontos a , b e c , d , determinando sobre as geratrizes extremas do cilindro reto os pontos a_1 , b_1 e c_1 , d_1 . Unem-se os pontos a_1 e b_1 por meio de uma reta que corta a reta ab no ponto de intersecção 1, pertencente à curva de intersecção. Obtém-se o outro ponto 2 unindo os pontos c_1 e d_1 por meio de outra reta que corta a reta cd .

Repetindo esta mesma operação quantas vezes forem necessárias, obteremos os pontos desejados da curva de intersecção.

Intersecção de um cilindro reto sobre outro oblíquo de bocas circulares (fig. 2). Com uma simples observação da ilustração será o suficiente para ver que a curva de intersecção é determinada de forma semelhante à da figura 1.

Intersecção de um cone reto sobre outro oblíquo (fig. 3). Em uma posição qualquer, traça-se uma paralela à base do cone oblíquo até cortar as geratrizes extremas nos pontos a e b . Desde o centro desta reta traça-se uma perpendicular até cortar o eixo do cone reto no ponto O , a partir do qual se descreve uma circunferência que corta as geratrizes extremas do cone reto nos pontos a_1 e b_1 e as geratrizes do cone oblíquo nos pontos c e d

(prolonga-se a geratriz menor se for necessário, como ocorre neste caso).

O ponto a_1 une-se com b_1 por meio de uma reta, determinando sobre a reta ab o ponto de intersecção 1 pertencente à curva de intersecção. Os pontos c e d são unidos por meio de outra reta que corta a reta a_1b_1 no ponto 2, obtendo-se assim outro novo ponto da curva de intersecção. Para obter mais pontos da curva de intersecção, repete-se a mesma operação quantas vezes for preciso.

Intersecção de um cilindro oblíquo de bocas circulares sobre um cone reto (fig. 4). Em qualquer posição, traça-se uma paralela à base do enxerto, cortando-a em a e b . Desde o centro da reta ab , traça-se uma perpendicular à mesma até cortar o eixo do cone no ponto O . A partir deste ponto descreve-se uma circunferência que passa pelos pontos a e b , determinando sobre as geratrizes extremas do cone os pontos a_1 , b_1 , c e d . Os pontos a_1 e b_1 são unidos entre si, assim como os pontos c e d , determinando sobre a reta ab os pontos de intersecção 1 e 2, pertencentes à curva de intersecção.

Repetindo esta operação, obter-se-ão diferentes pontos da curva de intersecção.

Intersecção de um cilindro reto sobre um cone oblíquo de base circular (fig. 5). Traça-se uma reta qualquer paralela à base do cone, cortando as suas geratrizes extremas em a e b . No ponto médio desta reta, traça-se uma perpendicular até cortar o eixo do enxerto no ponto O , a partir do qual se descreve uma circunferência que passa por a e b , determinando sobre as geratrizes extremas do cone os pontos c e d e, sobre as do enxerto, os pontos a_1 e b_1 .

Os pontos a_1 e b_1 são unidos por meio de uma reta que corta a reta ab no ponto 1 pertencente à curva de intersecção. Também os pontos c e d são unidos por meio de outra reta que corta a reta anterior a_1b_1 no ponto 2.

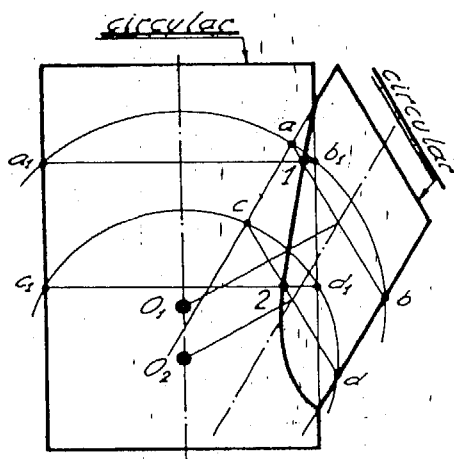


Figura 1

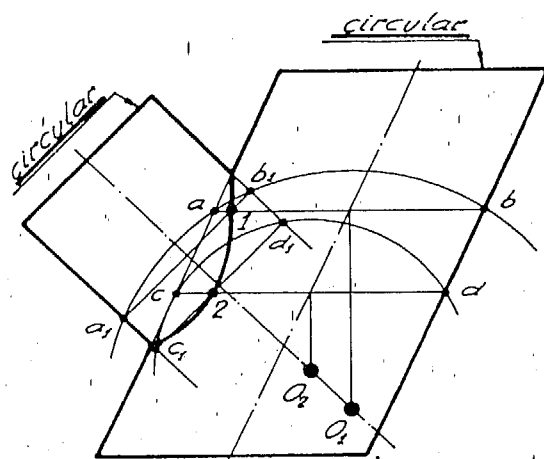


Figura 2

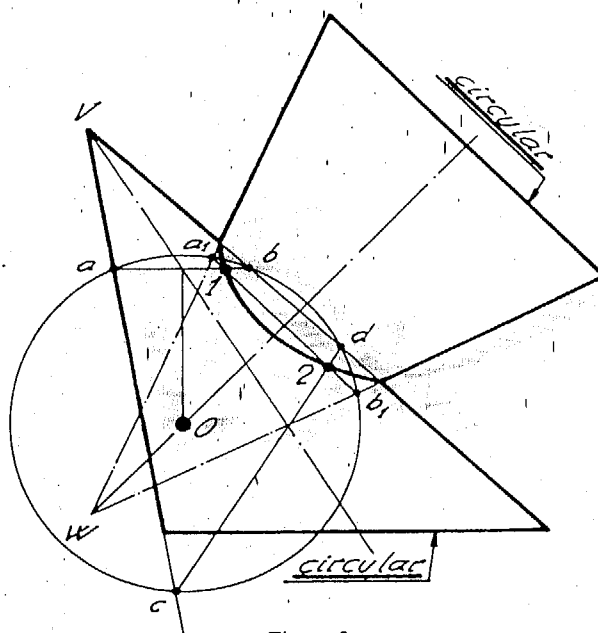


Figura 3

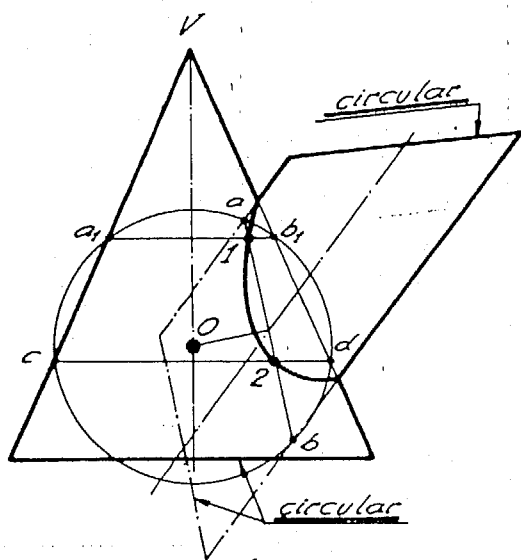


Figura 4

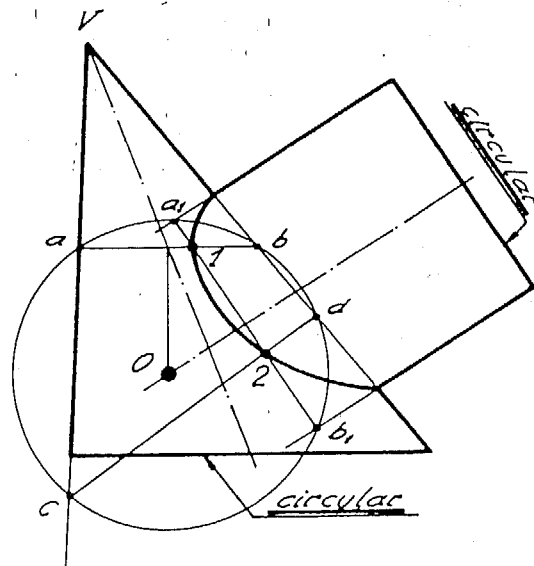


Figura 5

TUBULAÇÃO REBITADA

EXERCÍCIO

144

A rebiteagem de tubulações é um procedimento de junção que praticamente caiu em desuso diante dos diversos procedimentos mais avançados de soldadura.

Neste capítulo daremos vários exemplos de tubulação rebitada.

A figura 1 representa a elevação de três virolas cilíndricas, unidas entre si por meio de rebites.

As figuras 2, 3, 4 e 5 representam as respectivas seções transversais *I*, *II*, *III* e *IV* dessas virolas para que assim se possa observar em que posição deve ficar a pinça *P* externa das uniões longitudinais dessas virolas, pois sempre deverão ficar na posição certa.

O desenvolvimento das virolas *A* e *C* (figs. 6 e 8) é feito exatamente por sua fibra média $\pi \times (D^o + e)$, assim como se pode ver nas ilustrações. A virola *B* também é desenvolvida por sua correspondente fibra média, aumentando-se depois 4 mm no desenvolvimento para facilitar a montagem.

Para que o acoplamento das virolas seja perfeito, forjam-se, em forma de cunhas, duas das extremidades de cada chapa. Estas cunhas estão sombreadas nas chapas desenvolvidas, sendo seu detalhe o exposto na figura 9.

Uma vez cortadas as chapas e forjadas suas correspondentes cunhas, marcam-se as linhas de orifícios paralelamente ao contorno da chapa e à distância *P*; depois marcam-se os orifícios de junção na distância *M*.

As distâncias *P*, *M* e o diâmetro do rebite correspondente a cada espessura de chapa são dadas nas tabelas expostas no fim deste capítulo.

As cunhas forjadas são muito bem esmerilhadas para tirar todos os possíveis golpes que possam ter, até deixá-las bem planas para que, depois de armadas as virolas, não haja perdas pela cunha no momento do teste de vedação, uma vez que este é o lugar onde há mais probabilidades de perdas por ser o ponto mais delicado.

É muito importante que dentro da cunha sejam alcançados no mínimo, três orifícios para que o ajuste seja mais hermético (ver a fig. 9).

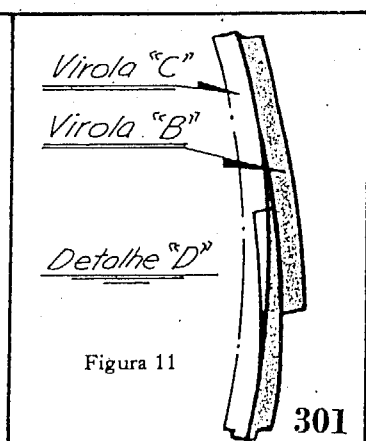
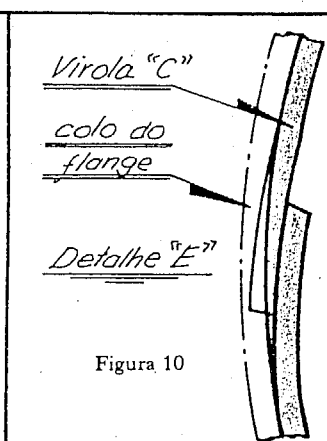
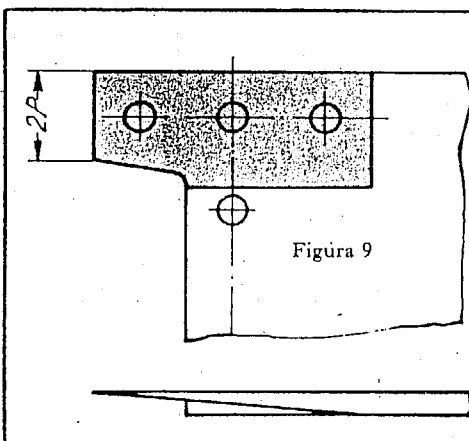
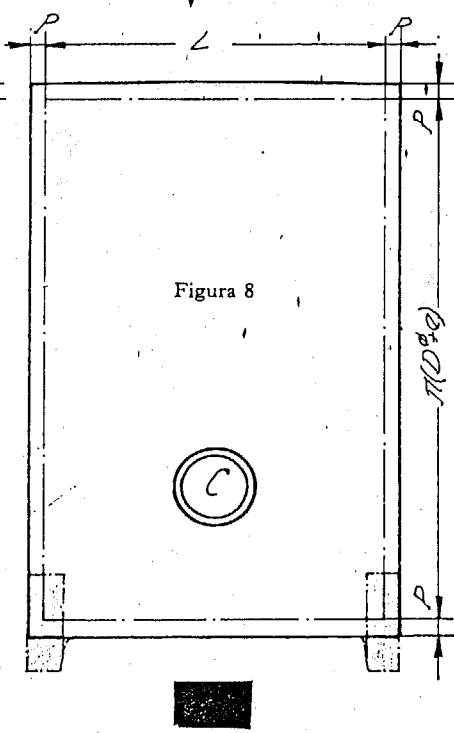
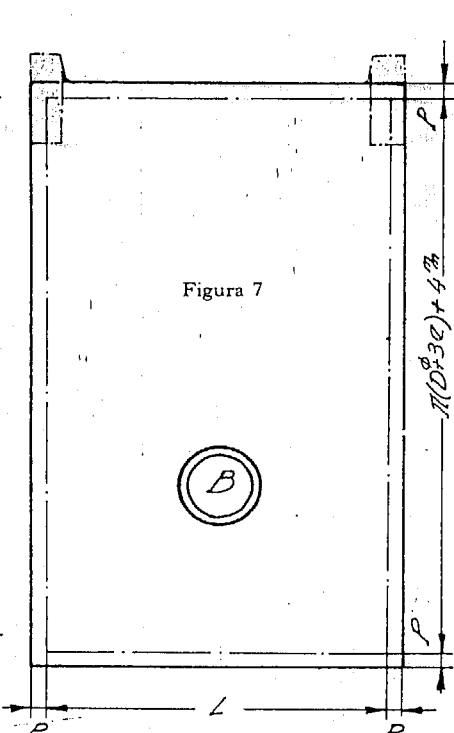
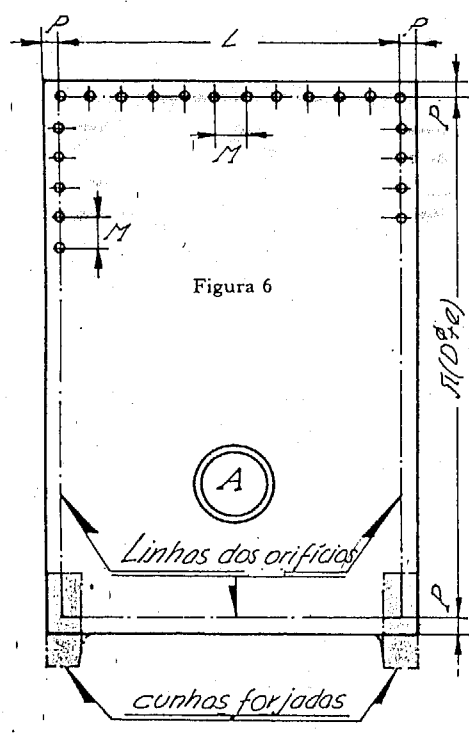
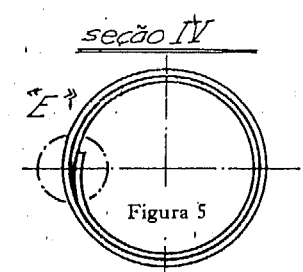
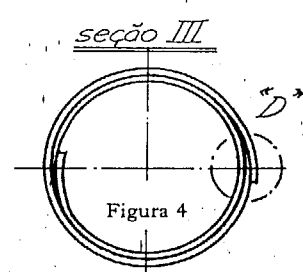
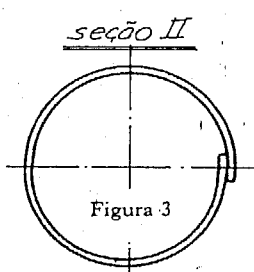
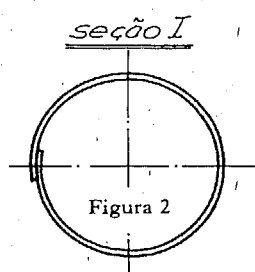
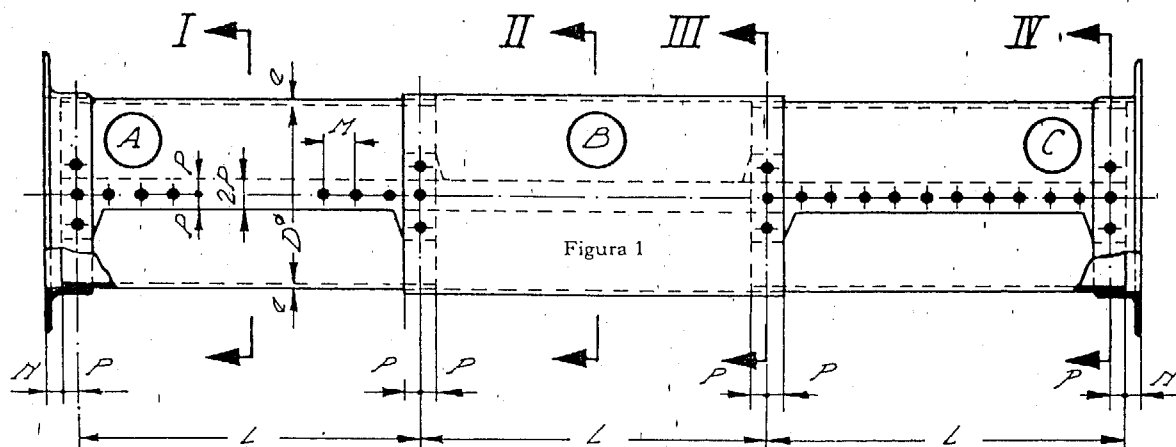
A figura 10 representa o detalhe "E" da seção IV (fig. 5), pois, como se pode ver, a superfície externa de contato da virola *C* com o flange deve ser cilíndrica.

A figura 11 representa o detalhe "D" da seção III (fig. 4), sendo, neste caso, cilíndrica a superfície interna do contato da virola *B* com a virola *C*.

Estes detalhes também são aplicáveis para os casos posteriores.

Uma vez rebitada toda a tubulação, calafetam-se todos os rebites e ressalto internos e externos para que a vedação seja mais perfeita.

Nota. As virolas *A* e *C* serão curvadas de forma que o traçado fique pela parte externa e, o da virola *B*, pela interna.



Cotovelo cilíndrico (rebitado)

Sempre que as virolas extremas do cotovelo tiverem o mesmo diâmetro interno, dividir-se-á o arco-eixo em quatro partes iguais ou múltiplos de quatro, assim como acontece neste caso em que se dividiu o arco-eixo em quatro partes iguais.

A figura 1 dá o cotovelo que temos que desenvolver, de 90° e que é formado por duas meias virolas extremas e uma dupla central.

A seção deste mesmo cotovelo foi representada na figura 1-bis para que se pudesse achar todos os dados necessários para desenvolvê-lo.

Sobre o eixo transversal da virola central, descreve-se uma semicircunferência de diâmetro igual ao diâmetro interno da virola central e igual ao diâmetro externo das virolas extremas.

Esta semicircunferência é dividida em um número adequado de partes iguais (seis, por exemplo) e desde os pontos de divisão a , b , c , etc., traçam-se perpendiculares a esse eixo transversal, determinando sobre ele os pontos de intersecção a_1 , b_1 , c_1 , etc., e sobre a linha de intersecção de uma das virolas extremas os pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc.

A partir destes pontos traçam-se paralelas ao eixo da virola extrema, determinando sobre seu diâmetro os pontos a_3 , b_3 , c_3 , etc.

Desenvolvimento da virola A (fig. 2). Traça-se uma reta qualquer de comprimento igual ao comprimento da circunferência média da virola $A = \pi \times (D^o + e)$. Esta reta é dividida em doze partes iguais, neste caso, e desde os pontos de divisão d'_3 , c'_3 , b'_3 , a'_3 , etc., traçam-se perpendiculares a essa reta, dando a estas os comprimentos iguais aos das geratrizes d_3d_2 , c_3c_2 , b_3a_2 , etc. da figura 1-bis, determinando assim os pontos d'_2 , c'_2 , b'_2 , a'_2 , etc., que se unem por meio de uma curva contínua. Dentro desta curva traça-se uma paralela à distância P (medida das tabelas).

Também se traça uma paralela à distância P e para o interior da reta de origem e , por último, traçam-se paralelas externas às retas $d'_2d'_3$, também à distância P . O desenvolvimento da virola C é igual ao desenvolvimento da virola A mas a curvatura é feita do lado contrário.

Desenvolvimento da virola B (fig. 3). Traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média da virola $B = \pi \times (D + 3e)$ e que neste caso é dividida em doze partes iguais, determinando assim os pontos de divisão d'_1 , c'_1 , b'_1 , a'_1 , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares em ambas as partes da reta, dando a estas os comprimentos das geratrizes d_1d_2 , c_1c_2 , b_1b_2 , a_1a_2 , etc., determinando desta maneira os pontos d'_2 , c'_2 , b'_2 , a'_2 , etc., que se unem por meio de curvas contínuas.

Na distância $2P$ traçam-se paralelas às curvas anteriores e na distância P também se traçam paralelas às retas $d'_1d'_2$.

As cunhas forjadas são feitas na posição que as figuras 2 e 3 indicam.

No desenvolvimento da virola A (fig. 2) marcam-se todos os orifícios perfurando-os, não ocorrendo o mesmo com o desenvolvimento da virola B , já que só se perfurarão os orifícios marcados nas linhas de orifícios $d'_2d'_2$, pois, os outros serão marcados depois de dobrar o ressalto que se apresenta com as virolas A e C .

Nota. Para prever a fixação dos ressalto que deverão projetar-se para fora, dar-se-á material de excesso, como se ilustra na figura 3 (este material que se dá de excesso é o que está sombreado e depende da espessura da chapa e dos graus de curvatura).

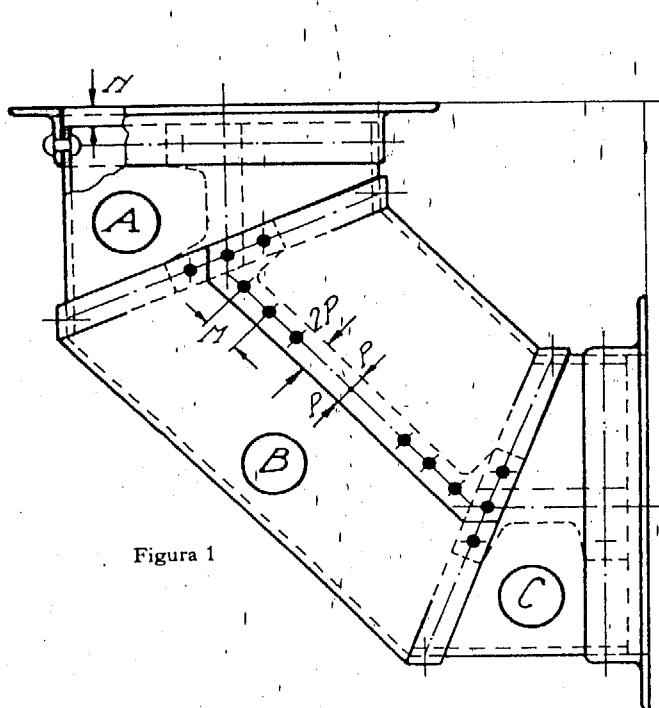


Figura 1

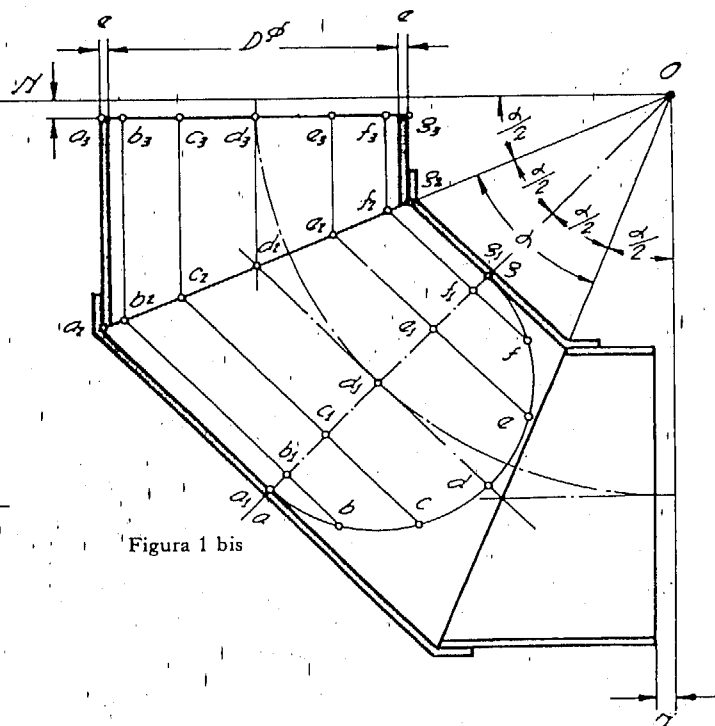


Figura 1 bis

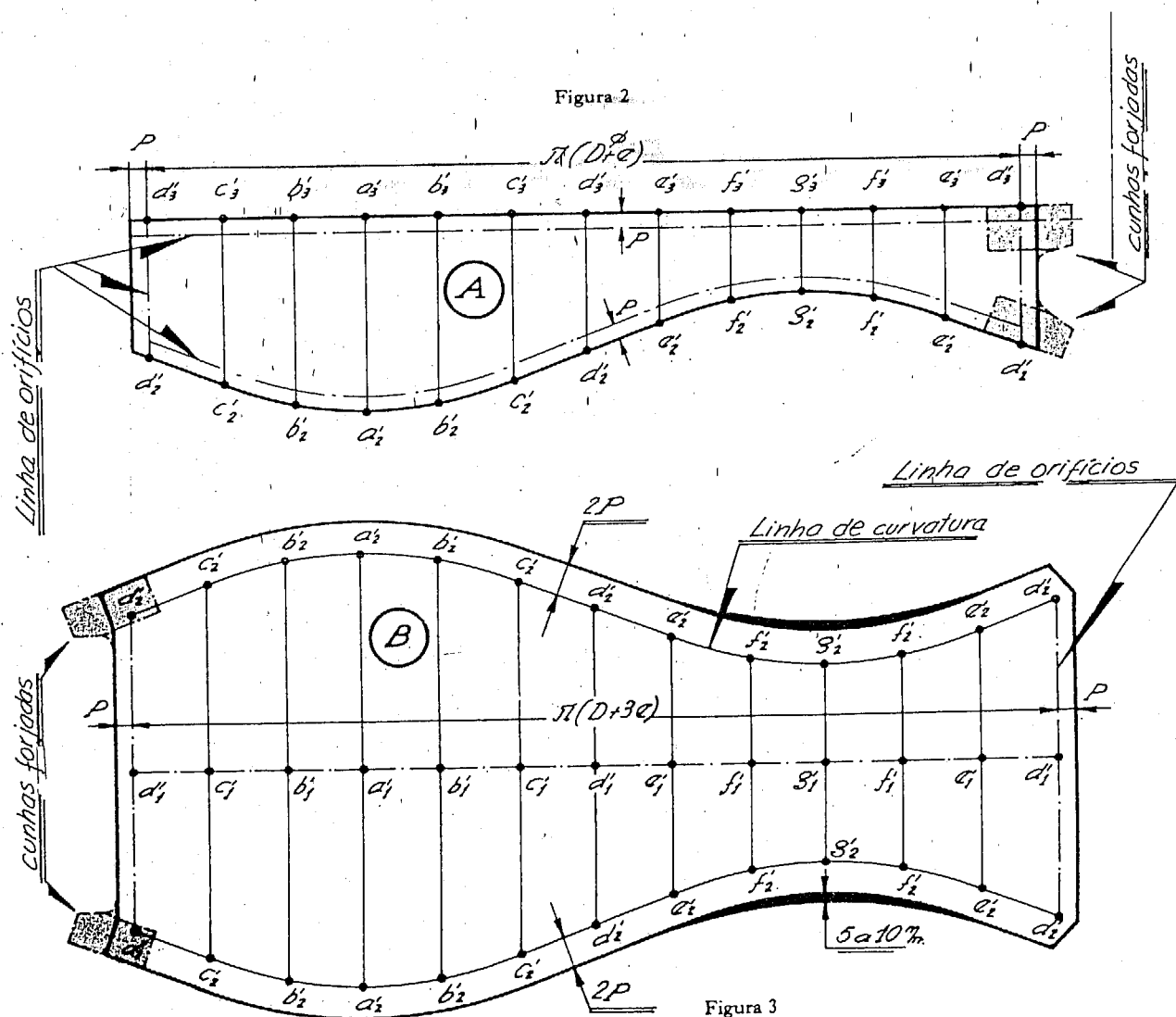


Figura 3

Intersecção de um cilindro sobre outro (rebitado)

Neste caso foi dado como exemplo um cilindro exercido perpendicularmente sobre outro, cujos eixos estão em um mesmo plano. Caso os eixos estejam em planos paralelos ou estejam inclinados entre si, a operação será feita de forma parecida, pois nos capítulos anteriores explicou-se a forma de desenvolvê-los.

A figura 1 representa meia vista em elevação e meia seção.

Descreve-se um quadrante de circunferência sobre o diâmetro externo do enxerto (fig. 1) e divide-se em um número adequado de partes iguais (dois, por exemplo). Desde os pontos de divisão a , b e c , traçam-se perpendiculares ao diâmetro do enxerto, determinando sobre este os pontos a_1 , b_1 e c_1 e sobre a circunferência externa do ressalto do enxerto os pontos a_2 , b_2 e c_2 . Estes últimos pontos são unidos com o centro O por meio de retas radiais, cortando a circunferência média do outro cilindro nos pontos a_3 , b_3 e c_3 .

Desenvolvimento do cilindro horizontal (fig. 3). Traça-se um retângulo de lados iguais a L e $2\pi \times R_m$.

Depois traçam-se paralelas externas aos lados do retângulo à distância P e também se marca o eixo transversal.

A um quarto do comprimento do desenvolvimento da circunferência média do cilindro horizontal ($\pi \times R_m/2$) marca-se uma perpendicular e paralelamente a esta (em ambas as partes), traçam-se paralelas às distâncias c_3b_3 e b_3a_3 iguais aos comprimentos dos arcos c_3b_3 e b_3a_3 da fibra média da figura 1.

Marcando o centro em um ponto qualquer O_1 do eixo transversal, descreve-se uma semicircunferência de raio igual ao raio interno do enxerto.

Esta circunferência é dividida em quatro partes iguais, neste caso e desde os pontos de divisão a , b e c , traçam-se paralelas ao eixo transversal, determinando sobre as correspondentes retas anteriores os pontos a'_3 , b'_3 e c'_3 que se unem por meio de uma curva contínua.

Depois traça-se uma paralela a esta curva à distância P e se forjam as cunhas correspondentes. Por último, marcam-se todos os orifícios, perfurando-os antes de curvar a virola.

O desenvolvimento do enxerto é feito assim como se ilustra na figura 4, sendo que o material de excesso está sombreado.

Os comprimentos das geratrizes $a'_1a'_2$, $b'_1b'_2$, etc. desenvolvidas são iguais aos das geratrizes a_1a_2 , b_1b_2 , etc. da figura 1.

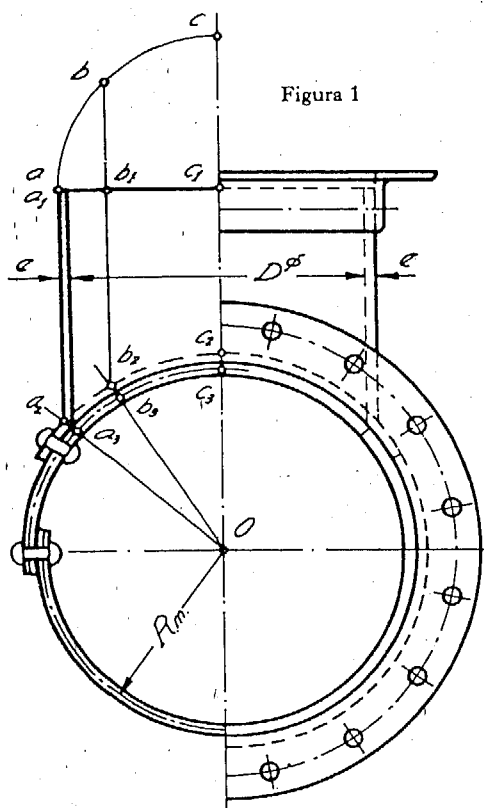


Figura 1

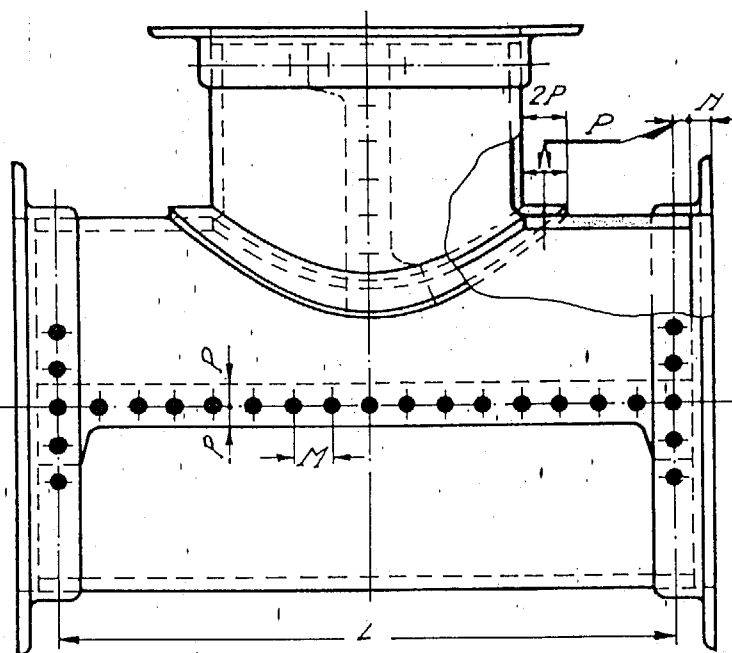


Figura 2

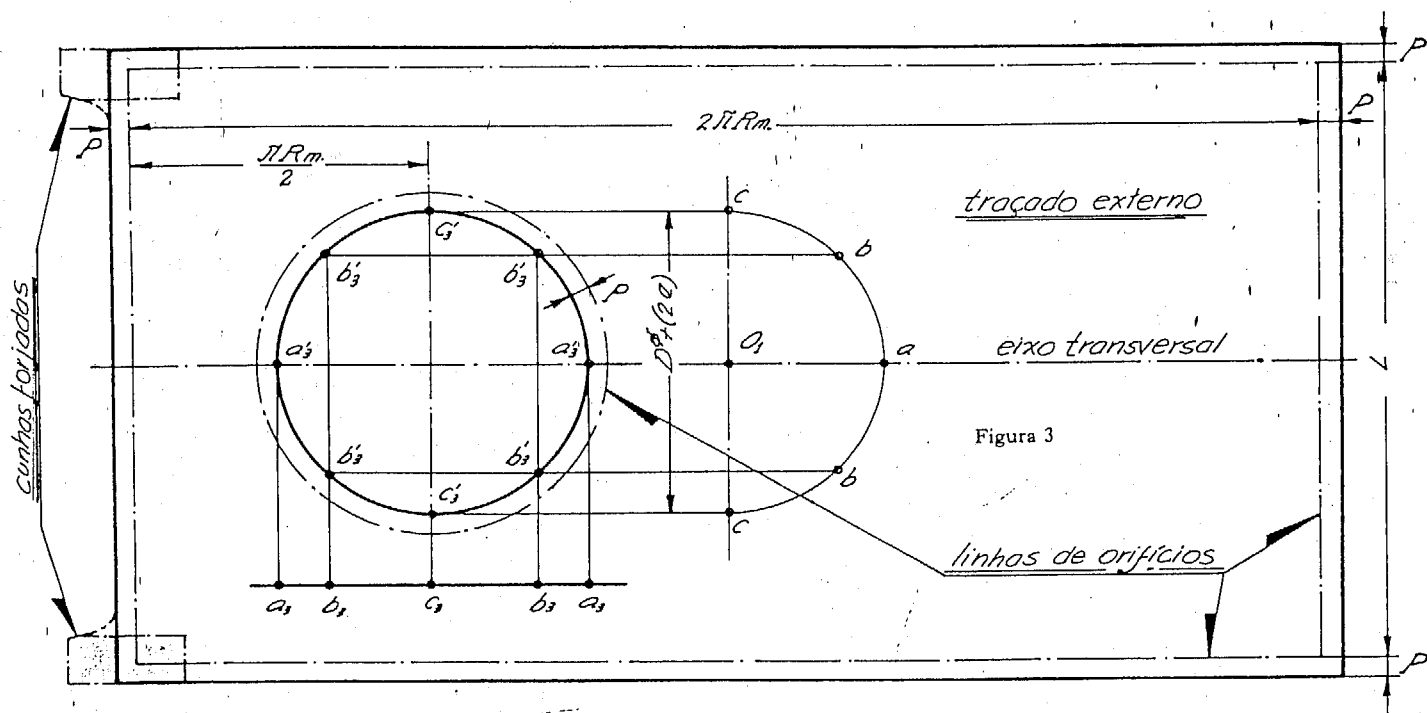


Figura 3

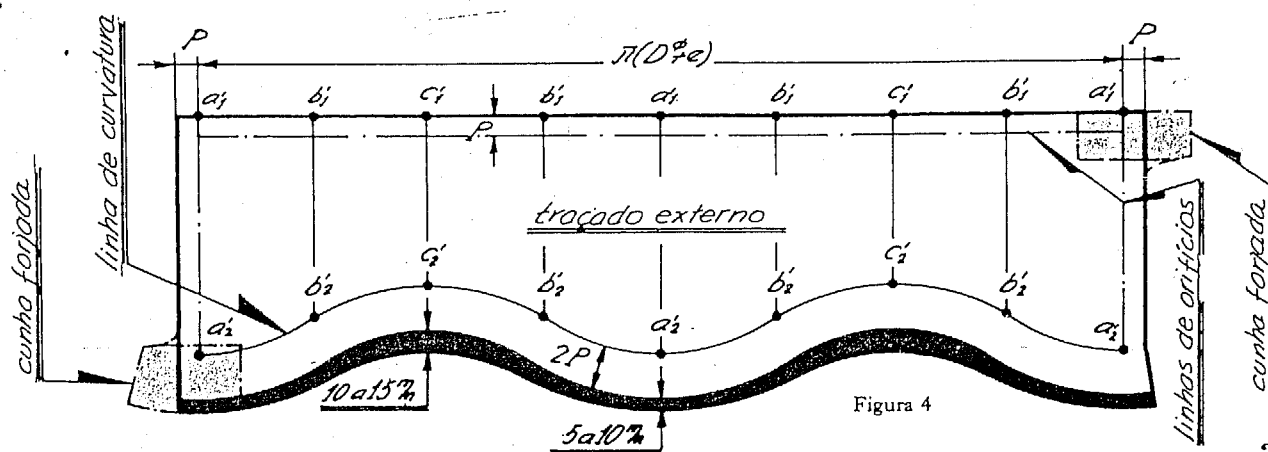


Figura 4

Intersecção de um cilindro sobre outro com uma peça suplementar (rebitado)

As figuras 1 e 2 representam a elevação e perfil do trabalho a ser feito.

Para achar os dados necessários para desenvolver este trabalho, a representação é como se ilustra na figura 1-bis e desenvolve-se da mesma maneira que se pode ver nas respectivas figuras 3, 4 e 5.

A parte sombreada na peça suplementar desenvolvida (fig. 4) é o excesso de material que se dá para prever as contrações dos ressaltos ao serem curvados.

Também foi dado material de excesso ao enxerto desenvolvido (fig. 5).

As figuras 3 e 5 indicam onde são feitas as cunhas forjadas.

Quando forem forjadas as cunhas, perfuram-se todos os orifícios, menos os dos ressaltos que serão dobrados e marcados.

Acreditamos que estes exemplos típicos que estudamos servirão de norma para outros casos que se apresentarem.

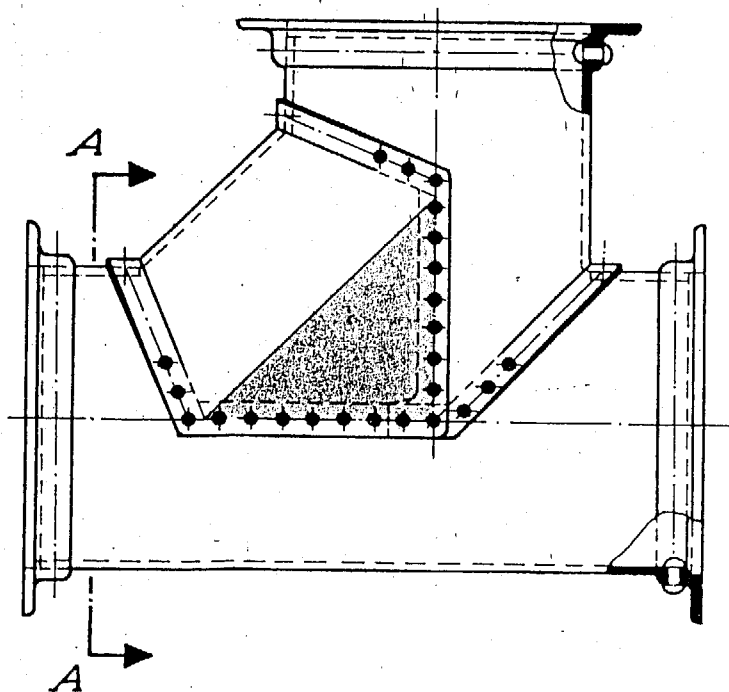


Figura 1

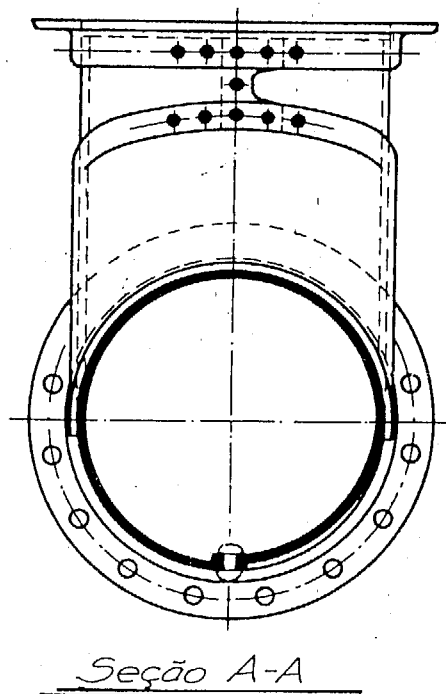


Figura 2

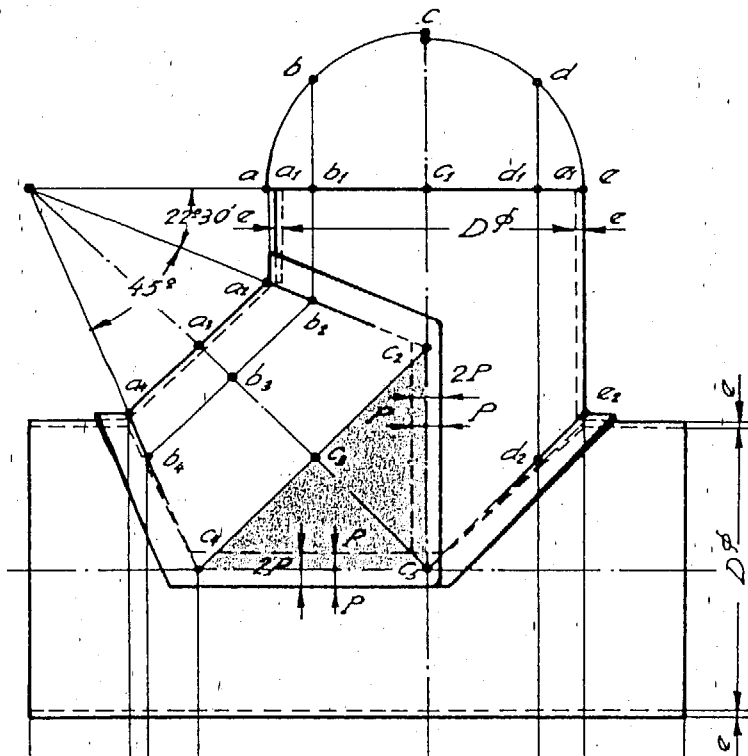


Figura 1 bis

Figura 4

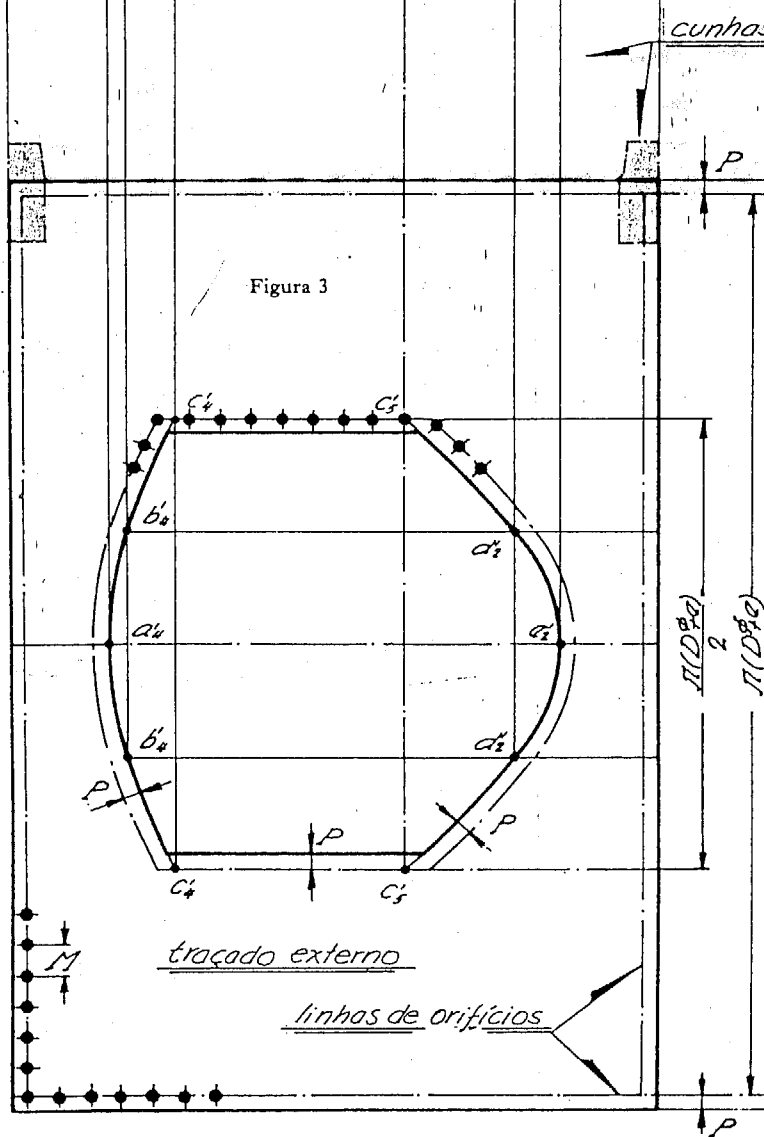
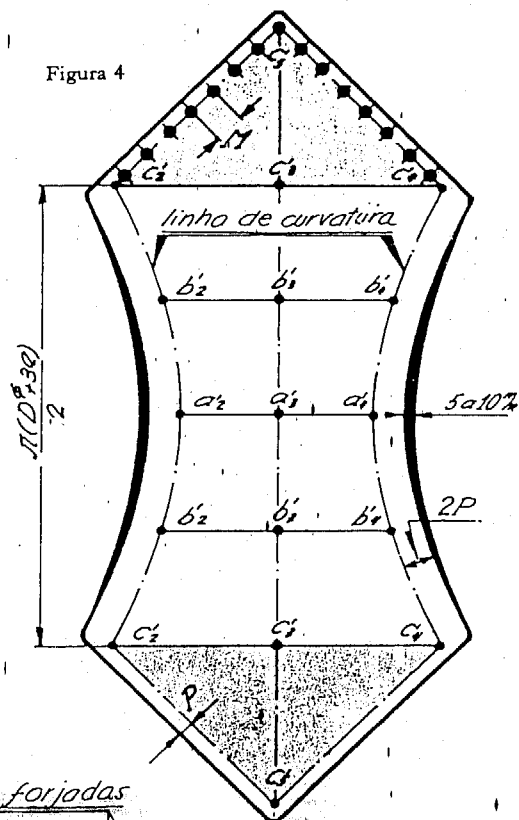


Figura 3

cunhas forjadas

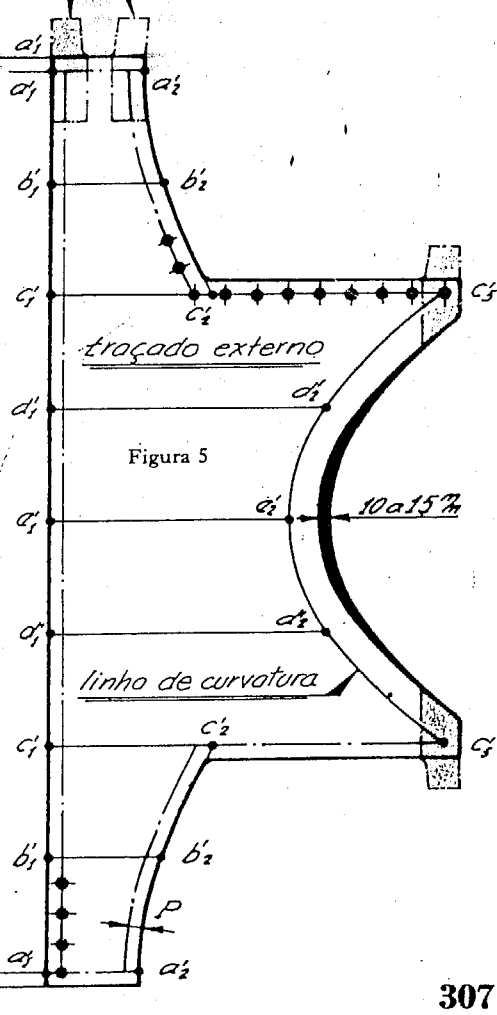


Figura 5

Rebitagem do aço doce

Chanfradura das pinças P. A chanfratura tem como missão facilitar a calafetagem, cujo objeto é o de tornar impermeáveis os corpos rebitados. O ângulo de chanfro costuma ser aproximadamente de 15 a 20° (fig. 1) e só se chanfram as chapas de mais de 5 mm de espessura.

Separação *M* dos rebites em função de seu diâmetro *d*:

Rebitagem para altas pressões	= 2,3 a 2,5 vezes o diâmetro <i>d</i>
Rebitagem para pressões de até 6 kp/cm ²	= 3 vezes o diâmetro <i>d</i>
Rebitagem à prova d'água	= 3,5 a 4 vezes o diâmetro <i>d</i>
Rebitagem não à prova d'água	= 5 a 6 vezes o diâmetro <i>d</i>
Para rebitagens sem fadiga	= 8 a 15 vezes o diâmetro <i>d</i>

Calafetagem. A calafetagem tem a missão de assegurar uma hermeticidade perfeita das ensambladuras rebitadas. Consiste em calcar ou empurrar metodicamente o contorno das cabeças dos rebites até que se acoplem perfeitamente às chapas. De forma idêntica calcam-se as extremidades das pinças para apertar uma contra a outra. O contato das pinças entre si deve estar limpo ou isento de óxido e deve ser o mais ajustado possível.

Para calafetar as cabeças dos rebites (fig. 3), utiliza-se um corta-frios de martelo pneumático cujo corte é eliminado e substituído por uma forma especial que se acopla à cabeça do rebite (forma de gancho).

As figuras 4 e 5 representam a primeira e a segunda passada da calafetagem das pinças, sendo a ferramenta da primeira mais fina que a da segunda. Caso as pinças tenham mais de 20 mm de espessura, serão dadas mais de duas passadas.

Nota. Primeiro calafetam-se os rebites por dentro e por fora.

Uma vez calafetados os rebites, calafetam-se as pinças em ambas as partes (estas operações são feitas a frio).

Normas em função da
espessura das chapas a rebitar

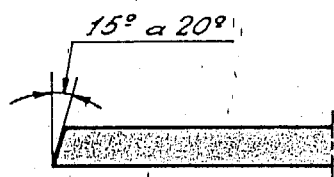


Figura 1

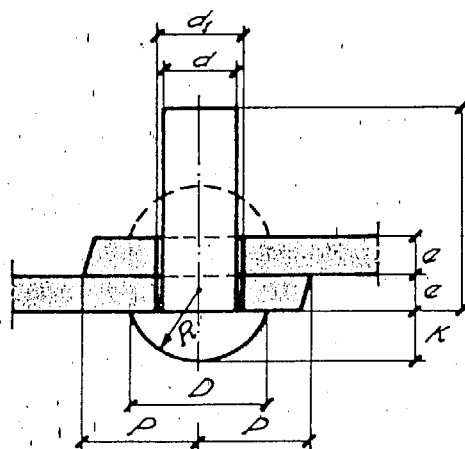


Figura 2

e = espessura da chapa	1	1,5	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	20
d = diâmetro do rebite	3	5	6	8	8	10	12	16	20	22	22	24	27
d_i = diâmetro do orifício	3,25	5,25	6,5	8,5	8,5	11	13	17	21	23	23	25	28
l = comprimento do rebite	5,5	9	11	14	17	28	34	45	55	65	70	78	90
P = largura da pinça	9	11	12	14	15	16	20	25	30	33	35	37	40
D = diâmetro da cabeça	5,2	8,8	10,5	14	14	18	22	28	36	40	40	43	48
K = altura da cabeça	1,8	3	3,6	4,8	4,8	7	9	11,5	14	16	16	17	19
R = raio da cabeça	2,8	4,8	5,7	7,5	7,5	9,5	11	14,5	18,5	20,5	20,5	22	24,5

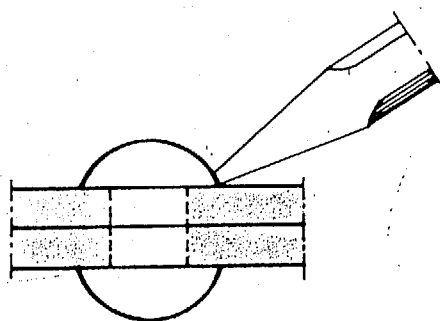


Figura 3

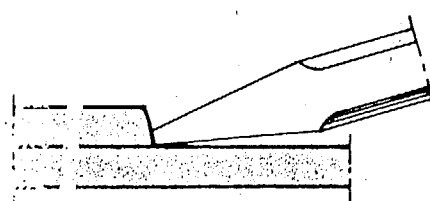


Figura 4

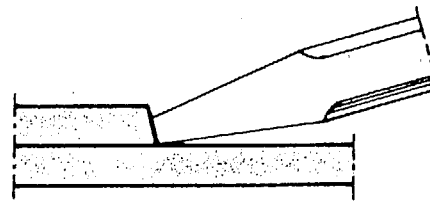


Figura 5

QUARTA PARTE

MÉTODO DE TRIANGULAÇÃO

Princípios do método

O método de triangulação é aplicado para resolver grande número de problemas de traçado que se apresentam na oficina de caldeiraria.

Este sistema consiste em dividir a superfície da peça a ser desenvolvida em um número adequado de triângulos, determinando depois o comprimento real dos lados de cada triângulo, transportando-os sobre o desenvolvimento. A maioria dos caldeiros traçadores representam as vistas em *planta* e em *elevação* para determinar as verdadeiras grandezas dos lados dos triângulos, sendo este procedimento muito custoso quando as bases da peça a ser desenvolvida não forem paralelas entre si.

Vamos nos ocupar somente do método de triangulação que requer só uma vista, geralmente a vista em *elevação* ou, em alguns casos, a vista de *perfil*; no final serão dados alguns exemplos onde se empregaram as vistas em *planta* e em *elevação*, já que em alguns casos é mais rendoso recorrer a estas duas vistas.

Uma vez entendido o princípio em que se baseia o sistema de triangulação com uma só projeção, será fácil recordá-lo; portanto, se as regras simples que vamos indicar a seguir forem bem entendidas, o estudante poderá fazer qualquer desenvolvimento, por mais difícil que seja, embora possuindo só conhecimentos elementares de *geometria*.

Em seguida são dadas as normas para desenvolver um tronco de cone de bocas circulares, que servirá de exemplo para todos os desenvolvimentos, já que todos são determinados analogamente.

1º Desenha-se a vista em *elevação* da peça a ser desenvolvida por seu eixo médio (salvo quando se indicar o contrário, como ocorrerá com os transformadores) e dividem-se as semicircunferências das bocas em um número adequado de partes iguais. Numeram-se os pontos de divisão da boca superior e colocam-se letras nos pontos de divisão da base. Pelos pontos de divisão traçam-se retas que formam triângulos, assim como se pode ver na perspectiva da figura 1.

2º Determinam-se as verdadeiras grandezas dos

lados dos triângulos, como explicaremos mais adiante.

3º Transportam-se sobre duas respectivas régua flexíveis (figuras 2 e 3) os desenvolvimentos das circunferências médias das bases ($3,1416 \times d_m^o$ e $3,1416 \times D_m^o$) e dividem-se estes desenvolvimentos no mesmo número de partes iguais às divisões das circunferências das bases (neste caso, oito cada uma), escrevendo-se números e letras nestes pontos, como se pode ver nas figuras.

4º Uma vez determinadas as verdadeiras grandezas dos lados dos triângulos, toma-se a grandeza real *A-1*, marcando-a em uma posição adequada (fig. 4). Marcando o centro no ponto *A* (fig. 5), descreve-se em ambas as partes da reta *A-1* um arco de raio igual à grandeza real *A-2*; depois coloca-se o ponto 1 da régua flexível da figura 2 sobre o ponto 1 da reta *A-1*, flexionando-se a régua até que os pontos 2 desta cortem o arco anterior, determinando dois novos pontos que chamaremos 2-2. Tomando como centros os pontos 2-2 (fig. 6), descrevem-se dois arcos indefinidos de raios iguais, equivalentes à grandeza real 2-*B*, fazendo-se coincidir o ponto *A* da figura 6 com o ponto *A* da régua flexível correspondente à base, flexionando-a até que os pontos *B-B* da régua cortem os arcos anteriores, determinando dois novos pontos que também chamaremos *B-B*.

Os pontos 3-3 da figura 7 são determinados da mesma forma que os anteriores, continuando assim até terminar de traçar o desenvolvimento, assim como se ilustra na figura 8.

Nota. Os lados *A-1*, *B-2*, *C-3*, *D-4* e *E-5* são retas geratrizes que se determinam com suas dimensões exatas, não ocorrendo o mesmo com os lados *A-2*, *B-3*, *C-4* e *D-5* porque são curvas e nós as calculamos como retas, já que o erro que existe em determiná-las assim está dentro dos limites de tolerância da *caldeiraria*.

É muito importante fixar, na vista em *elevação*, a posição das linhas falsas, para assim poder triangular corretamente o desenvolvimento da peça.

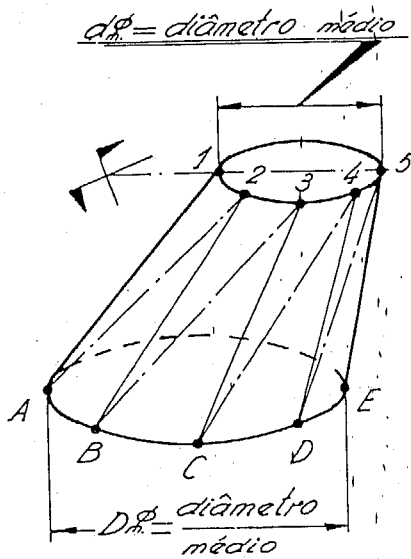


Figura 1

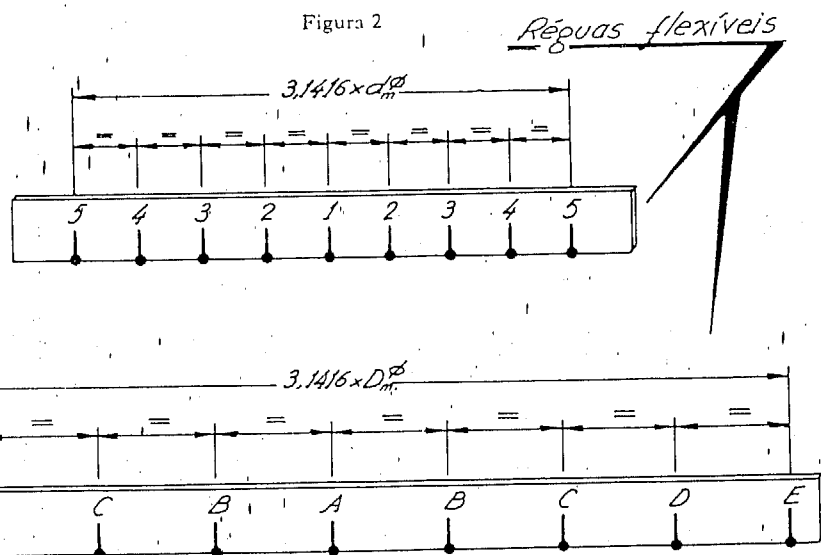


Figura 3



Figura 4

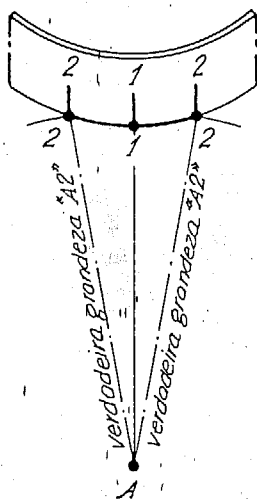


Figura 5

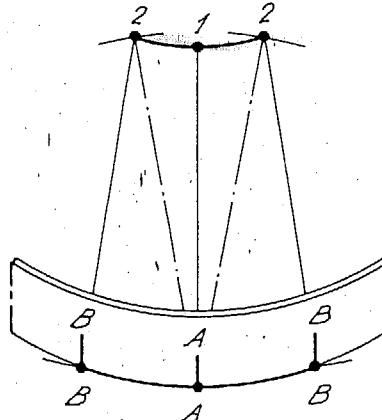


Figura 6

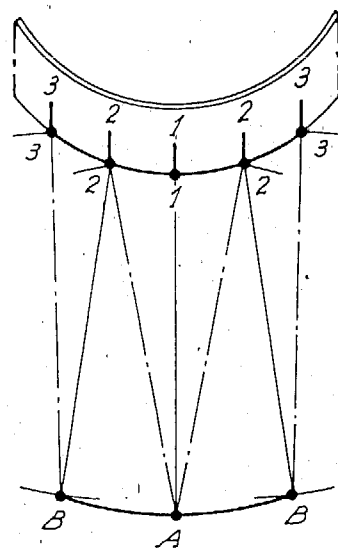
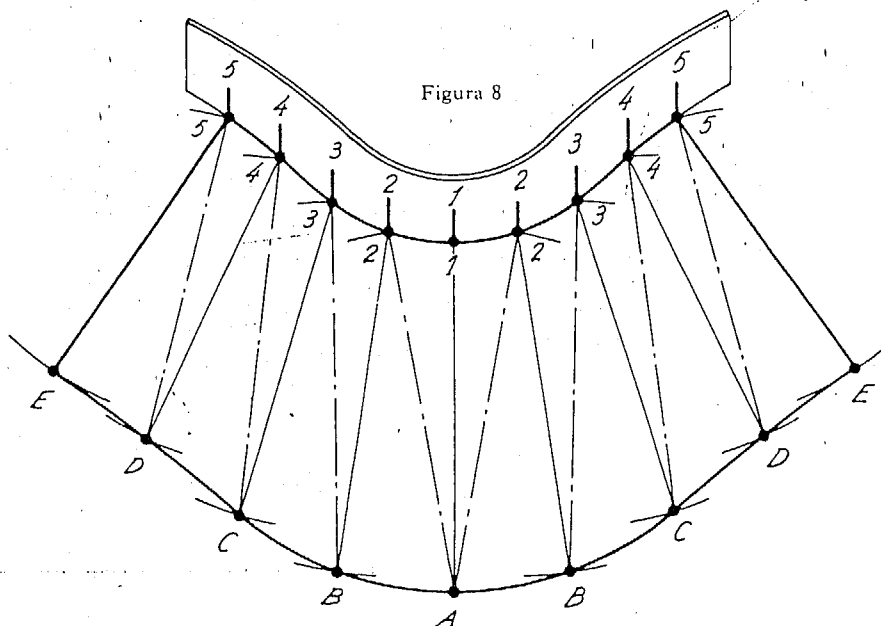


Figura 7



EXERCÍCIO

2

Determinação das verdadeiras grandezas

A explicação do sistema que vamos dar a seguir para determinar as verdadeiras grandezas dos lados dos triângulos tem por objeto mostrar seu princípio o mais claramente possível para que, uma vez estudado, possamos aplicar a qualquer trabalho que se apresentar.

Para triangular o desenvolvimento de uma peça, com foi visto nas páginas anteriores, a primeira coisa que temos que fazer é desenhar a *elevação* da peça em uma posição correta. Depois divide-se a superfície da *elevação* em um número adequado de triângulos que são formados por *linhas falsas*, devendo-se achar suas *verdadeiras grandezas* para que se possa construir com elas os triângulos que formam o desenvolvimento da peça.

Na perspectiva da figura 1 pode ser visto o método para determinar as verdadeiras grandezas.

Nesta perspectiva representa-se um tronco de cone de bocas circulares e paralelas entre si, cuja base está sobre o plano *H* de projeção e tocando o ponto *C* da base no plano *V* de projeção que imaginamos ser transparente para que permita ver a projeção sobre ele, conforme o sentido da flecha.

Sobre a superfície do tronco de cone traçou-se a linha real *C-3* que é limitada pelos pontos *C* e *3*. Esta linha é projetada sobre a elevação, determinando a reta *C-3'* que apresentará um comprimento falso por estar a grandeza real *C-3* inclinada com respeito ao plano *V* de projeção.

Portanto, se esta elevação é representada em *elevação*, a linha *C-3'* seria representada com um comprimento falso. A posição desta linha sobre a superfície do tronco de cone é a *hipotenusa* do triângulo retângulo que está sombreado, cujos catetos são: a reta *C-3'* projetada sobre o plano *V* e a projetante *3-3'*.

A projetante forma sempre um ângulo reto com respeito ao plano vertical, dado que sempre são projetados todos os pontos perpendicularmente sobre os planos de projeção. Por conseguinte, dada a medida *C-3'* (projetada verticalmente) e a projetante *3-3'*, pode-se determinar o comprimento real da linha *C-3* porque os comprimentos das linhas mencionadas encontram-se em ângulo reto.

Este princípio que acabamos de enunciar e que esclarecemos com a vista em perspectiva da figura 1, aplica-se na representação diédrica, assim como representam as figuras 2, 3 e 4 que estão representadas em *planta*, *elevação* e *perfil*, respectivamente.

Uma simples inspeção destas figuras nos conduz ao mesmo

princípio que explicamos com a perspectiva da figura 1, vendo-se que a grandeza falsa *C-3'* da figura 3 é igual à grandeza falsa da linha *C-3'* projetada sobre o plano *V* em perspectiva.

Nas figuras 2 e 4 vemos o plano *V* de canto e também as projeções do triângulo retângulo *C-3-3'*, equivalente ao sombreado em perspectiva.

Portanto, para achar a grandeza real *C-3*, traça-se uma vertical qualquer de comprimento indefinido (fig. 5) e marca-se nela o ponto *1* que representa o centro da boca superior; a partir deste ponto e para baixo, transporta-se a ordenada *C*, determinando-se um novo ponto (neste caso o ponto *3*) a partir do qual se traça uma perpendicular indefinida à vertical anterior, pondo sobre esta a letra *C*. Desde *1* e também sobre a vertical, marca-se o comprimento da ordenada *3*, determinando um novo ponto que também chamaremos *3*. Sobre a horizontal *C* e a partir do ponto *3*, transporta-se o comprimento falso *C-3'*, tomado da elevação (fig. 3), determinando o ponto *3* que, unido com o outro ponto da mesma origem, determinaria a grandeza real *C-3* que, neste caso, estaria limitada pelos pontos *3-3* (fig. 5).

Procedimento para determinar as verdadeiras grandezas de peças cônicas ou semelhantes

1º Desenha-se uma linha vertical indefinida sobre a qual se marca um ponto indicando a linha central que passa pela boca superior.

2º Desde este ponto marca-se para baixo as ordenadas da base maior e a partir de cada um dos pontos achados traça-se uma linha de comprimento indefinido, perpendicular à vertical, dando a cada uma destas a letra correspondente. (Em alguns casos especiais este artigo varia como, por exemplo, em peças cujos eixos das bocas estão em planos paralelos; mas no momento oportuno explicar-se-á a forma de proceder nestes casos).

3º Desde o ponto inicial da vertical marcam-se para baixo as ordenadas da boca superior e numeram-se os pontos achados.

4º Transporta-se cada um dos comprimentos falsos sobre as horizontais da mesma origem, a partir do ângulo formado pelas duas linhas horizontal e vertical e numeram-se os pontos resultantes com o mesmo número da sua ordenada.

5º Unem-se os pontos achados sobre as horizontais com os da mesma origem que se encontrarem na vertical, determinando-se assim as verdadeiras grandezas das linhas desejadas.

Figura 1

Figura 1 es un diagrama de un sistema de coordenadas tridimensionales. Se muestran dos planos: el plano vertical (V) y el plano horizontal (H). Un punto A está situado en el espacio. Se traza una línea perpendicular a la línea de intersección de los planos V y H, pasando por A, que se proyecta en los planos V y H como líneas punteadas. En el plano V, se marca un punto 1 y una línea 1-5. En el plano H, se marca un punto 3 y una línea 3-3'. Una línea curva, etiquetada como "ordenadas", conecta los puntos 1 y 3. Se indica también un punto E en la línea de intersección de los planos.

Figura 4

Diagram illustrating the reduction of a line to a point. The diagram shows a line segment in an inclined position (30 degrees) and its projection. The true length is labeled "verdadeira grandeza" and the false length is labeled "compr. falso". The diagram also shows the "ordenada - C" and "ordenada - 3" lines, and the "projeteonte" (projection) line.

315

3 Tronco de cone oblíquo de bocas circulares e paralelas entre si

Representa-se a *elevação* do tronco de cone pela sua fibra média e descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da boca superior que representa a metade da superfície da boca. Esta semicircunferência é dividida em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) que são numeradas 1, 2, 3, etc. A partir destes pontos traçam-se perpendiculares ao diâmetro, obtendo sobre este diâmetro novos pontos e, portanto, as ordenadas necessárias para fazer o traçado das grandezas reais.

Também se descreve uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da base, dividindo-a no mesmo número de partes iguais como na anterior, obtendo assim os pontos A, B, C, etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre este novos pontos e ao mesmo tempo as ordenadas B, C e D.

Todos os pontos achados anteriormente sobre os diâmetros das bocas unem-se, assim como se ilustra na figura 1, dividindo assim em triângulos a superfície do tronco de cone visto em *elevação*.

Traçado das verdadeiras grandezas (fig. 2). Traça-se uma vertical de comprimento indefinido e, em uma posição qualquer desta, marca-se o ponto 1 e 5 que representa a linha central da boca superior. A partir deste ponto e para baixo, transportam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3 e 4 da boca superior da figura 1, obtendo-se assim novos pontos que também chamaremos 2, 3 e 4. Desde o mesmo ponto e também para

baixo, transportam-se sobre a vertical as ordenadas da base, traçando perpendiculares indefinidas à vertical desde os pontos resultantes que, por sua vez, levarão as letras correspondentes no semicírculo da base. (Observar que a perpendicular A é traçada desde 1 e 5 porque os pontos A, 1 e 5 estão em um mesmo plano).

A linha C que foi feita no traçado para determinar as verdadeiras grandezas representa, neste caso, a posição do plano vertical em relação aos eixos horizontais das bocas.

Em seguida, transporta-se cada um dos comprimentos falsos da *elevação* (A2, B2, B3, etc.) sobre as linhas horizontais marcadas com a mesma letra, medindo-as desde o ponto de intersecção formado pela horizontal com a vertical, determinando assim novos pontos que chamaremos 2, 3, 4, etc.

Estes pontos achados unem-se com os da mesma origem que se encontram sobre a vertical, obtendo-se assim as verdadeiras grandezas dos lados dos triângulos que traçamos sobre a superfície do tronco de cone visto em *elevação*.

Como exemplo, uniu-se o ponto 2 da horizontal A com o ponto 2 da vertical, sendo o comprimento da reta 2-2 a verdadeira grandeza da linha A2.

As verdadeiras grandezas A1 e A5 são tomadas diretamente da *elevação*, já que são as únicas desta vista que estão em verdadeira grandeza.

O desenvolvimento do tronco de cone (fig. 3) é feito a partir da linha A1, como se explica no exercício 1.

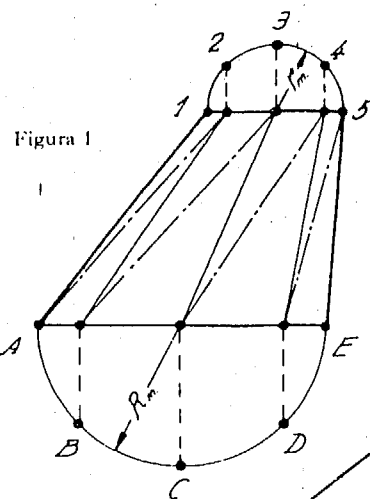


Figura 1

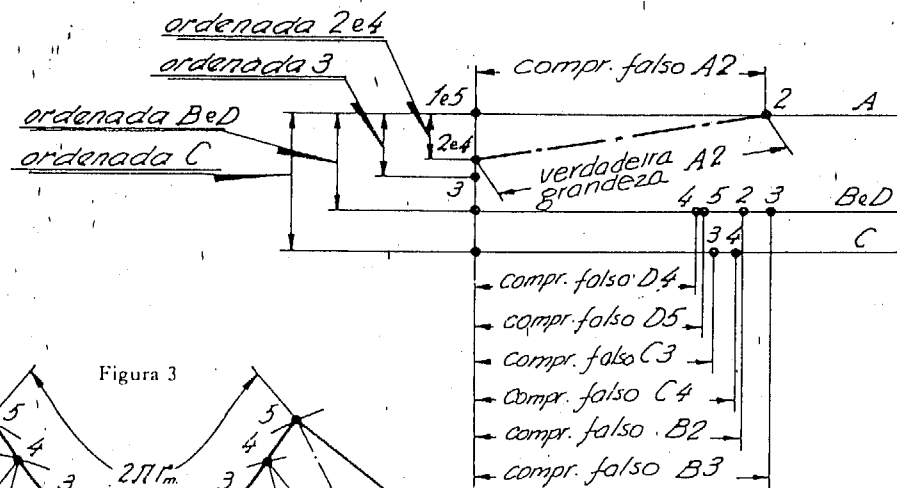


Figura 2

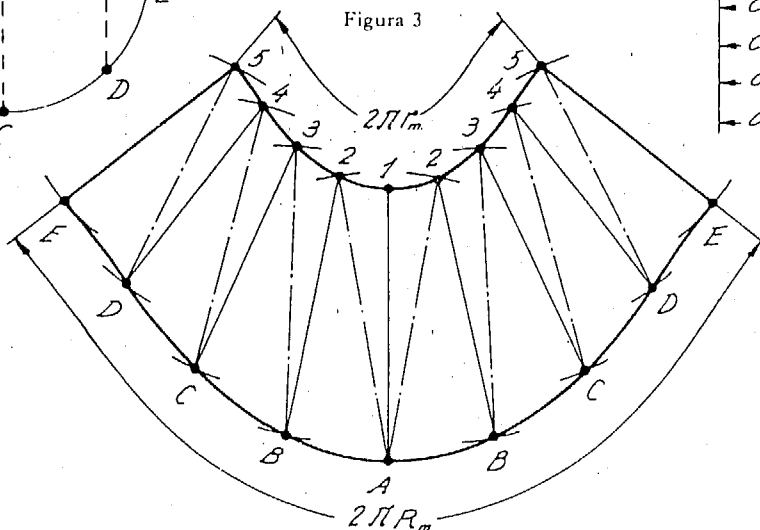


Figura 3

EXERCÍCIO

4

Tronco de cone reto de vértice inacessível ao compasso

O tronco de cone reto é uma das peças que mais se repetem em caldeiraria, sendo o sistema radial o mais simples para desenvolvê-lo mas, como nem sempre o vértice é acessível ao compasso, recorre-se a outros métodos para poder desenvolvê-lo, sendo um deles o *método de triangulação* que leva vantagem sobre outros por sua simplicidade.

Uma vez feita a representação vertical do tronco de cone por sua fibra média (fig. 1), descrevem-se semicircunferências sobre seus diâmetros, dividindo-as em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde o ponto 2 de divisão traça-se uma perpendicular ao diâmetro menor, formando um novo ponto que é unido por meio de uma reta com o ponto A da base, ficando assim representada a diagonal A2 com uma grandeza falsa.

Traçado da grandeza real da diagonal. Traça-se uma perpendicular à diagonal desde seu ponto extremo superior, dando-lhe um comprimento igual ao da ordenada 2, determinando assim um novo ponto que, unido com o ponto A, formaria a hipotenusa do triângulo sombreado, sendo o comprimento desta hipotenusa a grandeza real da diagonal A2.

Desenvolvimento (fig. 2). Transporta-se sobre uma régua flexível o desenvolvimento da circunferência média da boca superior do tronco de cone ($2\pi r_m$) que, neste caso, é dividida em oito partes iguais; faz-se a mesma operação sobre outra régua flexível com o desenvolvimento da circunferência média da base.

Depois começa-se a desenvolver o tronco de cone a partir da reta A1 e em ambas as partes desta, sendo seu comprimento igual ao comprimento da geratriz externa A1 do tronco de cone visto em *elevação*. Marcando o centro no ponto A, descreve-se um arco em ambas as partes do ponto 1 e com um raio igual ao da hipotenusa do triângulo retângulo sombreado. Em seguida, coloca-se sobre o ponto 1 o ponto central de divisão da régua flexível correspondente à boca superior, flexionando a régua até que o ponto seguinte de ambas as partes coincida com o arco anterior, determinando assim os pontos 2.

Com o mesmo raio descreve-se outro arco em ambas as partes de A, tomando como centro o ponto 1 e colocando-se o ponto médio da régua flexível correspondente à base sobre o ponto A e flexiona-se a régua até que os pontos correspondentes coincidam com o arco, determinando assim os pontos B. Para determinar os pontos 3, marca-se o centro nos pontos B e descrevem-se arcos com o mesmo raio dos anteriores (este raio é sempre igual para achar todos os pontos), continuando a flexionar a respectiva régua flexível até que os pontos correspondentes deste raio coincidam com os arcos, obtendo-se assim os pontos 3. Os pontos C são achados marcando o centro nos pontos 3 e os restantes pontos são determinados repetindo a mesma operação até terminar o desenvolvimento.

Nota. Além das diagonais também foram desenhadas sobre o desenvolvimento todas as geratrizes para que pudessem servir de guias no momento de curvar o tronco de cone.

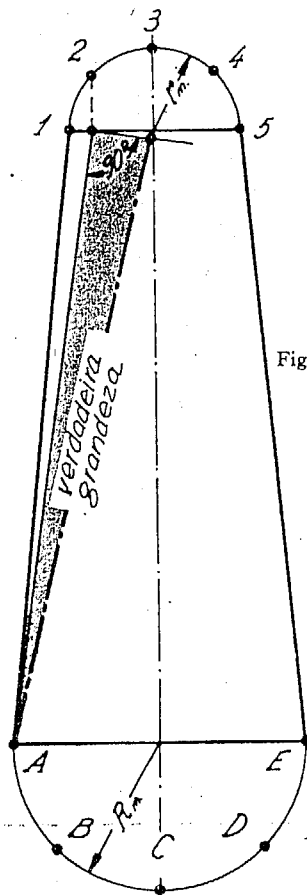


Figura 1

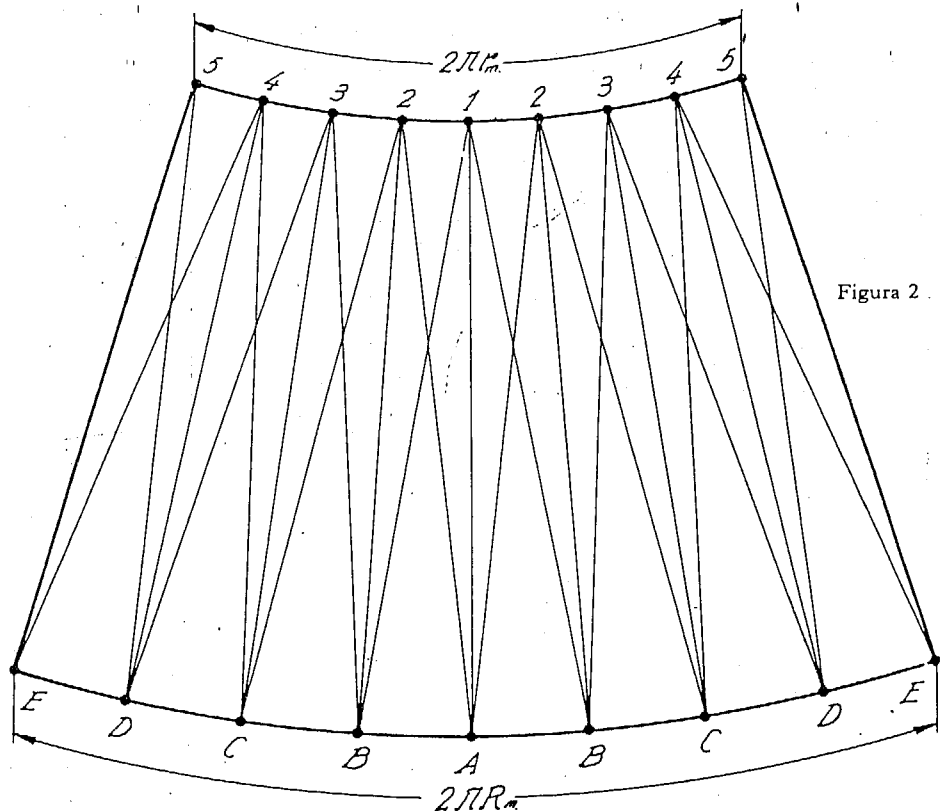


Figura 2

Tronco de cone reto com uma seção qualquer

Na elevação (fig. 1) representa-se o tronco de cone por sua fibra média e a forma da seção, sendo esta, neste caso, uma curva.

Sobre os diâmetros médios descrevem-se semicircunferências, divididas em certo número de partes iguais (quatro partes iguais) e desde os pontos de divisão 2, 3, 4 e B, C, D, traçam-se perpendiculares aos respectivos diâmetros, formando-se novos pontos que se unem entre si por meio de retas geratrizes que cortam a curva da seção nos pontos *a*, *b*, *c*, *d* e *e*, a partir dos quais se traçam perpendiculares ao eixo do tronco de cone até cortar a geratriz extrema, determinando desta maneira as grandezas H_1, H_2, H_3 , etc.

Grandeza real da diagonal A2. Uma vez representada a diagonal, traça-se uma perpendicular a

esta desde seu ponto extremo superior, transportando sobre a perpendicular a ordenada 2, formando um novo ponto que se une com o ponto A por meio de uma reta descontínua que é a hipotenusa do triângulo sombreado e que ao mesmo tempo é a grandeza real da diagonal A2 e de todas as diagonais.

Desenvolvimento (fig. 2). Desenvolve-se o tronco de cone assim como se explicou no exercício anterior, e sobre suas correspondentes geratrizes transportam-se os comprimentos H_1, H_2, H_3 , etc. da figura 1, determinando assim os pontos *a*, *b*, *c*, etc. que se unem por meio de uma curva contínua, assim como se ilustra na figura 2, ficando desta maneira desenvolvido o tronco de cone em questão.

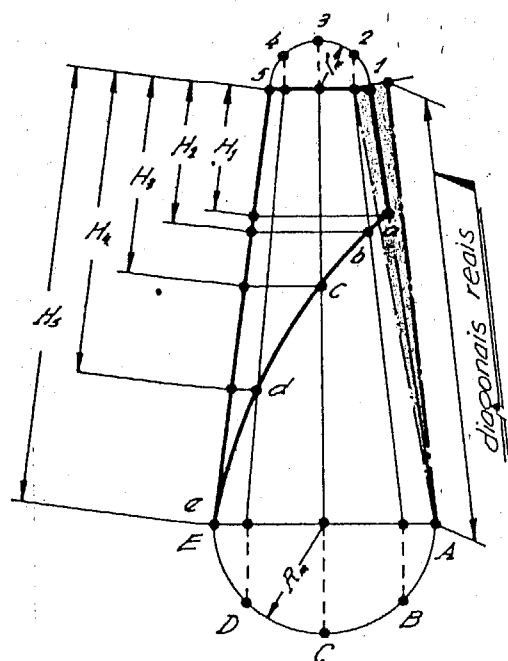


Figura 1

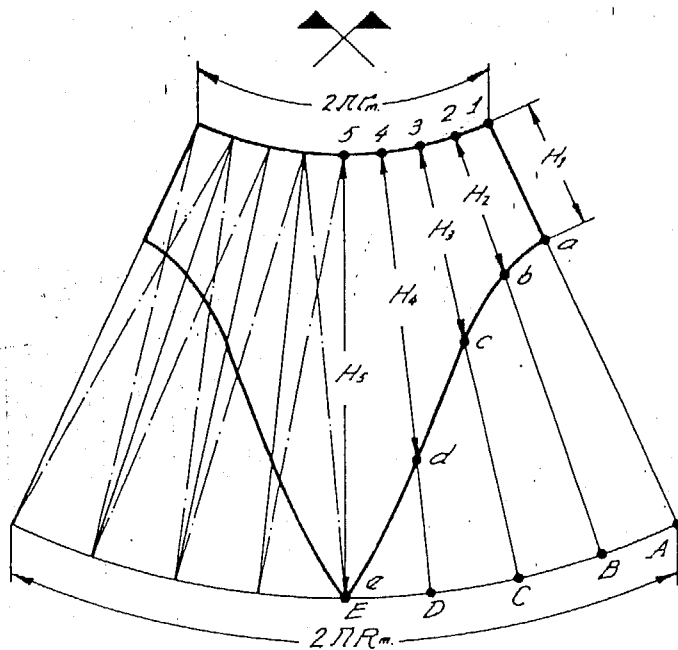


Figura 2

União de virolas cônicas de raio inacessível ao compasso

Conhecendo a posição dos eixos das duas virolas cônicas e seus diâmetros médios (fig. 1), gira-se o ponto P em redor do ponto O (O é o ponto de intersecção de ambos os eixos), determinando sobre o eixo vertical do cone-base outro novo ponto que chamaremos P_1 :

Por este ponto traça-se uma paralela ao diâmetro AE e marca-se-lhe o diâmetro médio do outro cone que fica limitado pelos pontos 1 e 5.

Estes pontos são unidos com os pontos A e E por meio de retas geratrizes que, neste caso, representam as geratrizes extremas do cone-base. Desde as extremidades do diâmetro médio do outro cone, traçam-se tangentes à circunferência descrita desde o ponto O , sendo esta, ao mesmo tempo, tangente às geratrizes do outro cone, formando-se assim os pontos a e e que se unem por meio de uma reta que representa a linha de intersecção de ambas as virolas.

Sobre os diâmetros médios de ambas as virolas, descrevem-se semicircunferências que são divididas em um mesmo número de partes iguais (qua-

tro, neste caso) e desde os pontos de divisão 2, 3, 4 e B, C, D , traçam-se perpendiculares aos seus respectivos diâmetros, determinando novos pontos que se unem entre si por meio de retas geratrizes que cortam a linha de intersecção em b, c e d .

A partir dos pontos a, b, c , etc., traçam-se perpendiculares ao eixo do cone-base, determinando novos pontos sobre sua geratriz extrema e as distâncias H_1, H_2, H_3 , etc. que existem desde estes pontos até o ponto 5.

As grandezas reais das diagonais são todas iguais e podem ser achadas de forma análoga à do caso anterior.

Desenvolvimento (fig. 2). Faz-se o desenvolvimento equivalente ao cone 1-5-A-E, assim como foi feito nos casos anteriores, marcando-se sobre as correspondentes geratrizes desenvolvidas as grandezas H_1, H_2, H_3 da figura 1, determinando assim os pontos a, b, c , etc. que se unem por meio de uma curva contínua.

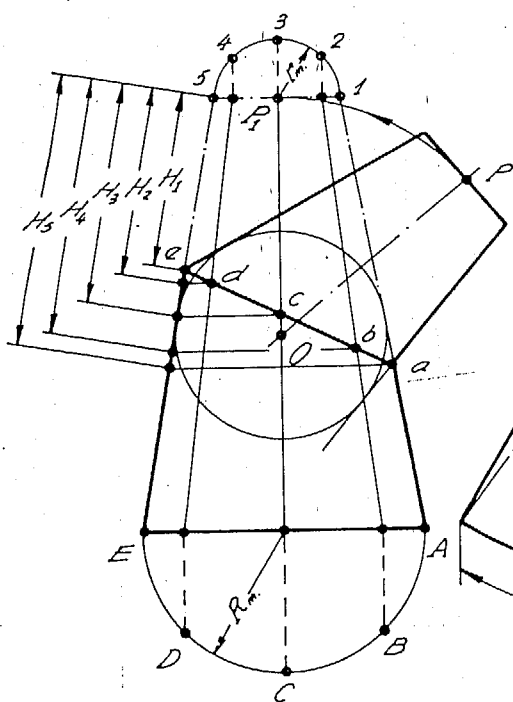


Figura 1

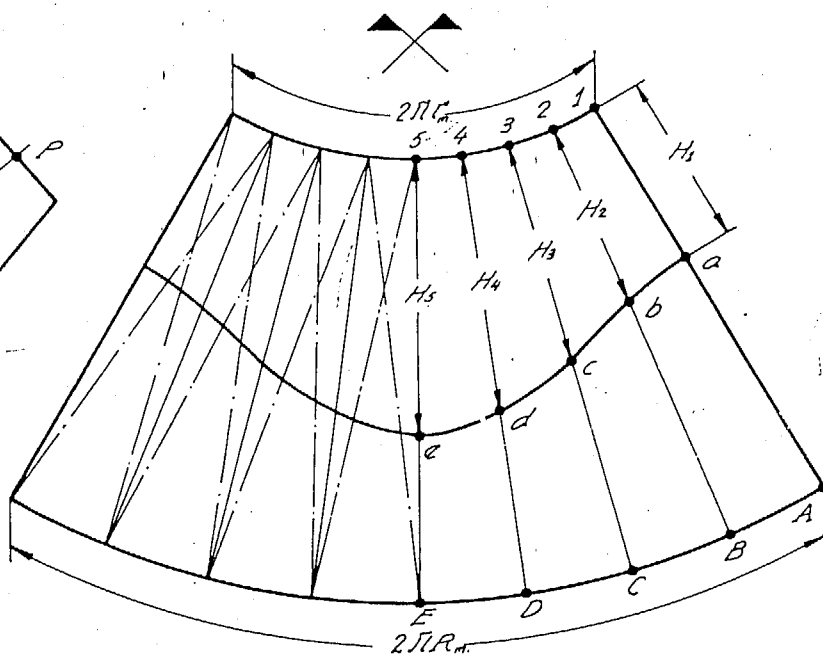


Figura 2

Tronco de cone oblíquo de bocas circulares e inclinadas entre si

O tronco de cone é representado na *elevação* por sua fibra média e sobre seus diâmetros descrevem-se semicircunferências que são divididas em um mesmo número de partes iguais (quatro, por exemplo), numerando com 1, 2, 3 os pontos de divisão da semicircunferência da boca superior e chamaremos *A, B, C*, etc. os pontos da semicircunferência da base. A partir dos pontos 2, 3, 4 e *A, B, C, D*, traçam-se perpendiculares aos seus respectivos diâmetros, determinando novos pontos e as ordenadas necessárias para achar as grandezas reais. Estes novos pontos são unidos entre si, formando triângulos sobre a superfície do tronco de cone.

Verdadeiras grandezas (fig. 2). Traça-se uma vertical indefinida e em um ponto qualquer dela marca-se o ponto 1 e 5 e a partir deste ponto marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3 e 4 tomadas da figura 1, formando assim novos pontos sobre a vertical e que também chamaremos 2, 3 e 4. Também a partir do ponto 1 e 5 e para baixo, marcam-se as ordenadas *B, C* e *D* da base do tronco de cone e desde os pontos resultantes na vertical traçam-se perpendiculares à mesma, nomeando-se com a mesma letra correspondente no semicírculo da base. Também desde o ponto 1 e 5 se traça uma perpendicular indefinida à vertical que se-

rá chamada *A*, isto porque os pontos *A, 1* e *5* estão contidos em um mesmo plano.

A linha *C* que foi feita no traçado para determinar as verdadeiras grandezas representa, neste caso, a posição exata do plano vertical em relação aos eixos horizontais das bocas.

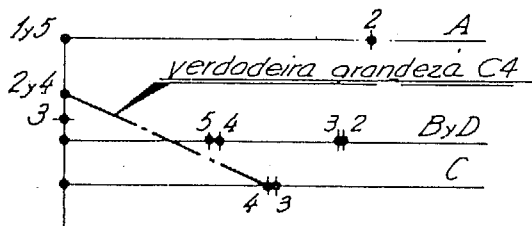
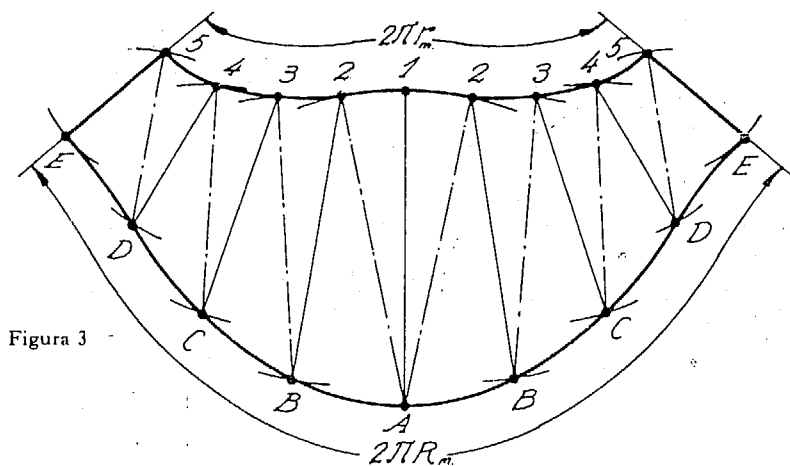
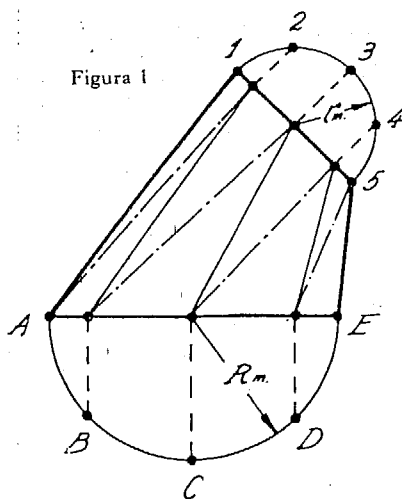
Depois transporta-se cada um dos comprimentos falsos *A2, B2, B3*, etc. da *elevação* sobre as perpendiculares anteriores marcadas com a mesma letra, medindo-as desde o ponto de intersecção formado por cada uma destas com a vertical, determinando assim novos pontos que chamaremos 2, 3, etc.

Estes pontos que foram achados unem-se com os da mesma origem que se encontram na vertical, obtendo-se assim as verdadeiras grandezas dos lados dos triângulos que traçamos sobre a *elevação* do tronco de cone.

Como exemplo, uniu-se o ponto 4 da horizontal *C* com o ponto 4 da vertical, sendo o comprimento da reta 4-4 a verdadeira grandeza da reta *C4*.

As retas *A1* e *A5* estão em verdadeira grandeza na *elevação*.

Desenvolvimento (fig. 3). O desenvolvimento do tronco de cone começa a ser feito a partir da linha *A1* da mesma maneira como se explica no exercício 1.



EXERCÍCIO

8

Cotovelo cônico

Nas figuras 1 e 2 foram feitas as representações vertical e de perfil do cotovelo em questão que é formado pela união de três virolas cônicas A, B e C.

Representação das virolas cônicas (fig. 1). Desde o ponto O traçam-se retas que dividem o arco-eixo do cotovelo em um número de partes iguais (três, por exemplo), marcando-se os respectivos diâmetros médios.

D_1^{ϕ} e D_4^{ϕ} . Caso os prolongamentos destes diâmetros não coincidirem no ponto O, o arco-eixo poderia ser dividido à vontade pelo desenhista.

Os diâmetros D_2^{ϕ} e D_3^{ϕ} podem ser calculados matematicamente assim:

$$D_2^{\phi} = D_1^{\phi} - \frac{D_1^{\phi} - D_4^{\phi}}{3}$$

$$D_3^{\phi} = D_2^{\phi} - \frac{D_1^{\phi} - D_4^{\phi}}{3}$$

Graficamente, os diâmetros D_2^{ϕ} e D_3^{ϕ} podem ser calculados assim como se pode ver na figura 3, ou seja, traça-se uma reta qualquer e desde um ponto desta, marcam-se os diâmetros D_1^{ϕ} e D_4^{ϕ} , formando assim dois novos pontos. A distância existente entre estes dois pontos é dividida em tantas partes iguais quantas forem as virolas que compõem o cotovelo (três, neste caso), determinando assim os diâmetros D_2^{ϕ} e D_3^{ϕ} .

Para desenvolver as virolas cônicas A, B e C, a operação é feita separadamente e da mesma maneira como no exercício anterior.

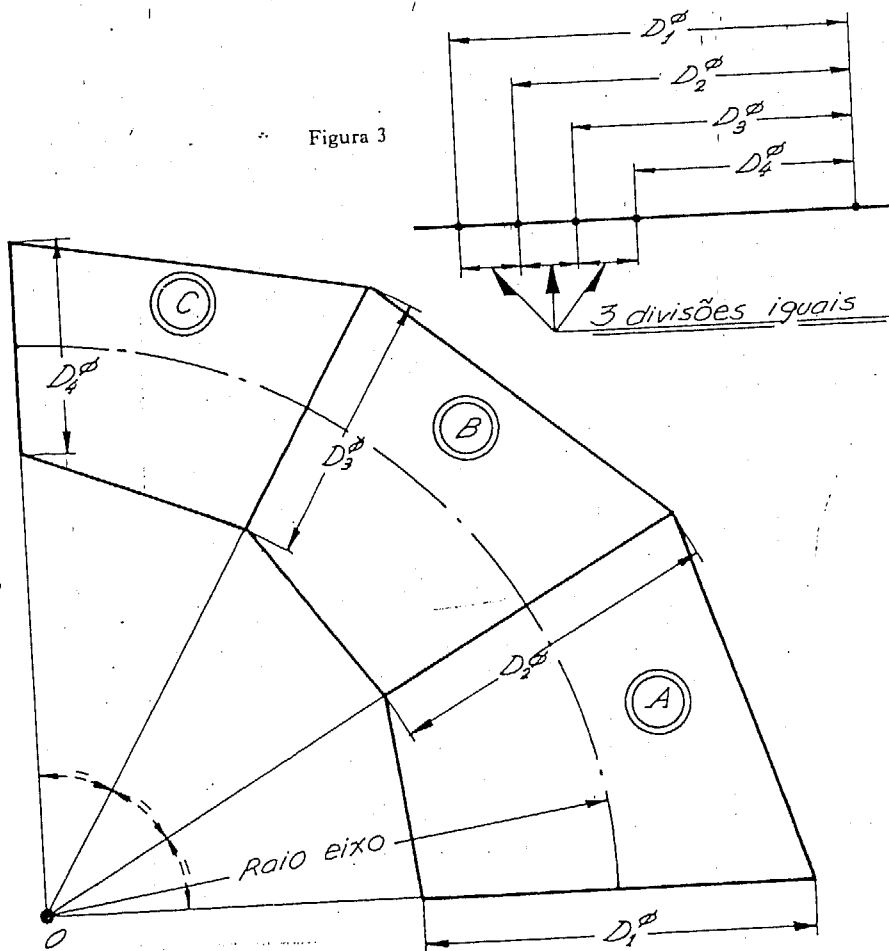


Figura 1

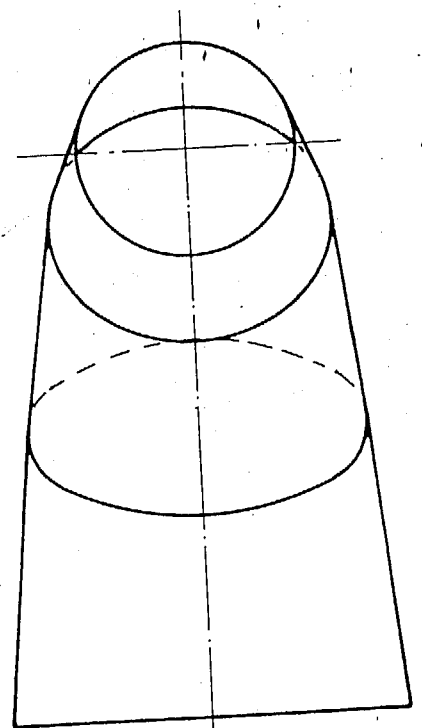
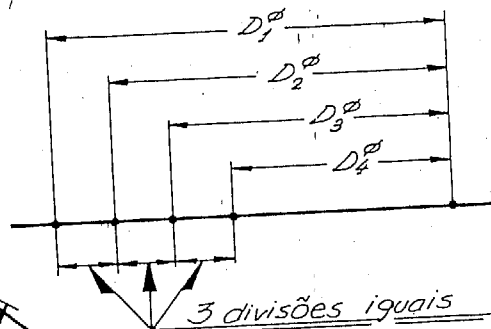


Figura 2

Tronco de cone oblíquo de bocas circulares inclinadas entre si, cujos eixos estão em planos paralelos

Triangula-se a superfície da *elevação* do tronco de cone da mesma maneira dos exercícios anteriores.

Na vista de *perfil* pode ser vista claramente a distância M existente entre os eixos de ambas as bocas e, portanto, os lados $A2$, $B2$, $B3$, etc. dos triângulos da parte anterior (fig. 1) cobrem os lados $A2'$, $B'2'$, $B'3'$, etc. dos triângulos da parte posterior.

Verdadeiras grandezas (fig. 3). Traça-se uma vertical qualquer, marcando-se nela o ponto 1 e 5. A partir deste ponto e para baixo, marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3 e 4. Também desde este ponto e para cima, marcam-se as ordenadas 2', 3' e 4'.

A partir do ponto 1 e 5, transporta-se sobre a vertical (para cima) a distância M tomada da figura 2, formando um novo ponto, a partir do qual se traça uma perpendicular à vertical colocando-se-lhe as letras A e E . Em ambas as partes deste novo ponto, marcam-se sobre a vertical as ordenadas B , C , D e B' , C' , D' , respectivamente, da base, assim como se ilustra na figura 3, e desde os pontos resultantes traçam-se perpendiculares à vertical de comprimentos indefinidos, designadas com a mesma letra correspondente no semicírculo da base.

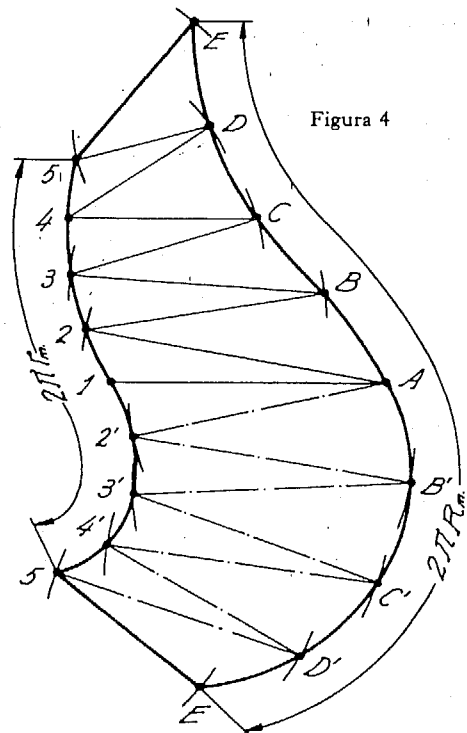
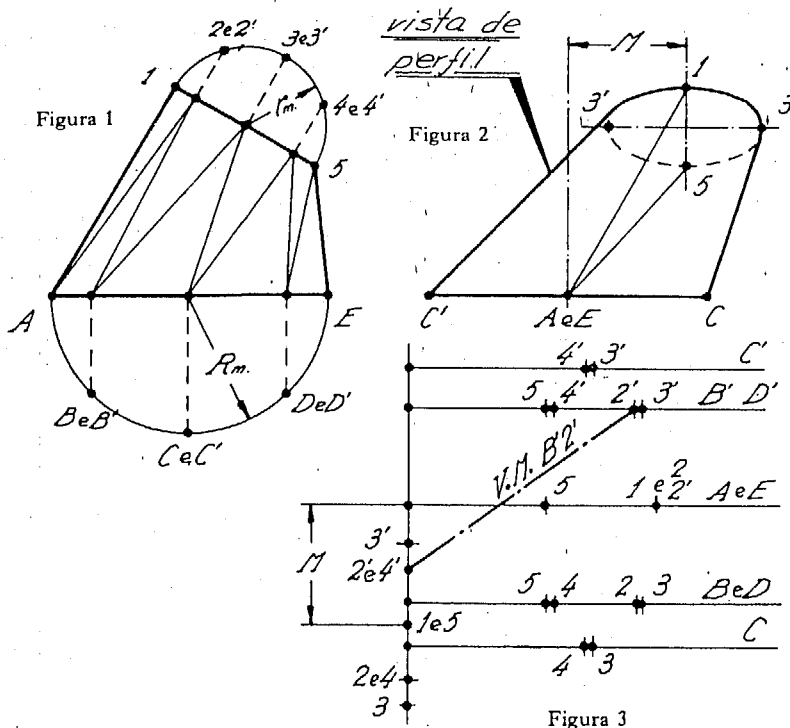
Depois transporta-se cada um dos comprimentos falsos $A1$, $A2$, $B2$, etc. e $A'2'$, $B'2'$, etc. da *elevação* sobre as linhas horizontais (fig. 3), marcados com a mesma letra, medidos desde o ponto de intersecção que forma

cada horizontal com a vertical, formando-se novos pontos que chamaremos 2, 3, 4, etc. Estes pontos achados unem-se com os da mesma origem que se encontram na vertical, determinando assim as verdadeiras grandezas de todas as linhas falsas.

Como exemplo, uniu-se o ponto 2' da horizontal B' com o ponto 2' da vertical, sendo o comprimento da reta 2'-2' a verdadeira grandeza da linha $B'2'$.

Desenvolvimento (fig. 4). Sobre duas régua flexíveis transportam-se os respectivos desenvolvimentos das circunferências médias das bocas, dividindo cada uma delas neste caso em oito partes iguais e colocando números nos pontos de divisão da régua correspondente à boca superior e letras na base.

Em uma posição adequada, traça-se a reta $A1$ tomada da figura 3 e, marcando o centro em A , descreve-se um arco de raio igual à grandeza real $A2$. No outro lado da reta $A1$ descreve-se outro arco de centro A e de raio igual à grandeza real $A2'$. Depois coloca-se o ponto 1 da régua flexível correspondente à boca sobre o ponto 1 do desenvolvimento e flexiona-se a régua até que os pontos 2 e 2' coincidam com os arcos anteriores, determinando assim os pontos 2 e 2'. Em seguida, descrevem-se arcos desde estes pontos de raios respectivos iguais às grandezas reais $B2$ e $B'2'$ para assim determinar os pontos B e B' do desenvolvimento. Continua-se desta maneira até terminar o desenvolvimento.



Conduto de boca circular e elíptica, paralelas entre si

Desenham-se sobre as bocas do conduto a semi-circunferência e a semi-elipse correspondentes, dividindo cada quadrante destas em um mesmo número de partes iguais (dois, por exemplo), traçando depois perpendiculares aos respectivos diâmetros desde os pontos de divisão, formando sobre estes pontos novos pontos que se unem entre si, formando também triângulos sobre a metade da superfície do conduto visto na *elevação* (esta vista é feita pela fibra média).

Verdadeiras grandezas (fig. 2). Traça-se uma vertical qualquer e em um ponto desta coloca-se o número 1. A partir deste ponto e para baixo, marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2 e 3 e também desde o ponto 1 e na mesma direção, marcam-se sobre a vertical as ordenadas B e C correspondentes à base. Desde os pontos resultantes traçam-se perpendiculares indefinidas à vertical, nomeando-as com a mesma letra correspondente no semi-quadrante de elipse da base.

Depois transporta-se cada um dos comprimentos falsos A2, B2, B3 e C3 da *elevação* sobre as horizontais correspondentes da figura 2 marcadas com a mesma letra, medindo-as desde o ponto de intersecção formado pela horizontal com a vertical, formando-se assim novos pontos que chamaremos 2, 3, etc.

Também desde o ponto 1 traça-se uma perpendicular à vertical, colocando-se nela a letra A, isto porque os pontos A e 1 estão situados em um mesmo plano, ou seja, no plano que passa pelas linhas centrais das bocas.

Os pontos achados sobre as horizontais unem-se com os da mesma origem das verticais, ficando as-

sim determinadas todas as verdadeiras grandezas necessárias para poder desenvolver o conduto.

Como exemplo, uniu-se o ponto 3 da horizontal C com o ponto 3 da vertical, sendo o comprimento da reta 3-3 a verdadeira grandeza da linha C3.

A linha A1 da elevação é a única desta vista que está em verdadeira grandeza.

Desenvolvimento (fig. 3). Sobre uma régua flexível transporta-se a metade do comprimento da circunferência média da boca superior, dividindo-se em quatro partes iguais e colocando números nos pontos de divisão. Também se transporta sobre outra régua flexível a metade do desenvolvimento da elipse da base, dividindo-a em quatro partes iguais e colocando letras nos pontos de divisão.

Em uma posição adequada, traça-se a reta C3 em sua verdadeira grandeza e em ambas as partes desta reta descreve-se um arco de centro em 3 com o raio igual ao comprimento real da linha 3B. Depois coloca-se o ponto C da régua flexível correspondente à base sobre o ponto C do desenvolvimento e flexiona-se até que os correspondentes pontos da régua coincidam com o arco anterior, determinando assim os pontos B-B. Marcando o centro nos pontos B, descrevem-se arcos de raios iguais ao comprimento real B2, flexionando-se a régua correspondente à boca circular até que seus pontos correspondentes coincidam com os arcos anteriores, formando assim os pontos 2-2 do desenvolvimento; continua-se desta maneira até completar meio desenvolvimento que servirá de gabarito para marcar a outra metade.

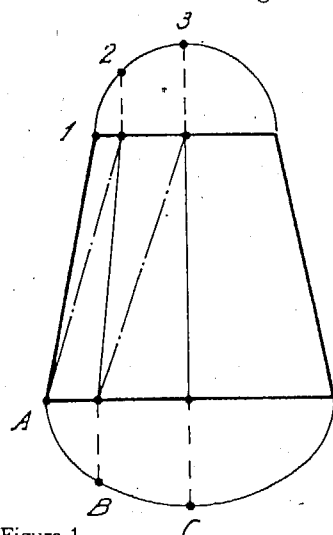


Figura 1



Figura 2

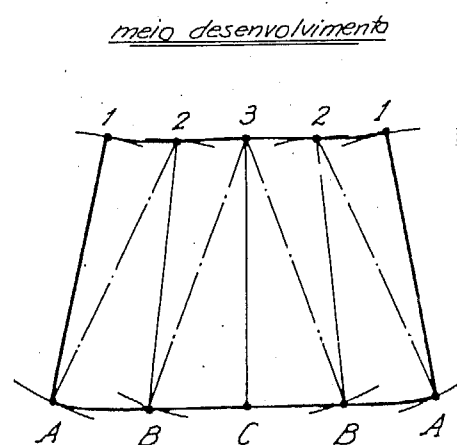


Figura 3

Conduto de bocas elípticas e inclinadas entre si

As figuras 1 e 2 representam o conduto nas projeções vertical e de perfil. A figura 3 representa a projeção vertical do mesmo conduto por sua fibra média, e sobre os diâmetros de suas bocas foram desenhadas suas correspondentes semi-elipses que foram divididas em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão das semi-elipses traçam-se perpendiculares aos seus respectivos diâmetros, determinando assim as ordenadas necessárias para determinar as grandezas reais de todas as linhas falsas.

As perpendiculares anteriores determinaram novos pontos sobre os diâmetros que se unem entre si, formando triângulos sobre a superfície da elevação.

Verdadeiras grandezas (fig. 4). Traça-se uma vertical qualquer e marca-se nela o ponto 1 e 5. A partir deste ponto e para baixo, marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3 e 4. Também desde es-

te ponto e na mesma direção, marcam-se as ordenadas *B*, *C* e *D* da base e desde os pontos resultantes traçam-se perpendiculares à vertical, colocando-se-lhes a mesma letra correspondente na semi-elipse da base. Também desde o ponto 1 e 5 se traça uma perpendicular à vertical, colocando-se nela a letra *A*, isto porque os pontos *A*, 1 e 5 estão situados em um mesmo plano.

Depois transporta-se cada um dos comprimentos falsos *A2*, *B2*, *B3*, etc. da figura 5 sobre as horizontais marcadas com as mesmas letras (fig. 4), medindo-se desde o ponto de intersecção que forma cada horizontal com a vertical, determinando assim novos pontos que chamaremos 2, 3, etc.

Estes pontos achados unem-se com os da mesma origem da vertical, achando-se assim todas as grandezas reais dos lados dos triângulos necessários para desenvolver o conduto que começa a ser desenvolvido em ambas as partes da linha *A1* (fig. 5) da mesma maneira como foi feito o conduto do caso anterior.

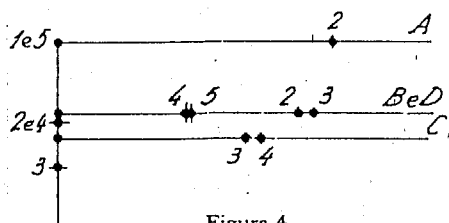


Figura 4

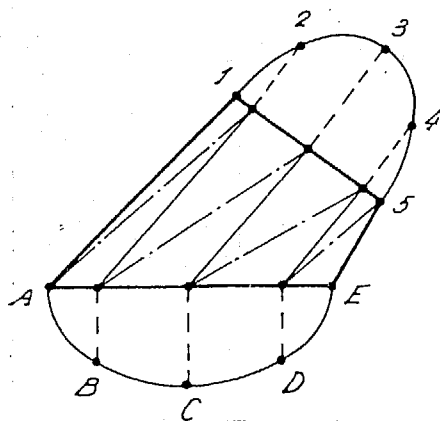


Figura 3

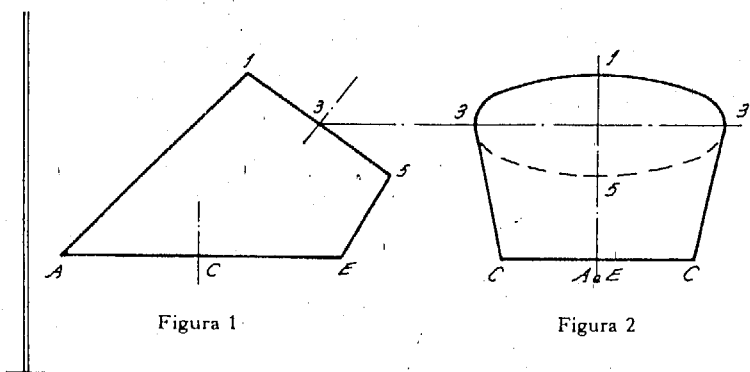


Figura 1

Figura 2

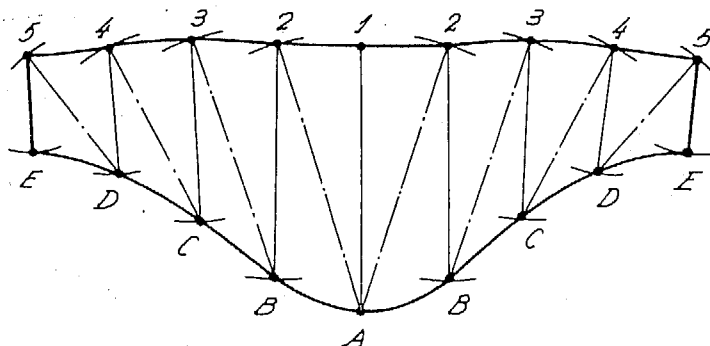


Figura 5

Conduto de bases elípticas e bocas superiores circulares e inclinadas entre si nas duas vistas

Este conduto, assim como os anteriores, é representado por sua fibra média, de tal forma que sua boca superior esteja situada em um plano projetante vertical, assim como se ilustra na figura 1. Portanto, gira-se a base elíptica (fig. 2), forando os graus dos eixos horizontais de ambas as bocas, vistas em planta, sendo o eixo AE o eixo da boca superior.

Depois divide-se a elipse da base em certo número de partes, sem necessidade de serem iguais, convindo, contudo, que os comprimentos dos arcos AB , BC , CD e DE sejam iguais aos comprimentos dos respectivos arcos ED' , $D'C'$, $C'B'$ e $B'A'$. Desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares à base do conduto (fig. 1), formando novos pontos e as ordenas A , B , C , D e B' , C' e D' .

Em seguida, descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da boca superior (fig. 1), dividindo-a, neste caso, em quatro partes iguais, formando os pontos de divisão 1, 2 e 2', 3 e 3', 4 e 4', 5, a partir dos quais se traçam perpendiculares ao diâmetro, determinando os pontos e as ordenadas necessárias para achar as verdadeiras grandezas. Os pontos achados sobre os diâmetros

de ambas as bocas são unidos entre si, assim como se ilustra.

As linhas $A2$, $B2$, $C3$ etc. da parte anterior do conduto cobrem as linhas $A2'$, $B'2'$, $C'3'$, etc. da parte posterior.

Verdadeiras grandezas (fig. 3). O traçado das verdadeiras grandezas deste caso é feito de forma análoga à dos traçados dos casos anteriores.

Desenvolvimento (fig. 4). Sobre uma régua flexível marca-se o desenvolvimento da boca circular, dividindo-se em oito partes iguais, e nos pontos de divisão colocam-se números de forma que o número 1 fique no centro.

Também se flexiona outra régua flexível até acoplá-la à elipse, marcando-se nela os pontos A , B , C etc., considerando-se que o ponto A deva ser colocado no centro.

O desenvolvimento começa a ser feito a partir da linha $A1$ e em ambas as partes dela, tendo muito cuidado ao tomar as verdadeiras grandezas da figura 3 e colocar corretamente a régua flexível da elipse porque as divisões não são iguais, como ocorre com a divisão da boca circular.

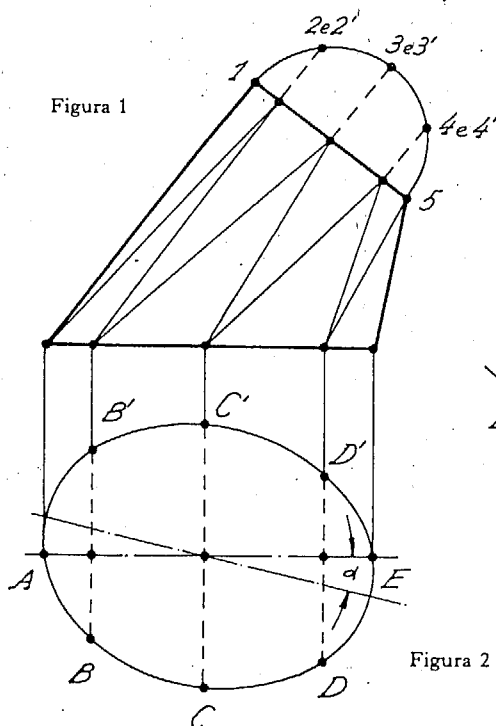


Figura 1

Figura 2

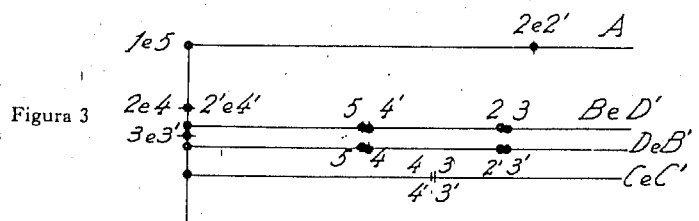


Figura 3

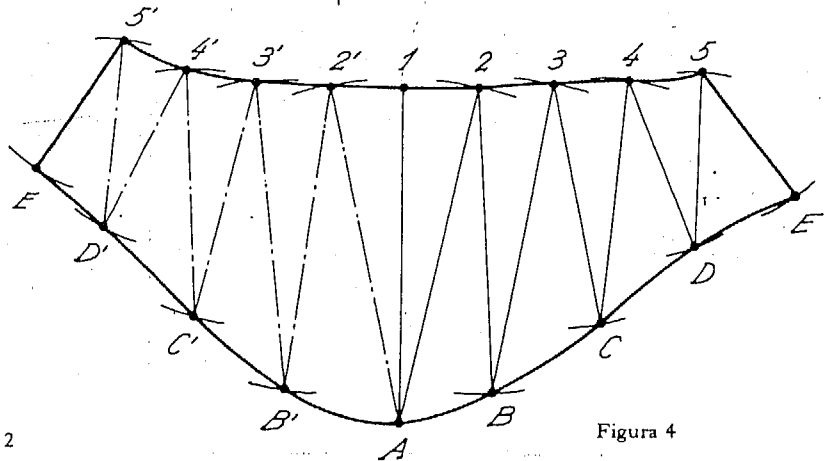


Figura 4

Traçado externo

TRANSFORMADORES

EXERCÍCIO

13

O sistema de triangulação se aplica facilmente ao desenvolvimento de qualquer tipo de peças por mais complicadas que estas pareçam, pois, como vimos nos exercícios anteriores, o sistema a seguir é parecido para todos.

Deve-se ter presente que as formas das faces ou das seções de qualquer peça a triangular, assim como a inclinação entre as faces, não afetam em absoluto o sistema para determinar as verdadeiras grandezas das *linhas falsas*.

Praticamente, todas as peças podem ser trianguladas, partindo da elevação assim como vimos nos exercícios anteriores; portanto, não é necessário representar outra vista, embora nesta parte do livro representaram-se quase sempre duas vistas. Isto foi feito para que se pudesse interpretar melhor o trabalho que está sendo estudado.

A figura 1 dá uma perspectiva de um transformador de boca circular e base quadrada, paralelas entre si e contidas em um mesmo eixo. A base está apoiada sobre o plano *H* de projeção com um dos lados, tocando o plano *V* de projeção que supomos ser transparente para que permita ver a elevação do transformador projetada conforme a flecha (o transformador também foi projetado sobre o plano de perfil).

Sobre a superfície do transformador traçou-se a linha real *A-3*, limitada pelos pontos *A* e *3*; esta linha, projetada sobre a elevação e a vista lateral, apresentará um comprimento falso por ser uma reta do espaço inclinada nos dois planos.

A posição da linha *A-3* sobre a superfície do transformador é a *hipotenusa* do triângulo que está sombreado, cujos catetos são a reta *A-3'* e a projetante *3-3'*. Por conseguinte, se for dada a medida *A-3'* (projetada verticalmente) e a projetante *3-3'*, poderá ser determinado o comprimento real *C-3* por estarem as duas linhas mencionadas em ângulo reto (ver "Geometria descritiva", fig. 59).

As figuras 2 e 3 dão as respectivas vistas em *elevação* e de *perfil* do mesmo transformador com a linha falsa *A-3'*. (Recordemos que esta linha é uma linha qual-

quer em que, neste caso, a extremidade *3* coincide com o centro da semicircunferência da boca e por isso sua ordenada é igual ao raio).

Na figura 3 vemos o triângulo *A-3-3'* projetado, equivalente ao sombreado da vista em perspectiva.

Para achar a verdadeira grandeza da reta *A-3*, traça-se uma vertical (fig. 4) de comprimento indefinido, marcando-se nela um ponto que chamaremos *1* e que representa o centro da boca superior. A partir do ponto *1* e para baixo, transporta-se a distância *N* igual à medida da metade da largura da base e pelo ponto que, resultar (neste caso *3'*) traça-se uma perpendicular indefinida à vertical, colocando-se nela a letra *A* em sua extremidade direita. Desde *1* e também para baixo, transportamos sobre a vertical a ordenada *3* formada da elevação, sendo *3* o ponto resultante. A diferença existente entre o ponto *3* da vertical e o ponto *3'* constituirá o comprimento da projetante.

A partir do ponto *3'* e sobre a horizontal *A*, transporta-se o comprimento falso *A-3'* tomado da elevação (fig. 2), resultando um ponto que chamaremos *3* e que, unido com o ponto *3* da vertical, determinaria a *verdadeira grandeza* da reta *A-3*.

Normas para achar as verdadeiras grandezas:

1º Traça-se uma linha vertical indefinida, marcando-se nela um ponto que indica o centro da boca do transformador.

2º Desde este ponto e para baixo, transportam-se as ordenadas da boca e numeram-se os pontos achados.

3º Desde o mesmo ponto da vertical e para baixo, transporta-se a distância *N* igual à metade da largura da base e pelo ponto resultante traça-se uma perpendicular à vertical de comprimento indefinido.

4º Transportam-se sobre a horizontal, e desde o vértice do ângulo reto formado com a vertical, os comprimentos falsos que foram traçados sobre a vista em *elevação*, numerando-se os pontos resultantes com o mesmo número correspondente à ordenada.

5º Unem-se os pontos achados sobre a horizontal com os pontos da mesma origem da vertical, determinando assim as verdadeiras grandezas das linhas desejadas.

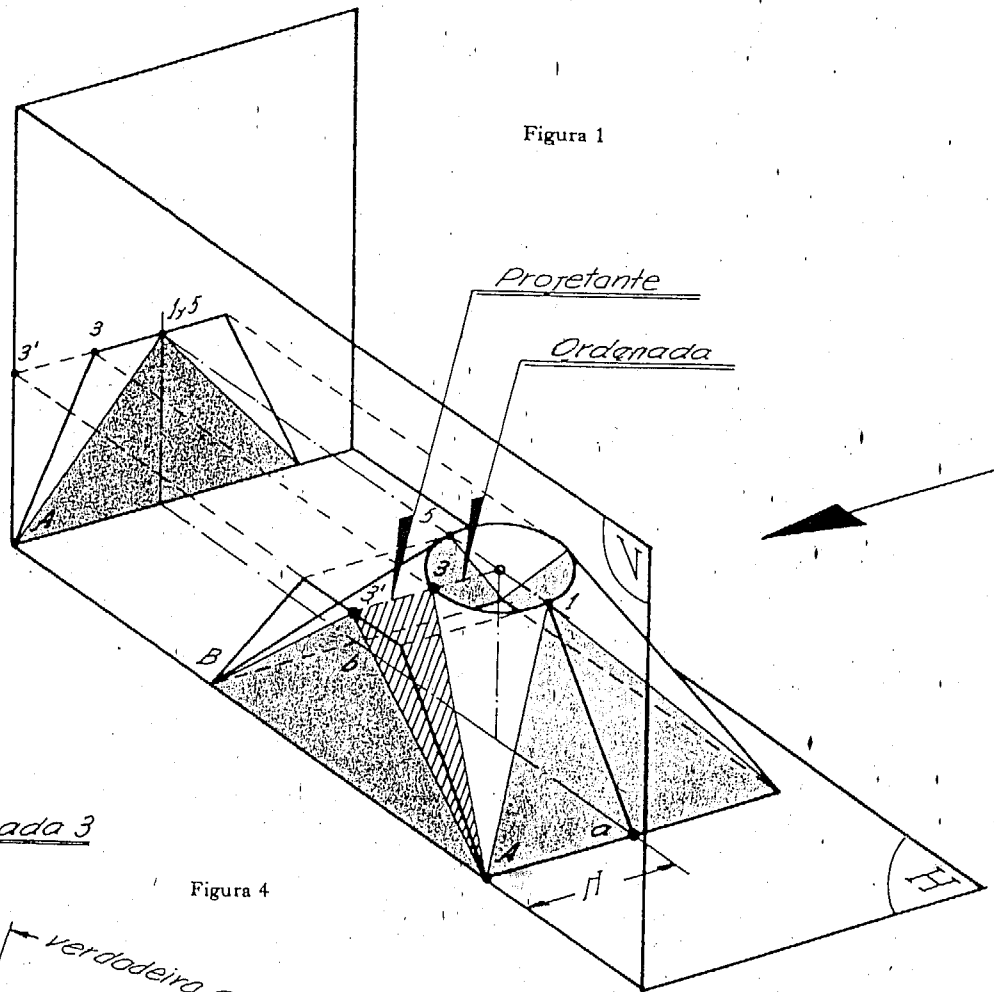


Figura 1

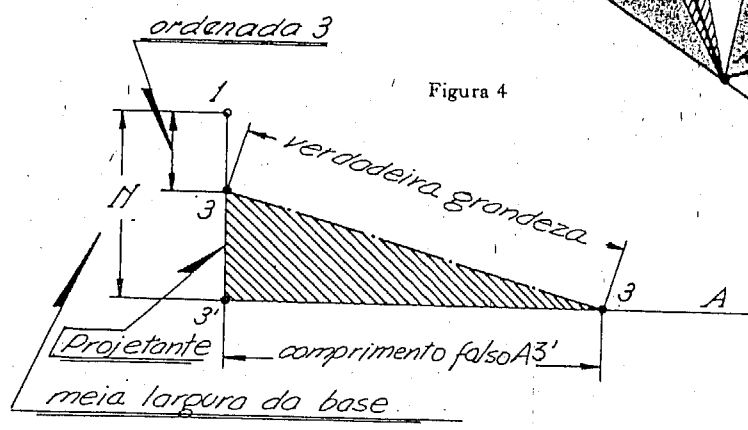


Figura 4

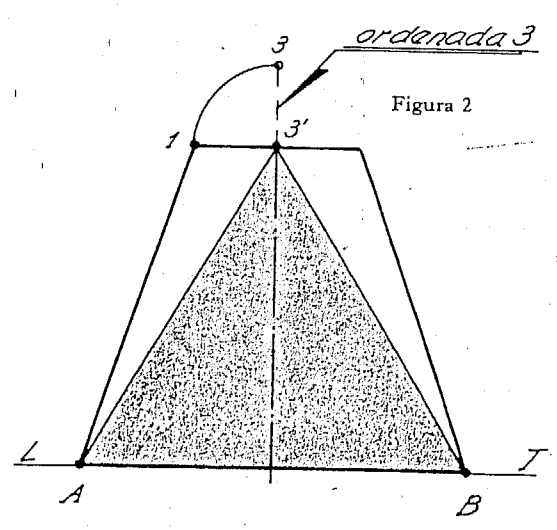


Figura 2

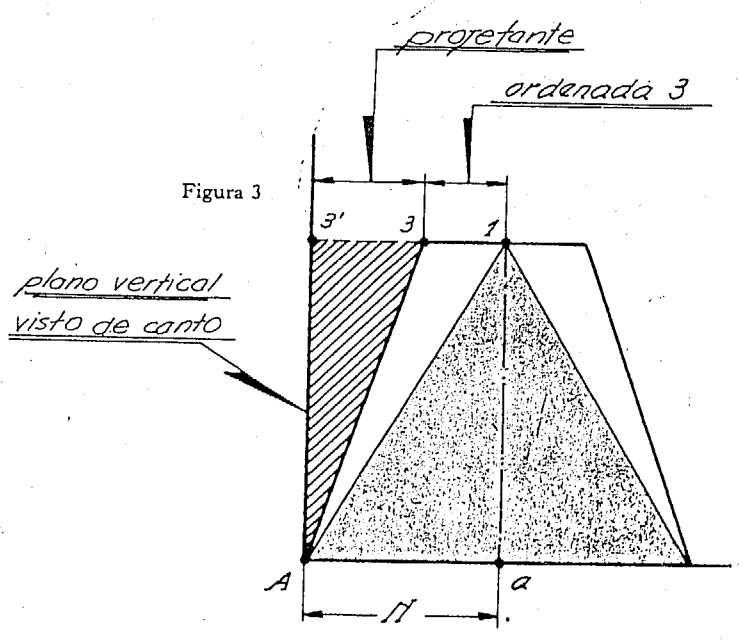


Figura 3

Transformador de base quadrada e boca central circular, paralela à base

Uma vez conhecido o sistema que explicamos, desenvolveremos este transformador com grande facilidade, usando somente a elevação (fig. 2), pois, embora também tenhamos representado a planta (fig. 1), esta só foi feita com a finalidade de que se pudesse interpretar melhor o trabalho que procuramos desenvolver.

O transformador é representado por sua fibra interna e sobre seu diâmetro descreve-se uma semicircunferência que é dividida em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando novos pontos e as ordenadas 2, 3 e 4 necessárias para achar as grandezas reais das geratrizes. Os novos pontos achados sobre o diâmetro médio são unidos com os respectivos pontos extremos A e B , como se ilustra na figura 2, ficando assim representadas as geratrizes $A1$, $A2$ e $A3$, que estão com uma grandeza falsa e que são iguais às respectivas geratrizes $B3$, $B4$ e $B5$.

Verdadeiras grandezas (fig. 3). Traça-se uma vertical indefinida, marcando-se nela o ponto 1 e 5 que representa o centro da boca circular. Desde este ponto e para baixo, transportam-se as ordenadas 2, 3 e 4 da boca, obtendo-se novos pontos que também chamaremos 2, 3, 4. A partir do mesmo ponto da vertical e também para baixo, transporta-se a distância N tomada da figura 1, determinando um novo ponto a partir do qual se traça uma perpendicular indefinida à vertical.

A partir deste ponto, transportam-se sobre a perpendicular anterior todas as grandezas falsas das geratrizes $A1 = B5$, $A2 = B4$ e $A3 = B3$ da elevação, determi-

nando novos pontos que recebem o número correspondente e que se unem com os pontos da mesma origem que se encontram na vertical, determinando assim as grandezas reais de todas as geratrizes. A título de exemplo, uniu-se o ponto 1 e 5 da horizontal com o ponto 1 e 5 da vertical, achando-se desta maneira a grandeza real $A1 = B5$.

Desenvolvimento (fig. 4). Em uma posição adequada, traça-se a reta AB de comprimento M tomada da figura 2. Marçando o centro em ambos os pontos, descrevem-se arcos de raios $A3 = B3$ iguais às grandezas reais da mesma origem da figura 3, determinando pela intersecção de ambos esses raios o ponto 3.

Além disso, marcando o centro nos respectivos pontos A e B , descrevem-se arcos de raios $A2 = B4$ e $A1 = B5$ iguais às grandezas reais da mesma origem da figura 3.

Depois transporta-se sobre uma régua flexível a metade do comprimento da circunferência neutra da boca que, neste caso, é dividida em quatro partes iguais. Em seguida, coloca-se o ponto central da régua flexível sobre o ponto 3 do desenvolvimento e flexiona-se até que seus correspondentes pontos de divisão coincidam com os arcos anteriores, determinando assim os pontos 2, 1 e 4, 5 (desenha-se a curva formada pela régua); estes pontos são unidos com os respectivos pontos A e B .

Com a distância N da figura 1 descrevem-se arcos de centros A e B (fig. 4) e com a distância H da figura 2 descrevem-se arcos desde 1 e 5, cortando os arcos anteriores em a e b . Estes pontos são unidos com os pontos 1, A , 5 e B , como se ilustra na figura 4, ficando assim desenvolvido meio transformador.

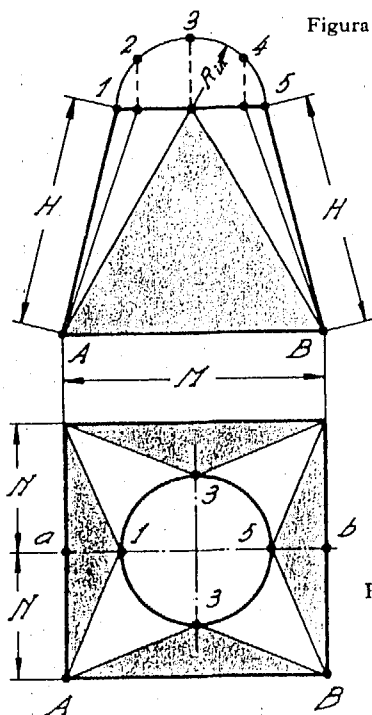


Figura 2

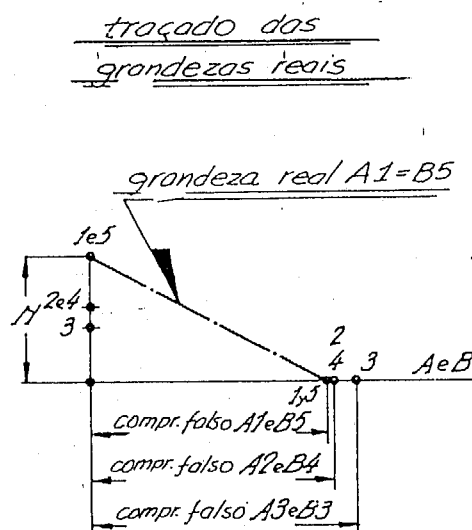


Figura 3

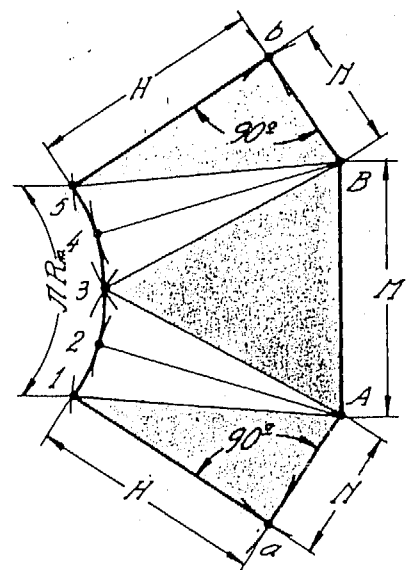


Figura 4

EXERCÍCIO

15

Transformador de base retangular e boca circular, paralelas entre si, situadas em eixo diferente

As respectivas figuras 1 e 2 representam a projeção vertical e de perfil do transformador por sua fibra interna (não é necessário representar o perfil).

Sobre a superfície da elevação traçam-se os triângulos necessários, seguindo o mesmo procedimento do caso anterior.

As grandezas reais (fig. 3) de todas as geratrizes e o desenvolvimento de meio transformador (fig. 4) são determinados analogamente ao caso anterior.

Nas ilustrações das figuras 1, 2, 3 e 4 pode ser visto claramente o exercício resolvido.

Figura 1

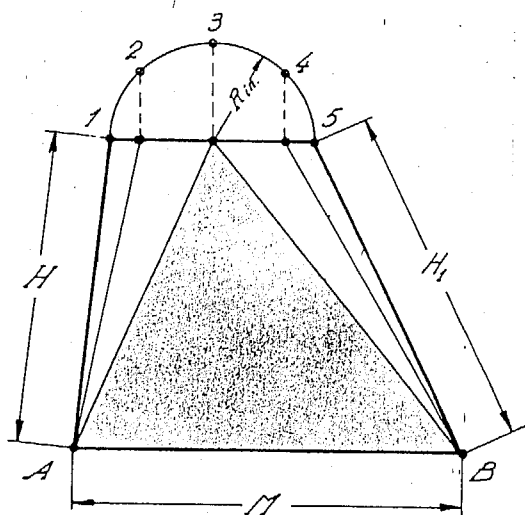


Figura 2

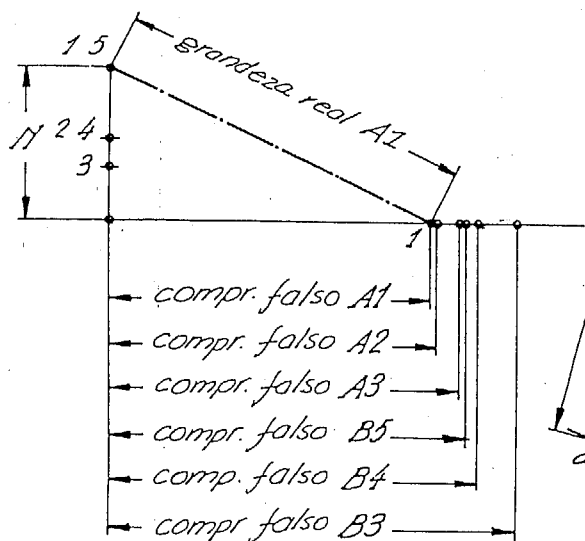
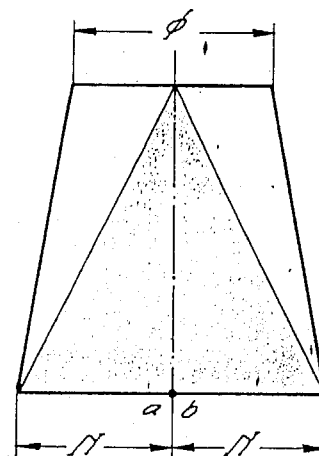


Figura 3

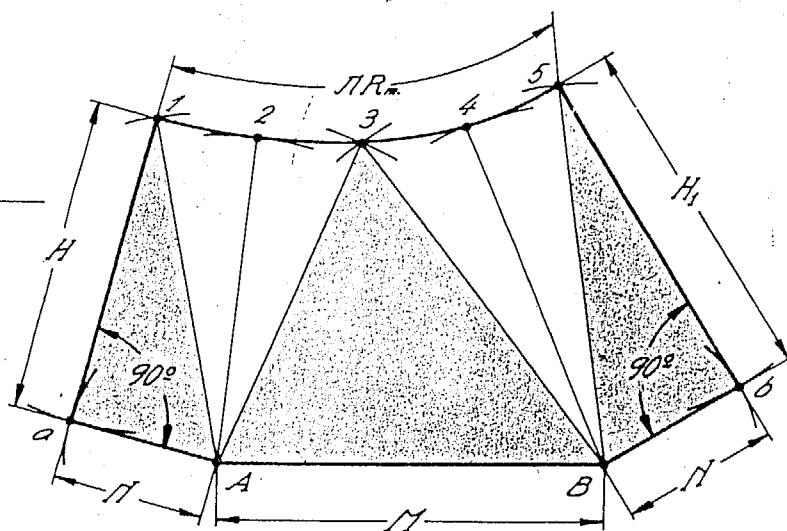


Figura 4

Transformador de base retangular e boca circular, paralelas entre si, estando seus eixos situados em plano diferente

Os eixos da boca circular e da base não estão em um mesmo plano, como podemos ver na vista de perfil (fig. 2), já que o plano que passa pelo centro da boca circular não corta o lado $A'-A$ no centro, mas sim no ponto a .

A representação do transformador e das geratrizes falsas é feita da mesma maneira do exercício 14.

As geratrizes $A1, A2, A3, B3, B4$ e $B5$ da parte anterior (fig. 1) cobrem as geratrizes $A'1, A'2, A'3, B'3, B'4$ e $B'5$, respectivamente.

Verdadeiras grandezas (fig. 3). Traça-se uma vertical indefinida marcando sobre esta o ponto 1 e 5 que representa o centro da boca circular. Desde este ponto e para baixo, marcam-se sobre a vertical as ordenadas $2 = 4 = 2' = 4'$ e $3 = 3'$. Também desde o ponto 1 e 5 e para baixo, marcam-se as distâncias L e N da figura 2. A partir dos pontos resultantes, traçam-se perpendiculares à vertical, marcando nelas suas correspondentes letras.

Transportam-se os comprimentos falsos da elevação $A1, A2, A3, B3, B4$ e $B5$ sobre a perpendicular que tem as letras A e B e sobre a perpendicular A' e B' transportam-se os comprimentos falsos $A'1, A'2, A'3, B'4$ e $B'5$ que se encontram na parte posterior das linhas $A1, A2, A3$, etc.

Nos novos pontos achados colocam-se os números correspondentes, unindo-os com os pontos da mesma origem da vertical, obtendo-se assim as grandezas reais de todas as geratrizes. A figura 3 só representou as grandezas reais $A3$ e $A'3$.

Desenvolvimento (fig. 4). Como o desenvolvimento foi feito inteiro, transporta-se sobre a régua flexível o desenvolvimento completo da circunferência média da boca que, neste caso, é dividida em oito partes iguais. O desenvolvimento é feito de forma análoga à do exercício 14, começando a ser desenvolvido a partir da reta $B-B'$.

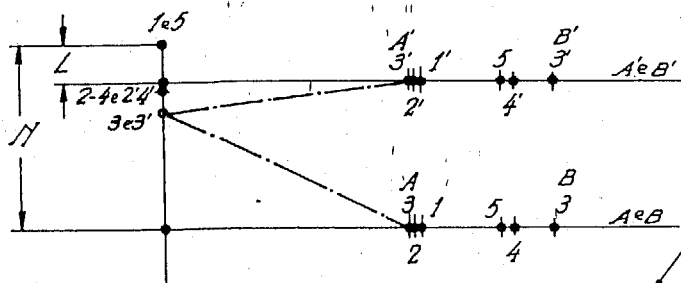


Figura 3

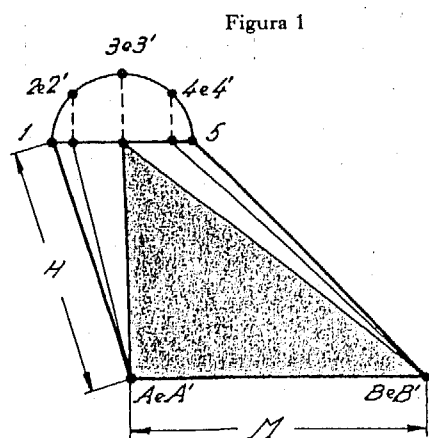


Figura 1

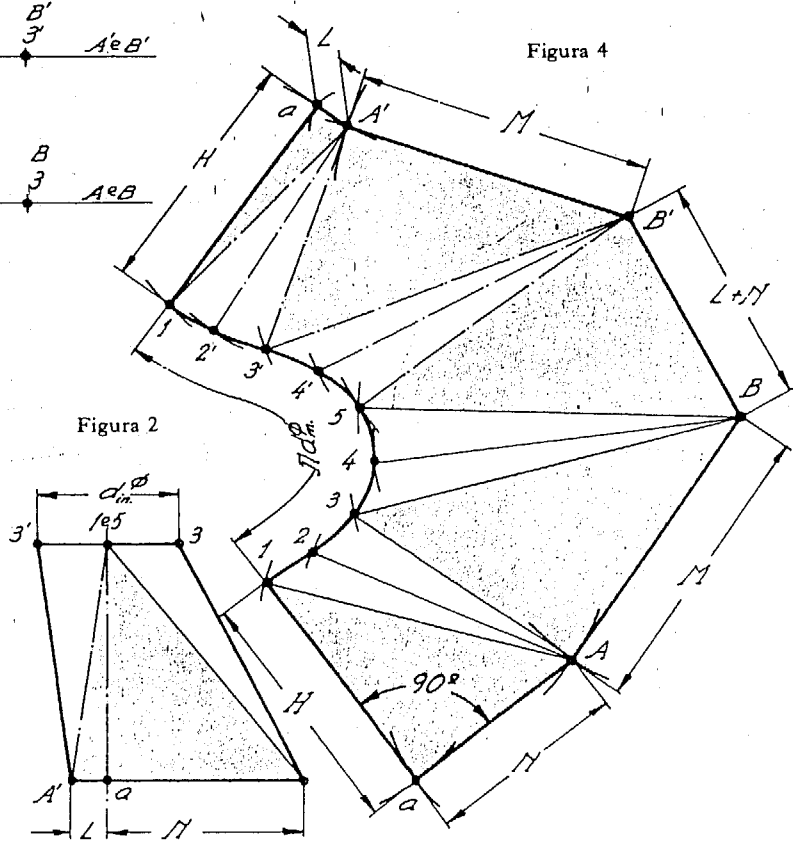


Figura 4

Figura 2

EXERCÍCIO

17

Transformador de base retangular e de boca elíptica

Este transformador também é representado por sua fibra interna e só é necessário fazer a *elevação*, como nos casos anteriores, embora neste caso também representamos a *planta*.

Sobre o diâmetro da boca elíptica desenha-se a semi-elipse correspondente, dividindo-a em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). A partir dos pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando assim as ordenadas 2, 3 e 4 e os novos pontos sobre o

diâmetro que se unem com os pontos *A* e *B*, como se pode ver na ilustração, determinando a representação das geratrizes falsas *A1*, *A2*, etc.

As verdadeiras grandezas das geratrizes (fig. 3) e a metade do desenvolvimento do transformador (fig. 4) podem ser feitas da mesma maneira que o exercício 14, considerando que se deve transportar sobre a régua flexível a metade do comprimento da elipse neutra da boca.

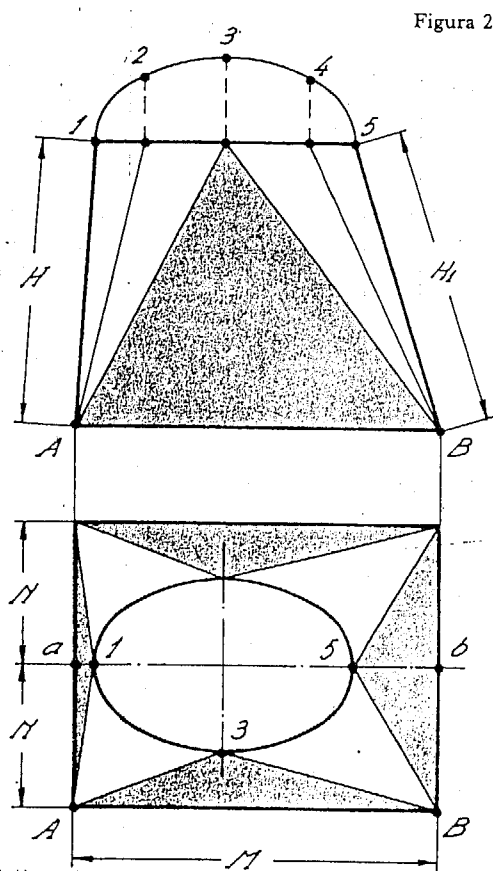


Figura 1

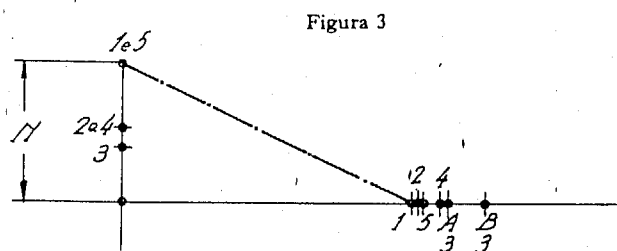


Figura 3

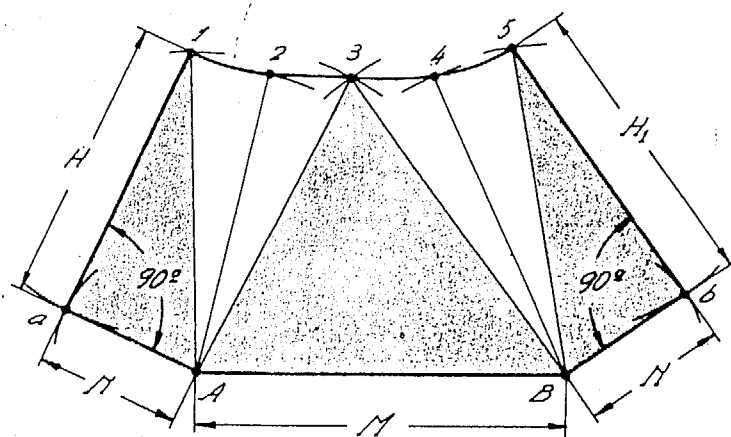


Figura 4

Transformador de base retangular e boca circular, perpendiculares entre si.

As figuras 1 e 2 representam a *elevação e perfil* do transformador em questão por sua fibra interna.

Geratrizes de separação A3 e B3. A partir do ponto *A* (fig. 2), traça-se uma tangente à circunferência interna da boca do transformador, determinando assim o ponto de tangência *3* que se projeta perpendicularmente sobre o diâmetro da boca do transformador (fig. 1), determinando sobre este um novo ponto e o ponto *3* sobre a semicircunferência desenhada sobre este diâmetro. O novo ponto achado sobre o diâmetro é unido com os pontos *A* e *B* por meio de retas geratrizes, sendo estas as geratrizes de separação.

os arcos *1-3* e *3-5* da semicircunferência descrita sobre o diâmetro interno do transformador são divididos, cada um deles, em um número adequado de partes iguais (duas, por exemplo) e desde os pontos *2* e *4* traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando novos pontos e as ordenadas necessárias para achar as grandezas reais das geratrizes. Estes novos pontos são unidos com os respectivos pontos *A* e *B*, assim como ilustra a figura 1, representando-se desta maneira as geratrizes falsas.

Grandezas reais (fig. 3). Traça-se uma vertical e marca-se nela o ponto *1* e *5* que representa o centro da boca. A partir deste ponto e para baixo, marcam-se sobre a vertical as ordenadas *2*, *3* e *4* da figura 1 e colocam-se nos pontos resultantes o

número correspondente. Também desde o ponto *1* e *5* se marca sobre a vertical a distância *N* da figura 2, determinando um novo ponto a partir do qual se traça uma perpendicular à vertical que chamaremos *A* e *B*.

A partir deste novo ponto transportam-se sobre a perpendicular *A* e *B* todas as geratrizes falsas *A1*, *A2*, *A3*, *B3*, *B4* e *B5* da figura 1, determinando os pontos que chamaremos *1*, *2*, *3A*, *3B*, *4* e *5* que se unem com os pontos da mesma origem que estão situados sobre a vertical, obtendo-se assim todas as grandezas reais das geratrizes. Como exemplo, uniu-se o ponto *3* da vertical com os respectivos pontos *3A* e *3B* da perpendicular *A* e *B*, determinando-se assim as grandezas reais das geratrizes de separação *A3* e *B3*.

Desenvolvimento. Na figura 4 foram desenhadas as circunferências interna, média e externa da boca circular do transformador a uma escala maior e desde o centro desta foram traçadas retas que passam pelos pontos de divisão *1*, *2*, *3*, etc. da semicircunferência interna, determinando novos pontos sobre a semicircunferência média. Acopla-se uma régua flexível sobre a semicircunferência média, marcando-se nela estes novos pontos, sendo esta a régua flexível que se transporta ao desenvolvimento.

A figura 5 representa o desenvolvimento do transformador que começou a ser feito a partir da reta *A-A*.

Figura 4

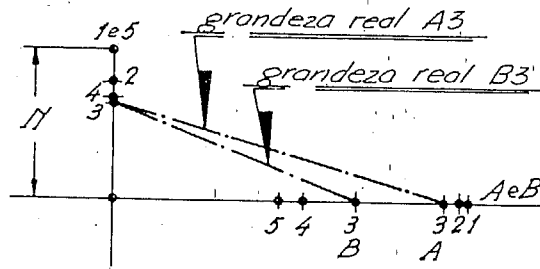
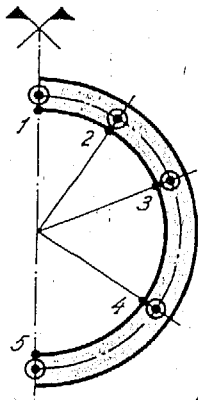


Figura 3

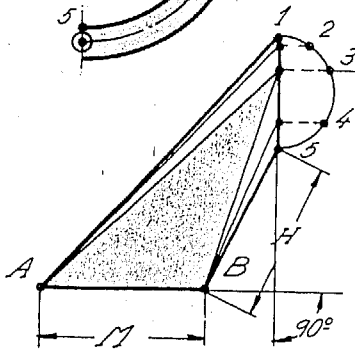


Figura 1

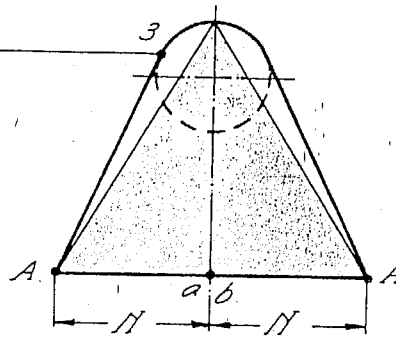


Figura 2

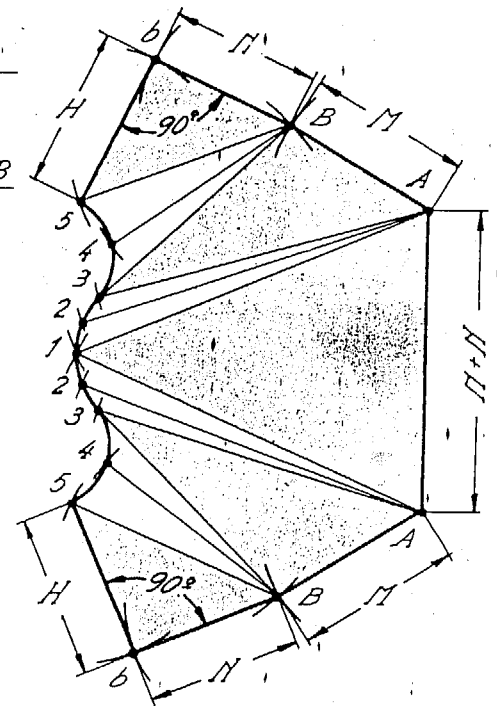


Figura 5

Transformadores de base retangular e boca circular inclinadas entre si

Este transformador, como os anteriores, é representado por sua fibra interna.

Geratrizes de separação (fig. 1). Prolonga-se o lado AB da base e o diâmetro da boca, determinando o ponto de intersecção b_1 , a partir do qual se traça uma perpendicular ao prolongamento do diâmetro da boca, marcando-se nela a distância N tomada do *perfil*, obtendo-se assim o ponto B_1 . A partir deste ponto traça-se uma tangente à semi-circunferência descrita sobre o diâmetro interno da boca, determinando o ponto de tangência 3 .

Os arcos $1-3$ e $3-5$ são divididos, cada um deles, em um número adequado de partes iguais (duas partes iguais, por exemplo) e desde os pontos de

divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando assim as ordenadas necessárias para achar as grandezas reais. Os pontos achados sobre o diâmetro ao traçar as perpendiculares unem-se com o pontos A e B , representando-se assim as geratrizes falsas $A1, A2, A3, B3, B4$ e $B5$.

As grandezas reais de todas as geratrizes (fig. 3) e o desenvolvimento do transformador são feitos de forma análoga à do caso anterior. Também se transporta sobre a régua flexível o desenvolvimento da circunferência média, como foi explicado na figura 4 do mesmo caso.

Nota. Ver o exercício 77 da terceira parte.

Figura 3

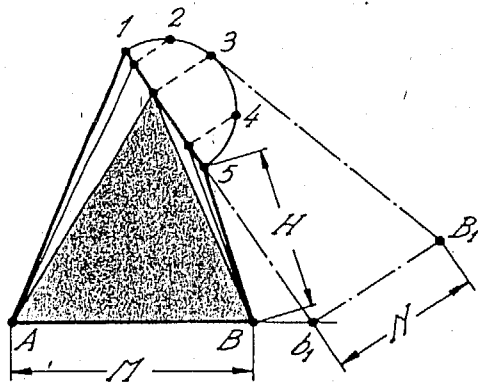
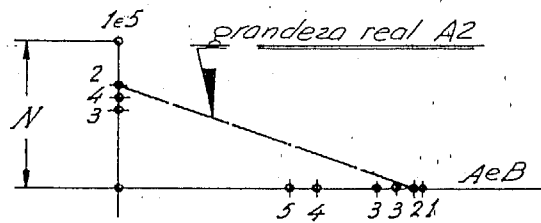


Figura 1

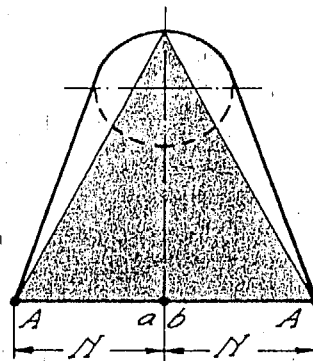


Figura 2

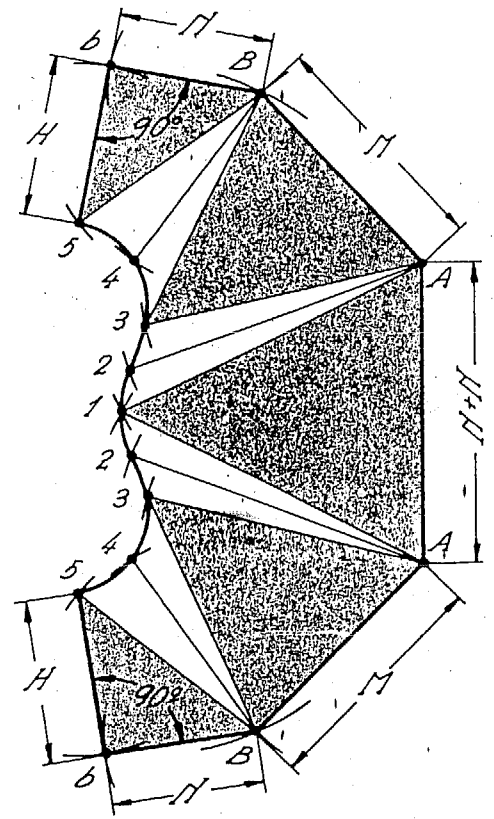


Figura 4

Cotovelo de boca circular e quadrada formando 90°

As figuras 1 e 2 dão as vistas em *elevação* e de *perfil* do cotovelo em questão por sua fibra interna que é formada por um cilindro truncado, um transformador e um prisma quadrado.

Prolongam-se as bocas do transformador até cortar-se no ponto B_1 (fig. 1). Desde este ponto traça-se uma perpendicular ao prolongamento da reta AD (fig. 2), determinando desta maneira um novo ponto que também chamaremos B_1 , a partir do qual se traça uma tangente à boca superior do transformador que, neste caso, é representado como uma circunferência, determinando assim o ponto de tangência 3 . Os arcos $1-3$ e $3-5$ são divididos em certo número de partes iguais (duas partes, por exemplo, cada um dos arcos) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao eixo vertical da boca, obtendo-se assim novos pontos e as ordenadas $2, 3$ e 4 . Prolongam-se estas perpendiculares que formam as geratrizes $1, 2, 3, 4$ e 5 do cilindro, visto em *elevação*, e os novos pontos sobre a linha de intersecção do cilindro e do transformador que se unem com os pontos A e B , assim como se vê na ilustração, ficando desta maneira representadas as geratrizes falsas do transformador.

Desenvolvimento do cilindro (fig. 3). Como o cilindro é representado nas figuras 1 e 2 por sua fibra interna, passam-se os pontos $1, 2, 3$, etc. da circunferência interna (fig. 2) à circunferência média, assim como se explica no exercício 18 (fig. 4), acoplando-se uma régua flexível à circunferência média e marcando-a depois dos pontos de divisão. Esta régua flexível se estende, marcando-se todos os seus pontos sobre uma reta (fig. 3). Desde estes pontos traçam-se perpendiculares à reta, transportando-se-lhes os comprimentos das geratrizes da mesma origem do cilindro, visto em *elevação*, determinando os novos pontos que também chamaremos $1, 2, 3$ etc. que se unem por

meio de uma curva contínua, ficando assim desenvolvido o cilindro.

Grandezas reais (fig. 4). Sobre uma vertical qualquer marca-se o ponto 1 e 5 que representa o centro da boca do transformador e a partir deste ponto e para baixo, marcam-se sobre a vertical as ordenadas $2, 3$ e 4 da figura 2, determinando novos pontos sobre a vertical que também chamaremos $2, 3$ e 4 .

A partir do ponto 1 e 5 e também para baixo, transporta-se sobre a vertical a distância P da figura 2, e desde o ponto resultante traça-se uma perpendicular à vertical. A partir deste ponto transportam-se sobre a perpendicular todos os comprimentos das geratrizes falsas do transformador, tomadas da *elevação*, determinando os novos pontos que chamaremos $1, 2, 3A, 3B, 4$ e 5 que, unidos com os pontos da mesma origem da vertical, fazem achar todas as grandezas reais das geratrizes do transformador.

Desenvolvimento do transformador (fig. 5). O desenvolvimento começa a ser traçado a partir da reta AA e pode ser feito de forma análoga às anteriores, mas transportando-se ao desenvolvimento uma régua flexível que se acopla à curva $5, 4, 3$, etc. do desenvolvimento do cilindro da figura 3, marcando-se nela os pontos $5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4$ e 5 .

Desenvolvimento do prisma (fig. 6). Em uma posição adequada traça-se uma reta de comprimento igual à soma dos lados internos do prisma, dividindo-a em quatro partes iguais, determinando os pontos de divisão C, C, D, D e C , a partir dos quais se traçam perpendiculares de comprimentos iguais aos das arestas CB e DA do prisma, visto em *elevação*, determinando os novos pontos que também chamaremos B, B, A, A e B que se unem por meio de retas, ficando assim desenvolvido o prisma quadrado.

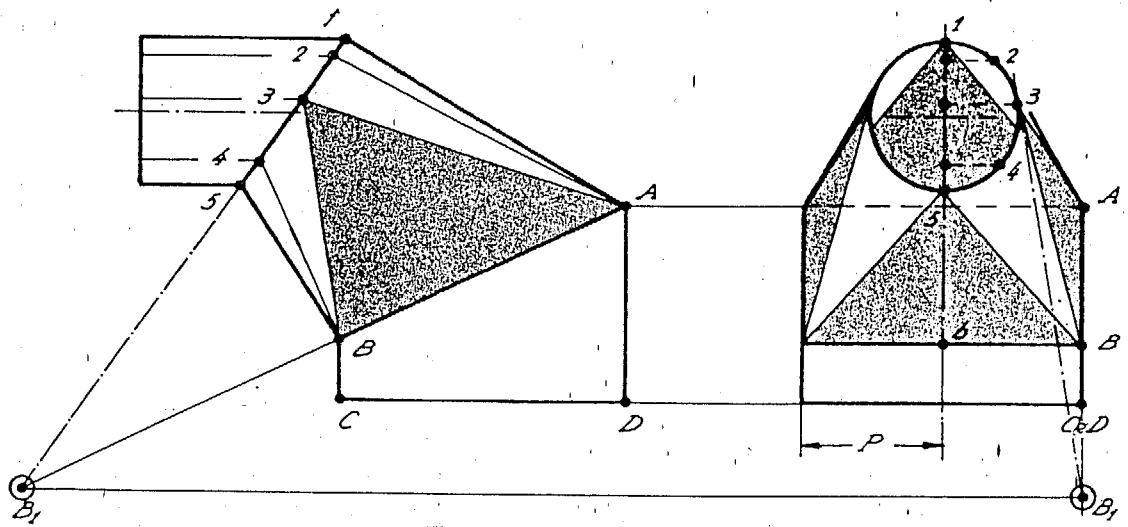


Figura 1

Figura 2

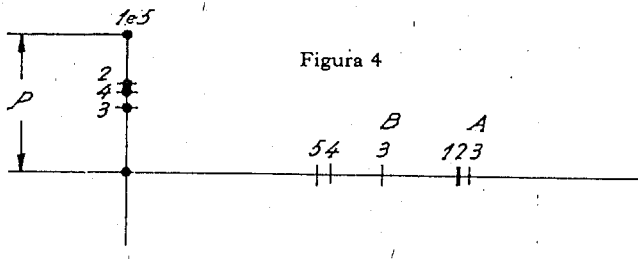


Figura 4

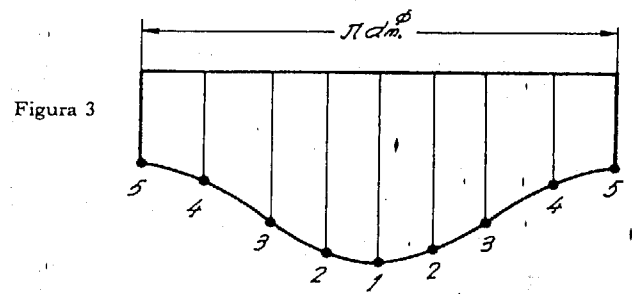


Figura 3

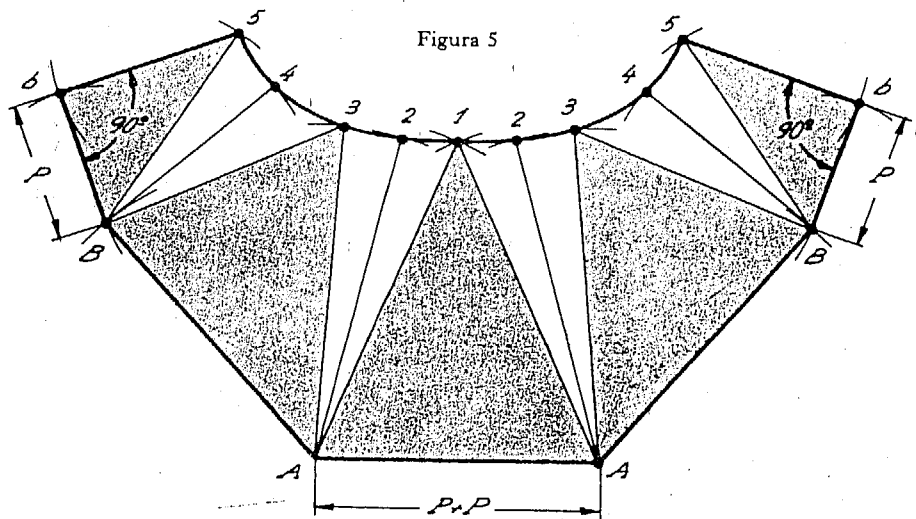


Figura 5

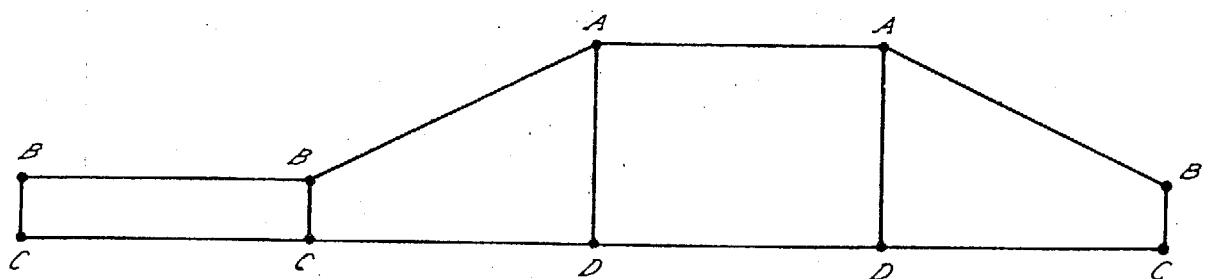


Figura 6

Transformador de boca circular e de base semicircular e semiretangular, paralela à boca

Este transformador é formado por meio tronco de cone oblíquo de bocas circulares e paralelas e por meio transformador.

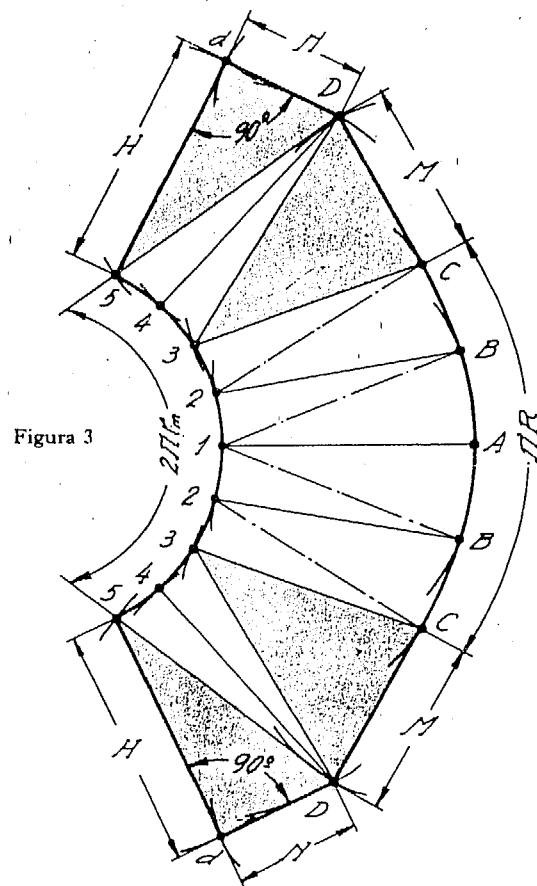
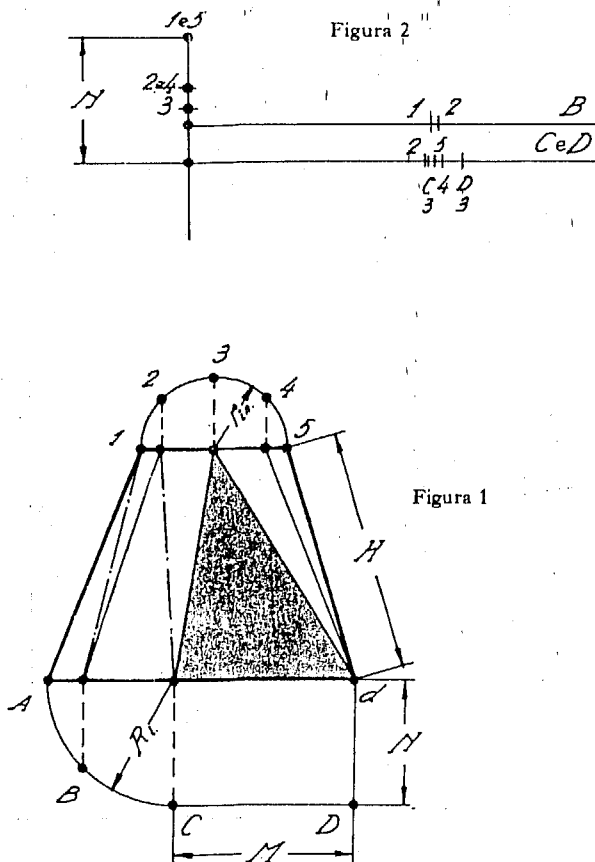
O transformador é representado por sua fibra interna (fig. 1) e sobre suas correspondentes bocas desenha-se a metade do contorno de ambas as bocas. A semicircunferência correspondente à boca circular é dividida em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando assim as ordenadas da boca superior. O quadrante da base é dividido em duas partes iguais, neste caso, e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares à base, representando-se desta maneira as ordenadas correspondentes.

Todos os pontos achados sobre ambas as bocas unem-se formando triângulos sobre a *elevação*, assim como se ilustra na figura 1, representando-se desta maneira todas as linhas falsas.

Grandezas reais (fig. 2). Sobre uma vertical

qualquer marca-se o ponto 1 e 5. Desde este ponto marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3 e 4 da boca circular, determinando os novos pontos que chamaremos 2, 3 e 4 da boca circular, determinando os novos pontos que chamaremos 3, 2 e 4. Na mesma direção e também desde o ponto 1 e 5, marcam-se sobre a vertical as ordenadas B e C da base e desde os pontos resultantes traçam-se perpendiculares à vertical que serão chamadas de B, C e D. Sobre estas retas transportam-se os correspondentes comprimentos de todas as linhas falsas da *elevação*, determinando novos pontos que, unido com os pontos da mesma origem que se encontram sobre a vertical, determinariam os comprimentos reais de todas as linhas traçadas sobre a *divisão*.

Desenvolvimento (fig. 3). Primeiramente traça-se a reta *A1*, triangulando-se em ambas as partes desta o tronco de cone e por último, triangula-se o resto do transformador.



EXERCÍCIO

22

*Transformador de boca circular e de base
semicircular e semiretangular, inclinada entre si*

Este transformador é semelhante ao anterior, com a variante de que ambas as bocas são inclinadas entre si.

As geratrizes de separação podem ser achadas como se explica no exercício 19 e o traçado das linhas falsas sobre a *elevação* e suas verdadeiras

grandezas podem ser determinadas como as do caso anterior.

Desenvolvimento (fig. 3). Este desenvolvimento é feito de forma análoga à dos estudados anteriormente.

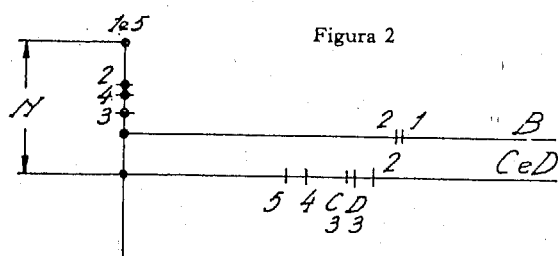


Figura 2

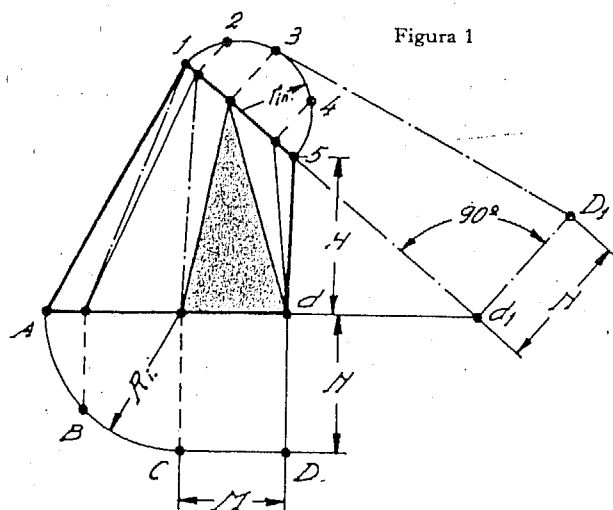


Figura 1

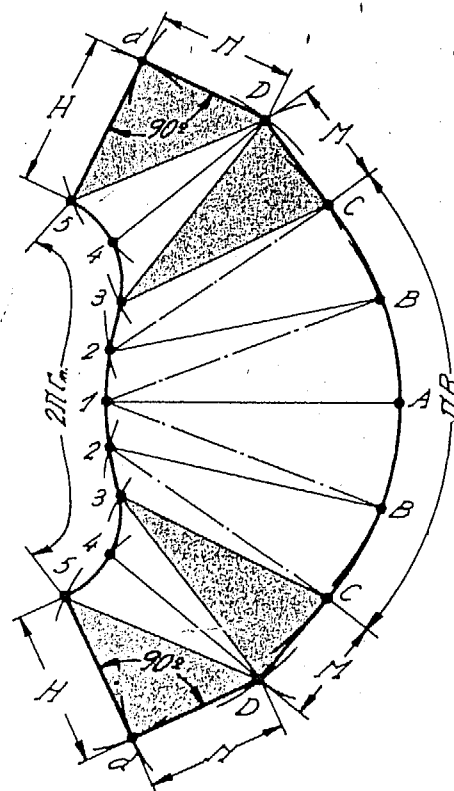


Figura 3

PEÇAS DE DUAS VIAS (CALÇAS)

EXERCÍCIO

23

Possivelmente, os problemas mais importantes que podem ser apresentados na construção de condutos para ar, grupos de captação de pó, etc., são os relacionados com o traçado de desenvolvimentos das peças de união.

Estas peças são apresentadas em certo número de formas diferentes, dependendo sempre da forma que tiverem as peças a unir, sendo a mais generalizada a peça que têm como função unir um cilindro com outros dois de diâmetros menores, sendo, neste caso, a calça de bocas circulares.

Se estas peças fossem traçadas pelo método de linhas radiais e especialmente quando as extremidades das pernas estiverem muito apertadas entre si, como ocorre com a perna da figura 1, a seção formada pela intersecção das duas pernas ficaria muito pobre e, portanto, a corrente de ar que passa por esta peça teria muita fricção ao convergir. Por isso, recorre-se ao *método de triangulação*, já que a seção formada pela intersecção de ambas as pernas podemos dar a forma desejada para que o ar seja distribuído ou convirja com a menor fricção possível.

Esta seção é feita quase sempre de forma semi-ovalada, como se vê na figura 2, embora também possa ser feita semi-elíptica, mas preferimos a primeira por ser de mais fácil construção.

Observe-se a grande diferença existente entre os dois desenhos das figuras 1 e 2.

A simples vista da elevação de uma perna é tudo o que se requer para determinar as grandezas reais das linhas falsas que se traçam sobre a superfície da elevação da perna.

O tipo mais simples das peças de duas vias é aquela em que suas pernas são simétricas, pois só é necessário determinar as grandezas reais das linhas falsas de uma delas, já que as da outra são iguais.

A figura 3 dá uma perspectiva de uma das pernas colocada sobre o plano H de projeção, de tal maneira que

o plano do semi-oval da garganta seja perpendicular ao plano V de projeção que imaginamos ser transparente para apreciar melhor a projeção vertical da perna, conforme a flecha.

A curva de intersecção das duas pernas como se pode ver claramente, tem forma semi-ovalada, sendo seu eixo menor formado pelo diâmetro da base e o semi-eixo maior formado pela distância existente entre os pontos O_1 e G .

O método a seguir para determinar as verdadeiras grandezas das linhas falsas situadas na superfície da peça em sua projeção vertical é o mesmo que o descrito para os exercícios anteriores.

Por exemplo, a linha $E-5$ de comprimento real na perna se for projetada verticalmente, determina a reta $E'-5'$ de grandeza falsa. Isto é devido a que a projetante $5-5'$ é maior que a projetante $E-E'$.

Se traçarmos a partir de E uma paralela ao plano V de projeção cortando a projetante $5-5'$ no ponto 5_1 , formaríamos um triângulo retângulo que é sombreado, sendo a *hipotenusa* a linha real $E-5$ e os catetos a linha $E-5_1$ igual à linha falsa $E'-5'$ e a distância $5-5_1$. Observar-se-á que a distância $R-5_1$ é a diferença existente entre a ordenada E e a 5 .

Uma vez esclarecido isto seria muito fácil obter a reta $E-5$ em sua verdadeira grandeza.

Traça-se um ângulo reto; em um dos lados se dá a diferença que existe entre as ordenadas E e 5 ($5-5_1$), obtendo assim um novo ponto. Depois, daríamos ao outro lado a distância $E'-5'$ tomada da elevação, obtendo-se outro novo ponto que, unido com o ponto anterior, formaria o triângulo retângulo, cuja *hipotenusa* é a linha $E-5$ em sua verdadeira grandeza.

Nota. Quando precisarmos resolver alguma calça, cujas bocas podem ser circulares ou não e estiverem inclinadas, a solução é da mesma maneira como no caso que já estudamos, já que o sistema não varia.

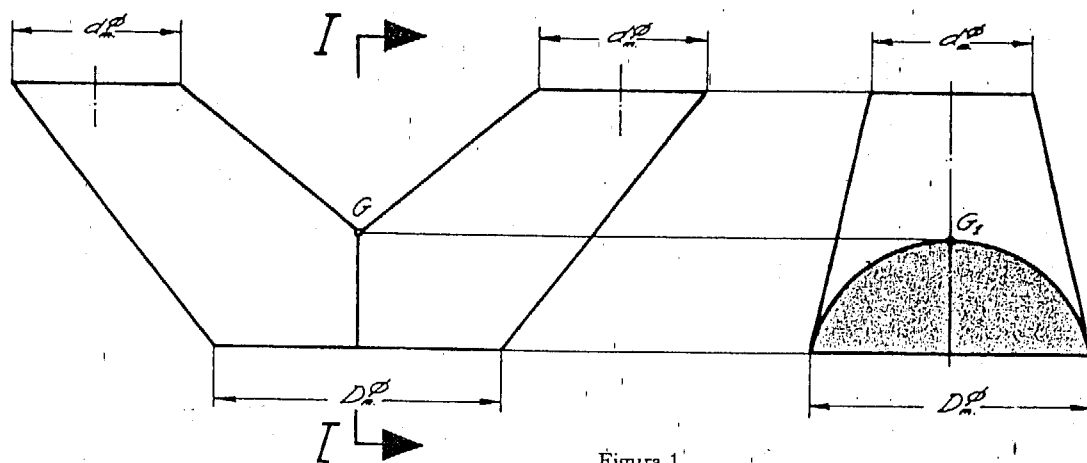


Figura 1

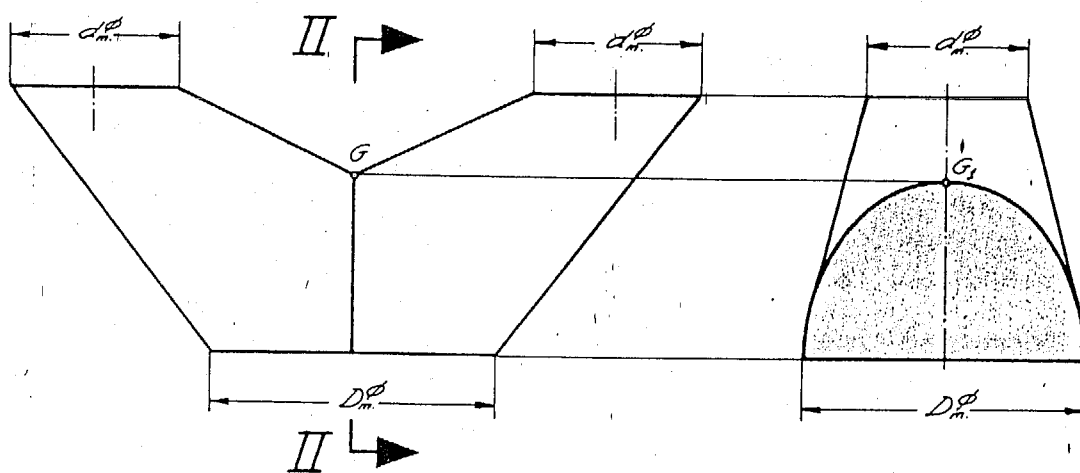


Figura 2

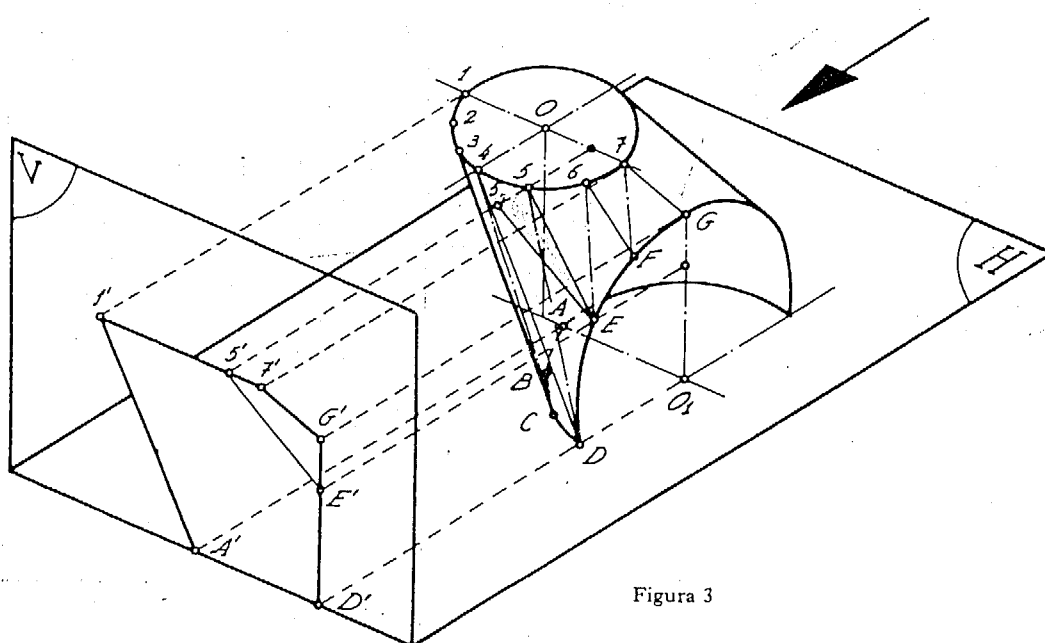


Figura 3

Calça de bocas circulares e paralelas entre si, estando seus eixos em um mesmo plano

Representa-se a calça (fig. 1) por sua fibra média e sobre um dos diâmetros das bocas circulares da parte superior (sobre o diâmetro da perna da parte direita) descreve-se uma semicircunferência que é dividida em um número adequado de partes iguais (seis, por exemplo) e desde os pontos de divisão 2, 3, etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, obtendo-se assim as ordenadas da boca superior.

Sobre o diâmetro da base descreve-se um quadrante de circunferência que é dividido, neste caso, em três partes iguais, determinando os pontos de divisão *A*, *B*, *C* e *D*. Depois traçam-se as ordenadas ao diâmetro da base.

Em seguida, desenha-se sobre a linha de intersecção de ambas as pernas a forma da metade do corte de união, sendo, neste caso, um quarto de oval, cujo semi-eixo maior é a distância existente entre o ponto *G* e a base, sendo o semi-eixo menor igual à ordenada *D* da base que, neste caso, é igual ao raio.

Este quadrante de oval é dividido em três partes, assim como se ilustra na figura 1 (não é necessário que as divisões sejam iguais), e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares à linha de intersecção, determinando-se desta maneira as ordenadas *E* e *F*.

Todos os pontos achados sobre a linha de intersecção e sobre os diâmetros são unidos entre si, formando triângulos na *elevação* da perna da calça, representando-se desta maneira todas as linhas falsas.

Grandezas reais (fig. 2). Traça-se uma vertical qualquer, marcando-se nela o ponto 1 e 7 que representa a linha central da boca superior. A partir deste ponto e para baixo, transportam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3, 4, 5 e 6 da boca superior, obtendo-se assim novos pontos que também chamaremos 2 e 6, 3 e 5, 4. Desde o mesmo ponto é também para baixo, transportam-se sobre a vertical as ordenadas da base e do quadrante do oval, traçando depois perpendiculares indefinidas à vertical desde os pontos resultantes que, por sua vez, serão marcados com as mesmas letras correspondentes no semi-quadrante de circunferência e

de oval da base e da linha de intersecção, respectivamente. Observe-se que a perpendicular *A* é traçada desde o ponto 1 e 7, devido a que os pontos *A*, 1 e 7 estão em um mesmo plano.

Depois transporta-se cada um dos comprimentos falsos da *elevação* (*A2*, *B2*, *B3* etc.) sobre as linhas horizontais marcadas com a mesma letra, medindo-as desde o ponto de intersecção que forma cada horizontal com a vertical, determinando assim novos pontos que também chamaremos 2, 3, 4, etc.

Estes pontos achados unem-se com os pontos da mesma origem que se encontram sobre a vertical, obtendo-se assim as grandezas reais de todas as linhas falsas que foram desenhadas na *elevação*. Como exemplo, uniu-se o ponto 2 da horizontal *A* com o ponto 2 da vertical, sendo o comprimento da reta 2-2 a grandeza real da linha *A2*.

As grandezas reais *A1* e *G7* são tomadas diretamente da *elevação*, já que são as únicas linhas desta vista que estão em verdadeira grandeza.

Desenvolvimento (fig. 3). A primeira coisa que se deve fazer é transportar sobre uma régua flexível o desenvolvimento da circunferência média da boca superior. Tendo o desenvolvimento sobre a régua flexível, divide-se o comprimento, neste caso em doze partes iguais, numerando os pontos de divisão.

Depois, sobre outra régua flexível, transporta-se o desenvolvimento da semicircunferência média da base, dividindo-a em seis partes iguais, colocando suas letras correspondentes sobre os pontos de divisão.

Por último, flexiona-se outra régua flexível até fazê-la coincidir com o quadrante do oval, marcando sobre a régua os pontos *D*, *E*, *F* e *G*.

Uma vez dispostas as três régua flexíveis, começa-se a desenvolver uma das pernas a partir da reta *A1*, da mesma maneira como se explicou no exercício 1.

Nota. Os pontos 1, 2, 3, etc., *A*, *B*, *C*, etc. e *E*, *F*, etc. das curvas do desenvolvimento (fig. 3) são achados com as respectivas régua flexíveis tomadas da boca superior, do quadrante da base e do quadrante da elipse.

Figura 1

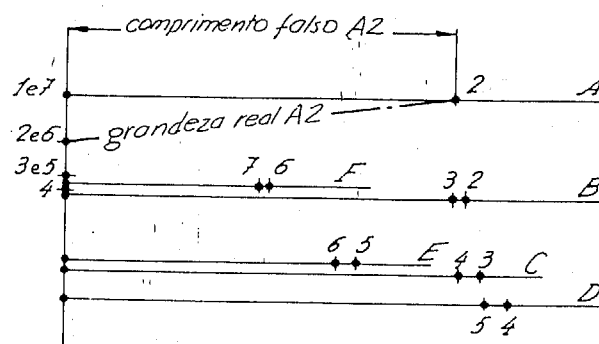
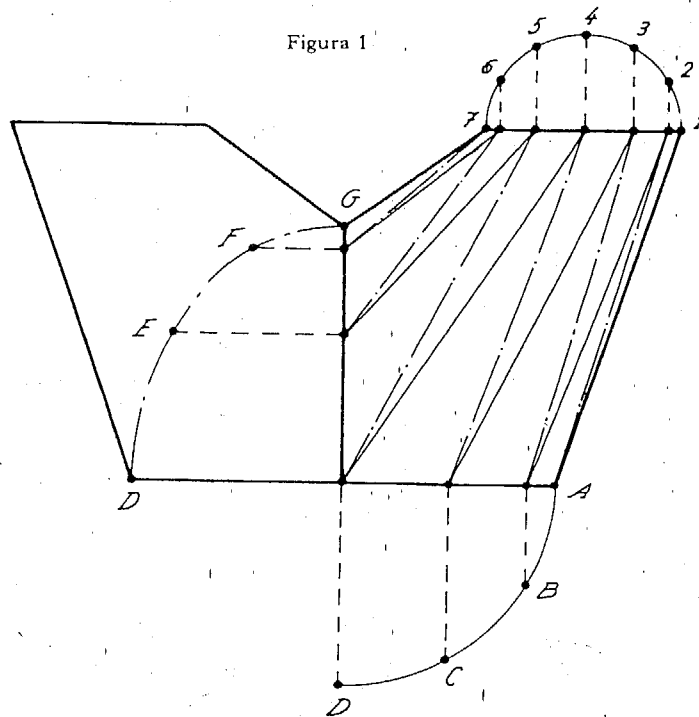


Figura 2

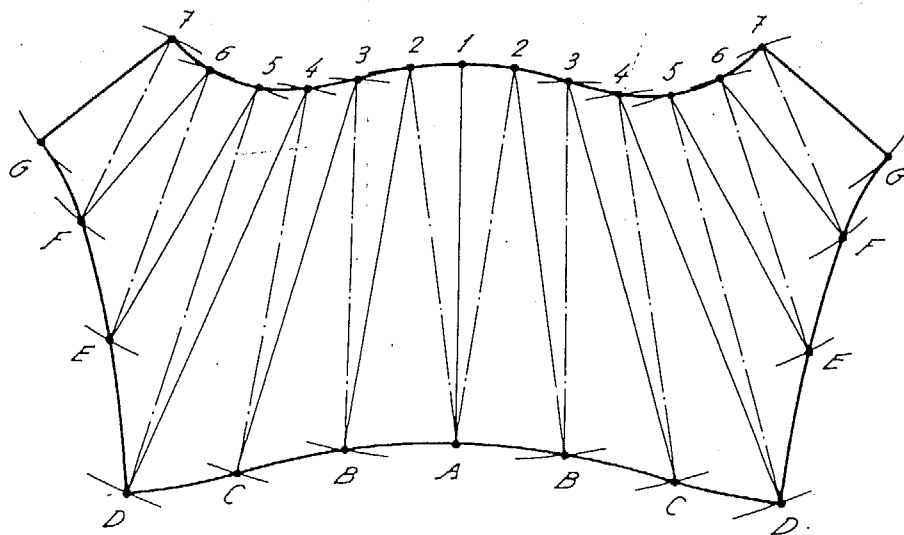


Figura 3

Calça de pernas diferentes de bocas circulares, cujos eixos estão em um mesmo plano

A elevação da calça (fig. 1) é feita por sua fibra média. Como se pode observar, esta calça é formada por duas pernas diferentes, sendo uma delas (parte esquerda) parecida às pernas do exercício anterior e a outra, com a boca superior inclinada com respeito à base.

O desenvolvimento de cada perna é feito separadamente, sendo a forma de realizar o desenvolvimento o mesmo do caso anterior. Como exemplo, triangulou-se a perna da parte direita, descrevendo-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da boca superior e dividindo-a em um número adequado de partes iguais (seis, por

exemplo). Desde os pontos de divisão traçaram-se perpendiculares ao diâmetro, obtendo-se assim as ordenadas 2, 3, 4, 5 e 6.

Também sobre a base e a linha de intersecção de ambas as pernas foi desenhado um quadrante de circunferência e de oval e traçaram-se suas correspondentes ordenadas, assim como foi feito no exercício anterior, traçando-se depois os triângulos sobre a superfície da elevação.

As grandezas reais (fig. 2) de todas as linhas falsas da perna e seu desenvolvimento (fig. 3) são feitos seguindo as instruções do caso anterior.

Figura 1

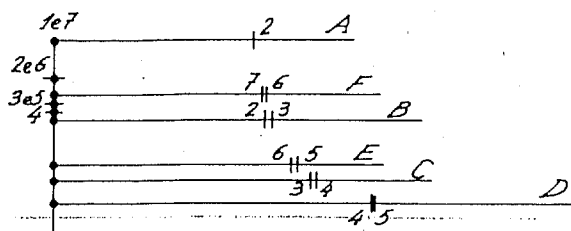
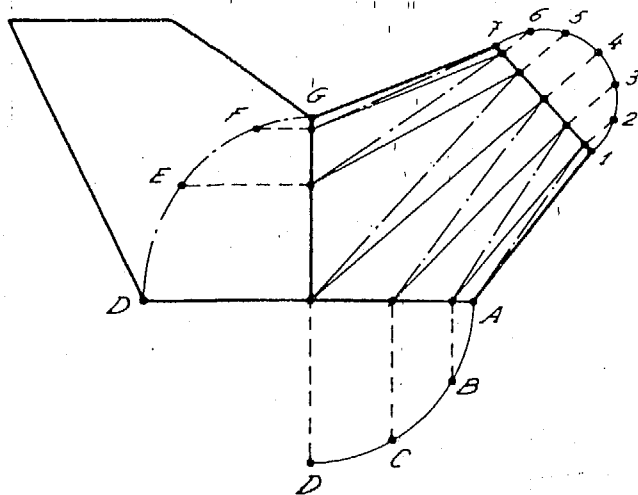


Figura 2

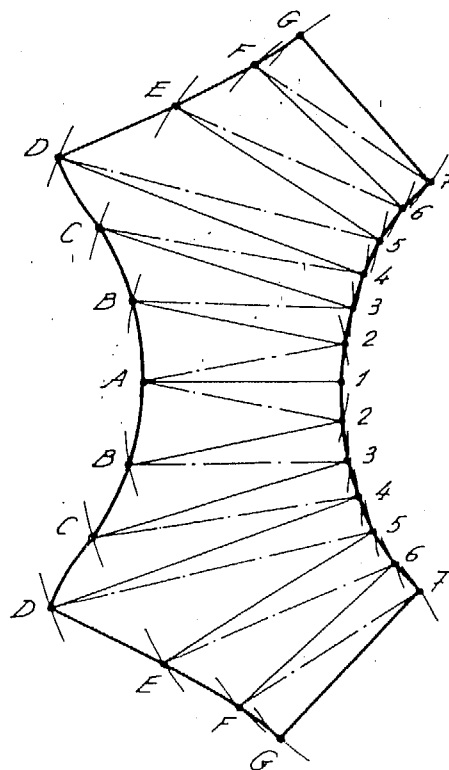


Figura 3

Calça de bocas circulares e base retangular, paralelas entre si

As figuras 1 e 2 representam a *elevação* e o *perfil* da calça por sua fibra interna que é formada por duas pernas iguais, sendo redonda cada uma de suas entradas e convertendo-se em retangular quando as pernas convergem na base. A linha de intersecção de ambas é um trapézio equivalente ao trapézio $B-B-C-C$ da vista em *perfil*.

Sobre um dos diâmetros internos das pernas (perna esquerda, por exemplo, da figura 1), descreve-se uma semicircunferência, dividindo-a em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre ele novos pontos e as ordenadas necessárias para achar as grandezas reais. Estes pontos são unidos por meio de retas geratrizes com os pontos A e C , assim como se vê na figura 1.

A superfície plana $ABC3$ da figura 1 é dividida em duas partes, unindo os pontos B e 3 por meio de uma reta imaginária que forma os triângulos $AB3$ e $BC3$.

Grandezas reais (fig. 3). Sobre uma vertical qualquer marca-se o ponto 1 e 5 . Desde este ponto

medem-se e numeram-se as ordenadas $2, 3$ e 4 da boca circular da *elevação*. Também desde o ponto 1 e 5 transportam-se sobre a vertical e na mesma direção as distâncias N e N_1 do *perfil* e desde os pontos resultantes traçam-se perpendiculares à vertical, chamando-as de C, A e B .

Sobre a reta A e B (fig. 3) transportam-se a partir do ponto de intersecção com a vertical todas as grandezas falsas $A1, A2, A3$ e $B3$ tomadas da *elevação*, determinando novos pontos que chamaremos pelo mesmo número e que, unidos com os pontos da mesma origem que se encontram na vertical, determinariam as grandezas reais $A1, A2, A3$ e $B3$.

A mesma operação será feita sobre a reta C da figura 3 com as geratrizes falsas $C3, C4$ e $C5$ para achar suas correspondentes grandezas reais.

Desenvolvimento (fig. 4). O desenvolvimento começa a ser feito a partir da reta $A-A$, sendo seu comprimento igual à distância $2N = AA$ do *perfil*.

Nota. Em caso de dúvida, estudar o desenvolvimento do exercício 27.

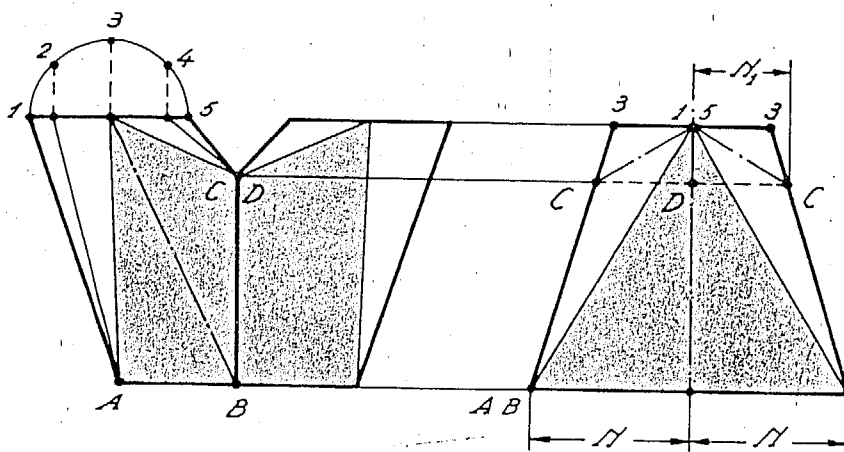


Figura 1

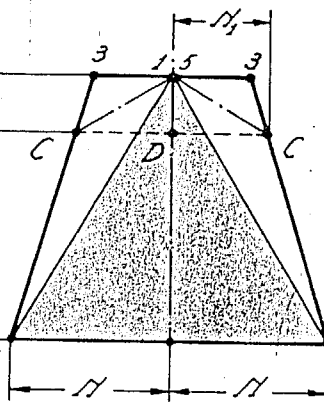


Figura 2

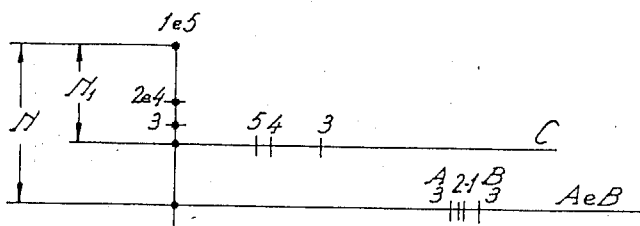


Figura 3

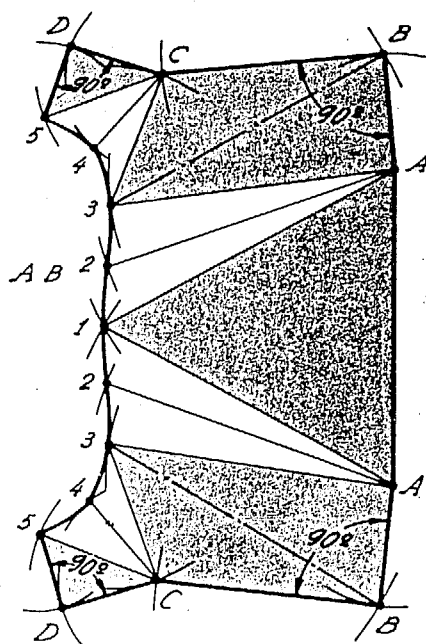


Figura 4

Calça de boca retangular e circular com garganta trapezoidal

Também esta calça é representada por sua fibra interna, sendo sua *elevação* e seu *perfil* como os ilustrados nas respectivas figuras 1 e 2.

Sobre o diâmetro da calça (fig. 1) descreve-se um quadrante de circunferência que é dividido em certo número de partes iguais (três, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre ele novos pontos e as ordenadas 2, 3 e 4.

Os pontos determinados sobre o diâmetro unem-se com o ponto *A* por meio de retas geratrizes.

Também se une o ponto 4 do diâmetro com o ponto *B* da boca retangular.

O ponto 6 do *perfil* é unido com o ponto *B*, ficando assim triangulada a superfície trapezoidal 5-5-B-B.

Como se pôde observar, só é necessário triangular uma das pernas, já que as duas são iguais.

Grandezas reais (fig. 3). Traça-se uma vertical qualquer e sobre ela marca-se o ponto 1 e 6. A partir deste ponto marca-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3 e 4 do quadrante circular, determinando novos pontos que serão chamados pelo mesmo número correspondente no quadrante circular.

Também desde o ponto 1 e 5 marca-se sobre a vertical a distância 6-5 do *perfil*, determinando outro novo ponto que chamaremos 5.

Sobre a vertical e a partir do ponto 1 e 6 e da horizontal, transportam-se a distância *N* do *perfil*, determinando um novo ponto, a partir do qual se traça uma perpendicular à vertical, chamando-a *A* e *B*.

Desde o ponto de intersecção da vertical e da horizontal, transportam-se sobre esta última todas as grandezas falsas *A1*, *A2*, *A3*, *A4*, *B4*, *B5* e *B6*, tomadas da *elevação*, determinando assim os pontos 1, 2, 3, etc. que, unidos com os pontos da mesma origem da vertical, determinariam todas as grandezas reais. A reta *B5* da *elevação* cai sobre a mesma projeção da reta *B6*.

Desenvolvimento (fig. 4). Traça-se a reta *A-A* de comprimento igual à distância *A-A* da figura 2. Desde as extremidades *A* desta reta descrevem-se dois arcos de raio igual à grandeza real *A1* tomada da figura 3, determinando pela intersecção de ambos os arcos o ponto 1. Em ambas as partes deste ponto descrevem-se desde os pontos *A*, arcos com raios iguais às grandezas reais *A2*, *A3* e *A4* tomadas da figura 3. Em seguida, transporta-se sobre uma régua flexível a metade do desenvolvimento da circunferência média da boca circular que se divide, neste caso, em seis partes iguais, colocando-se o ponto de divisão central da régua sobre o ponto 1 do desenvolvimento, flexionando a régua até que seus pontos de divisão coincidam com os arcos correspondentes, determinando-se desta maneira os pontos 2, 3 e 4 que se unem por meio de retas geratrizes com os pontos *A*.

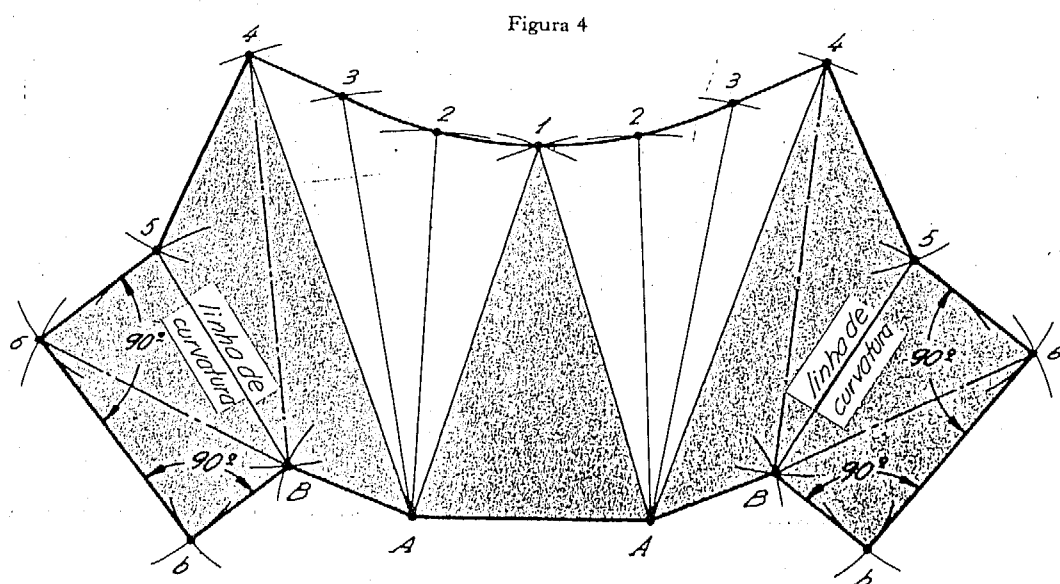
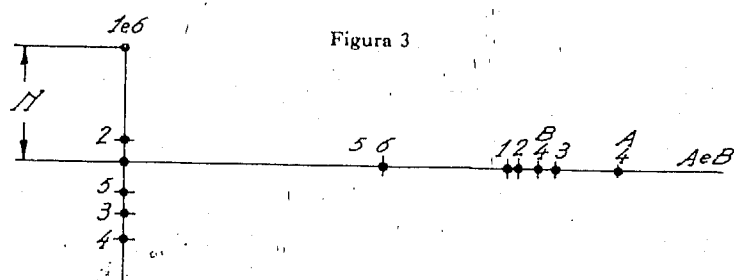
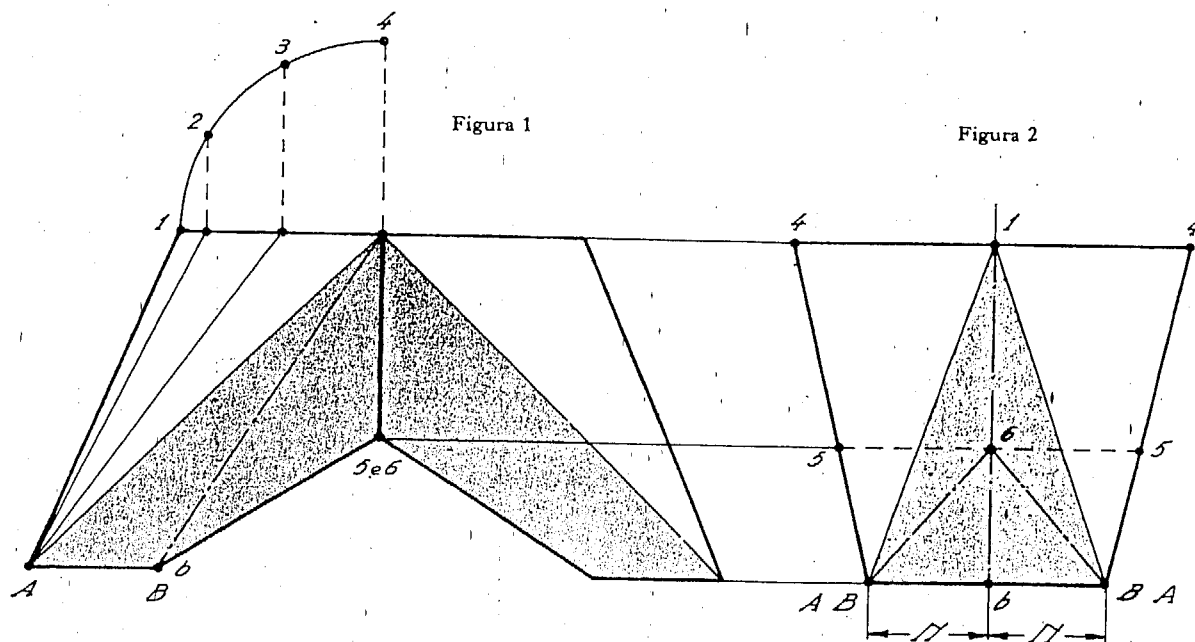
Toma-se o comprimento real *B4* e com ele se traça um arco desde os pontos 4, determinando o ponto de intersecção *B* sobre o arco descrito desde os pontos *A* de raio igual à distância *AB* da *elevação*.

Para construir o próximo triângulo do desenvolvimento, toma-se a distância 4-5 do *perfil* e com ela se descreve um arco desde os pontos 4 e depois traça-se outro arco desde os pontos *B* de raio igual à grandeza real *B5*, determinando sobre o anterior o ponto 5.

Desde os pontos *B* traça-se um arco com a grandeza real *B6* e desde os pontos 5 descreve-se outro arco de raio igual à distância 5-6 da figura 2, determinando sobre o anterior o ponto 6.

Também desde *B* descreve-se um arco de raio igual ao semilado *Bb* da figura 2, determinando o ponto de intersecção *b* sobre o arco de centro 6 e de raio igual à distância *b6* da *elevação*. Todos os pontos 4, 5, 6, *B* e *A* são unidos entre si por meio de retas e os pontos 4, 3, 2, 1, 2, 3 e 4 são unidos por meio de uma curva contínua que, neste caso, é igual à curva formada pela régua flexível ao ser flexionada para obter esses pontos.

Nota. Se as bocas estivessem inclinadas entre si, a calça seria desenvolvida da mesma maneira.



Calça de boca retangular e circular com garganta semi-elíptica

A representação da calça é feita por sua fibra interna (não é necessário representar as duas pernas), sendo uma de suas bocas retangular, assim como se vê na figura 2, vista no sentido da flecha da figura 1.

Sobre a linha de intersecção, desenha-se um quadrante de oval (também pode ser uma curva qualquer), dividindo-o em um número adequado de partes iguais ou desiguais, sendo mais recomendável dividi-lo de forma análoga à da ilustração.

Desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares à linha de intersecção de ambas as pernas, determinando novos pontos e as ordenadas 4, 5 e 6.

Sobre o diâmetro da mesma perna descreve-se um quadrante de circunferência que é dividido, neste caso, em três partes iguais, determinando os pontos de divisão 1, 2, 3 e 4, a partir dos quais se traçam perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre estes novos pontos as ordenadas necessárias para achar as grandezas reais.

Todos os pontos achados anteriormente e os pontos A e B unem-se, assim como se ilustra na figura 1, formando triângulos sobre a superfície da perna da calça que são representados por grandezas falsas.

Grandezas reais (fig. 3). Traça-se uma vertical qualquer que será marcada com um ponto que chamaremos 1 e 7, já que o ponto 1 da boca circular e o ponto 7 da garganta estão em um mesmo plano. A partir deste ponto e para baixo, marcam-se as ordenadas 2, 3, 4, 5 e 6 da boca circular e da garganta. Desde o mesmo ponto e também para baixo, marca-se sobre a vertical a distância N tomada da figura 2, determinando um novo ponto sobre a vertical, a partir do qual se traça uma perpendicular à mesma que chamaremos A e B.

A partir deste ponto transportam-se sobre a reta A e B todas as grandezas falsas A1, A2, A3, A4, B4, B5, B6 e B7 da elevação, determinando novos pontos que chamaremos 1, 2, 3, etc. e que, unidos com os pontos da mesma origem que se encontram sobre a vertical, determinariam as grandezas reais desejadas.

Desenvolvimento (fig. 4). Primeiramente transporta-se sobre uma régua flexível a metade do desenvolvimento da circunferência média da boca circular da perna, dividindo-se em seis partes iguais, numerando-se os pontos de divisão.

Depois flexiona-se outra régua flexível até acoplá-la ao quadrante de oval neutro da linha de intersecção de ambas as pernas, marcando-se os pontos de divisão 4, 5, 6 e 7.

Em uma posição adequada traça-se a reta A-A (fig. 4) de comprimento igual à distância $2N = A-A$ da figura 2. Marcando o centro nos pontos A, descrevem-se arcos de raio iguais à grandeza real A1 tomada da figura 3, determinando pela intersecção de ambos o ponto 1.

Marcando o centro nos pontos A, descrevem-se arcos de raios iguais às grandezas reais A2, A3 e A4. Depois coloca-se o ponto número 1 da primeira régua flexível sobre o número 1 do desenvolvimento, flexionando-se até que seus pontos de divisão cortem os arcos correspondentes, determinando assim os pontos 2, 3 e 4 que se unem com os pontos A por meio de retas geratrizes.

Desde os pontos 4 descrevem-se arcos de raios iguais aos das grandezas reais B4 tomadas da figura 3 e tomando como centro os pontos A traçam-se arcos de raios iguais ao comprimento do lado AB da figura 1, determinando sobre os anteriores os pontos de intersecção B.

Desde este ponto (em ambas as partes) descrevem-se arcos de raios iguais aos das grandezas reais B5, B6 e B7 tomadas da figura 3, flexionando depois a segunda régua flexível até que os correspondentes pontos de divisão coincidam com os arcos anteriores, determinando assim os pontos 5, 6 e 7 que se unem com o ponto B por meio de retas geratrizes. Marcando o centro no ponto 7, descreve-se um arco de raio igual à grandeza 7b da figura 1 e desde B se descreve outro arco de raio igual à grandeza Bb da figura 2, determinando o ponto de intersecção b que se une por meio de retas com B e 7.

Nota. Se as bocas estiverem inclinadas entre si, o desenvolvimento da calça será feito de forma análoga.

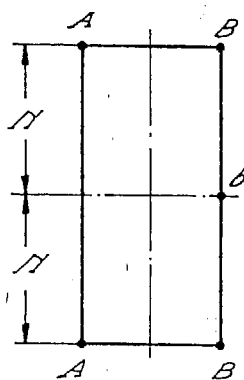


Figura 2

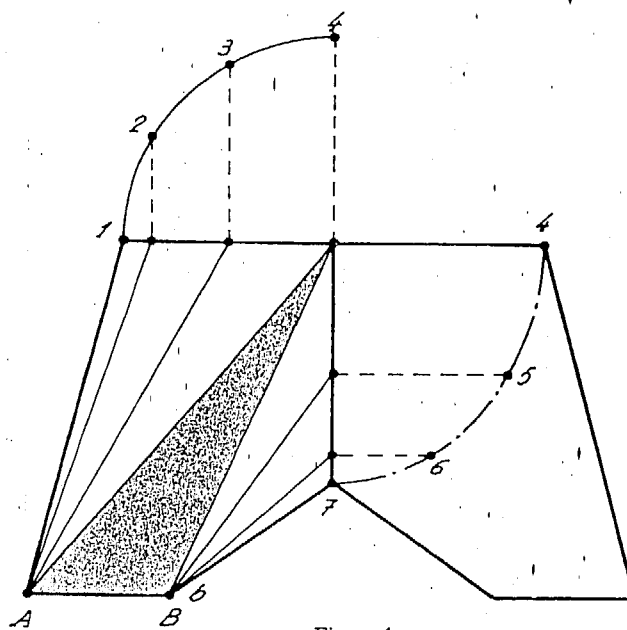


Figura 1

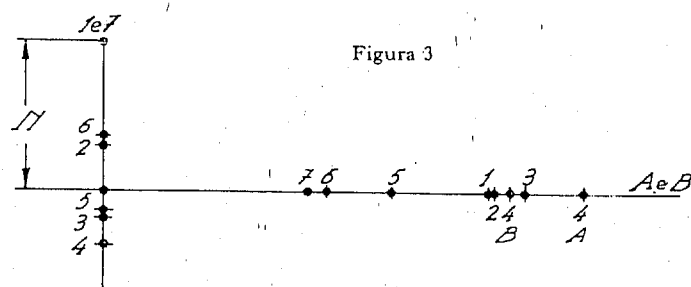


Figura 3

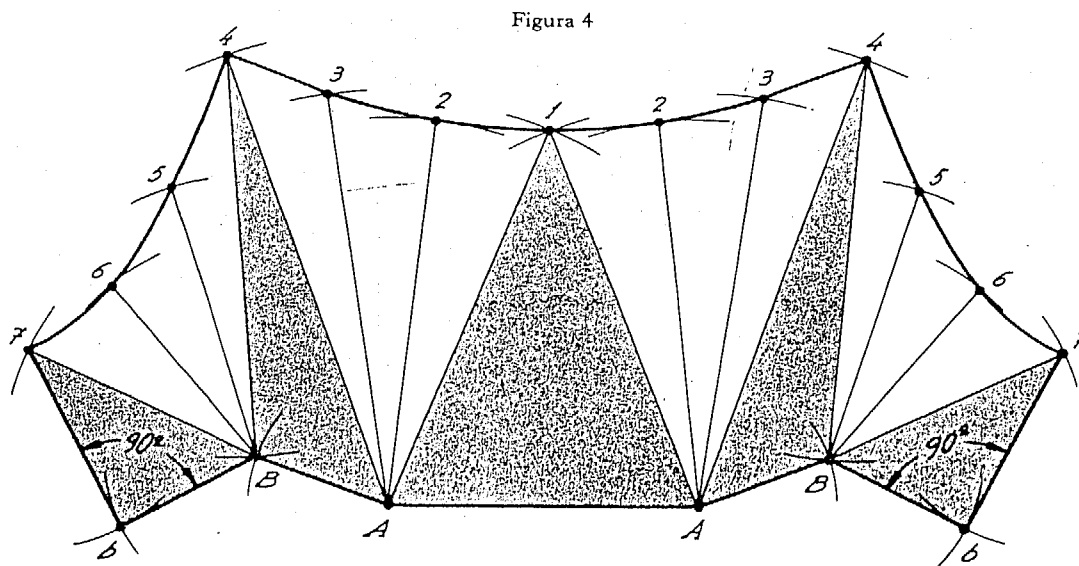


Figura 4

Calça de bocas circulares e paralelas, cujos eixos não estão em um mesmo plano

Nem sempre os eixos das bocas da calça estão em um mesmo plano, como acontece neste caso, pois, como se vê no *perfil*, esses eixos estão separados entre si na distância M . Isto não é nenhum obstáculo para desenvolver qualquer uma das pernas triangulando a *elevação*.

Sobre o diâmetro médio da base (fig. 1) descreve-se uma quadrante da circunferência, dividindo-o em certo número de partes iguais (três partes iguais, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre este novos pontos, e as ordenadas B e B' , C e C' , D e D' . Também sobre o diâmetro médio da boca superior da mesma perna, descreve-se uma semicircunferência, dividindo-se neste caso, em seis partes iguais, traçando-se depois as ordenadas 2 e $2'$, 3 e $3'$, 4 e $4'$, 5 e $5'$, 6 e $6'$.

Depois, no *perfil* (fig. 2), desenha-se a curva de intersecção (esta curva é feita a gosto do estudante), dividindo-a em seis partes, de forma parecida à da ilustração, determinando os pontos de divisão E , F , G , F' e E' . Desde estes pontos traçam-se perpendiculares à linha de intersecção da figura 1, obtendo sobre esta novos pontos, que terão as mesmas letras. Também as perpendiculares anteriores determinam novos pontos sobre o eixo da boca superior (fig. 2), sendo a distância existente entre estes pontos e os pontos de divisão da curva as respectivas ordenadas E , F , F' e E' .

Todos os pontos obtidos sobre os diâmetros e a linha de intersecção da perna (fig. 1) unem-se entre si formando triângulos, sendo as grandezas falsas $A2$, $B2$, $B3$, etc. iguais às respectivas grandezas falsas $A2'$, $B'2'$, $B'2'$ que se encontram na parte posterior, mas as grandezas reais não serão iguais entre si, como veremos a seguir.

Grandezas reais (fig. 3). Sobre uma vertical qualquer, marca-se o ponto 1 e 7 que representa o centro da boca superior da perna e em ambas as partes do ponto marcam-se sobre a vertical as respectivas ordenadas 2 , 3 , 4 , 5 e 6 e $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$. Desde o mesmo ponto e para cima, marca-se a distância M tomada de *perfil*, obtendo-se um novo ponto, a

partir do qual se traça uma perpendicular à vertical, colocando-se aí a letra A , representando esta reta o centro da base da calça. Em ambas as partes desta reta, marca-se sobre a vertical as respectivas ordenadas B , C , D , E , F e B' , C' , D' , E' , F' , determinando novos pontos, a partir dos quais se traçam paralelas à reta A , denominadas pela sua correspondente letra.

A partir dos pontos de intersecção formados pelas horizontais A , B , C , etc. e $B'C'$, etc. sobre a vertical, marcam-se sobre cada uma das horizontais os correspondentes comprimentos falsos $A2$, $B2$, etc. e $A2'$, $B'2'$, etc. da *elevação*, colocando o número correspondente nos pontos resultantes que se unem com os pontos da mesma origem que se encontram sobre a vertical, determinando-se desta maneira todas as grandezas reais. Como exemplo, uniu-se o ponto 2 da horizontal A com o ponto 2 da vertical, sendo a reta $2-2$ a grandeza real $A2$. Também foram unidos os pontos $2'$ e $2'$, obtendo-se assim a grandeza real $A2'$.

Desenvolvimento de uma perna (fig. 4). Marca-se sobre uma régua flexível o desenvolvimento da circunferência média da boca superior da perna e divide-se em doze partes. Depois marca-se sobre outra régua flexível a metade do desenvolvimento da circunferência média da base. Por último, flexiona-se uma terceira régua flexível até acoplá-la à curva de intersecção que se desenhcou no *perfil*, marcando-se aí os pontos de divisão D , E , F , G , F' , E' e D' .

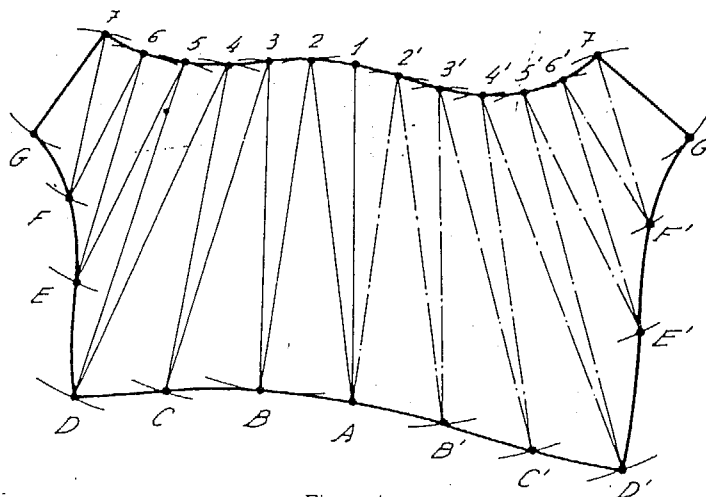
Uma vez obtidas estas réguas flexíveis, começa-se a triangular o desenvolvimento a partir da grandeza real $A1$ e continua-se até terminá-lo da mesma maneira que fizemos nos exercícios anteriores.

Nota. A grandeza real $G7$ foi tomada da *elevação*, já que é única que se encontra nesta vista em verdadeira grandeza.

Nota. Se as bocas estiverem inclinadas entre si, o desenvolvimento da calça será feito da mesma maneira.

Figura 1

The diagram shows a crystal face with a vertical line segment labeled G at the top, FeF' below it, EeE' below that, and A at the bottom. To the right of this line is a curved surface with points BeB' and CeC' labeled. At the bottom of the curve is DeD' . A series of lines connect G to points on the curve, and a series of lines connect A to points on the curve. The curve is labeled with points $5e5'$, $6e6'$, 7 , $3e3'$, $2e2'$, and 1 from left to right. A dashed line connects G to A and continues down to DeD' .



351

Explicação de outro procedimento

Sempre que a vista em *elevação* for mais complicada que a vista de *perfil* para triangular a superfície de uma peça (como ocorreu no exercício anterior), recorre-se então à esta última projeção, ou melhor, o que antes projetávamos como *perfil*, projetaremos agora como *elevação*. Observe-se que o perfil do exercício anterior (fig. 2) se faz de elevação neste caso.

O método a seguir para determinar as verdadeiras grandezas é ligeiramente diferente do empregado nos exercícios anteriores, embora se baseiem no mesmo princípio.

Suponhamos que um segundo plano vertical divide ambas as pernas da calça. Este plano seria visto de canto na figura 3.

Aos pontos diametralmente opostos da boca superior (fig. 1) foram dados os números 1-7-4 e 4' que adotam nas duas projeções restantes as posições que podem ser vistas nas figuras 2 e 3.

A título de exemplo para as demais linhas, traçou-se uma reta que passa pelos pontos *D* e 4 (fig. 2), sendo esta reta a geratriz *D-4* que, ao mesmo tempo, corta a curva de intersecção no ponto *J*, sendo a reta *J-4'* a geratriz da parte posterior que cai em frente à geratriz *D-4*. A curva de intersecção é feita a gosto do desenhista, assim como se fez nos trabalhos anteriores.

Determinação das verdadeiras grandezas (fig.

4). Traça-se uma vertical *J* indefinida marcando na mesma um ponto que chamaremos *P* e traçando desde este ponto uma perpendicular à vertical de comprimento indefinido. Sobre esta perpendicular e a partir do ponto *P*, transporta-se a distância *M* tomada a figura 3, determinando um ponto que chamaremos 1 e 7 que representa a linha central da boca superior.

Em ambas as partes deste ponto transportam-se sobre a horizontal as ordenadas 4' e 4, tomadas da figura 2, determinando novos pontos que também chamaremos 4' e 4 (o ponto 4' está na parte esquerda do ponto 1 e 7, onde está também a figura 3).

Sobre a horizontal e também a partir do ponto *P*, transporta-se a ordenada *D* tomada da elevação, resultando um novo ponto a partir do qual traçaremos uma perpendicular à horizontal que terá a letra *D*. Desde este ponto e para baixo, transporta-se o comprimento falso *D-4* tomado da elevação (fig. 2), determinando-se novo ponto que, unido com o ponto 4, faz achar a grandeza real *D4*.

A partir do ponto *P* e para baixo, transporta-se sobre a vertical *J* o comprimento falso *J-4'* tomado da elevação, determinando um ponto que, unido com o ponto 4', faz achar a grandeza real *J-4'*.

De forma análoga, determinam-se tantas linhas quantas se desejarem.

Figura 2

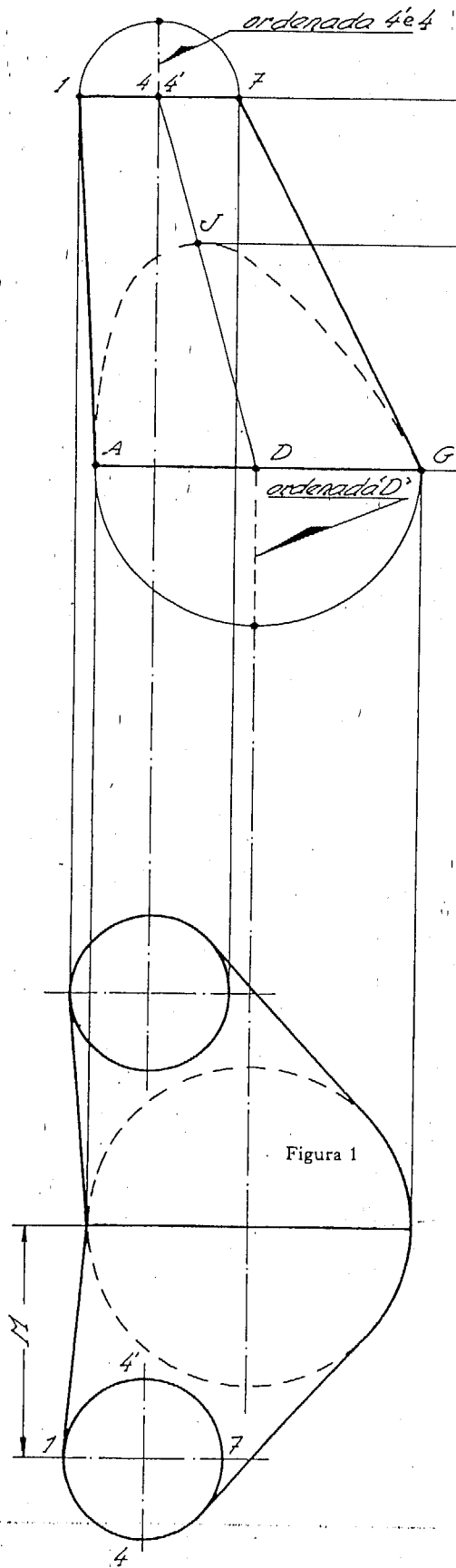


Figura 3

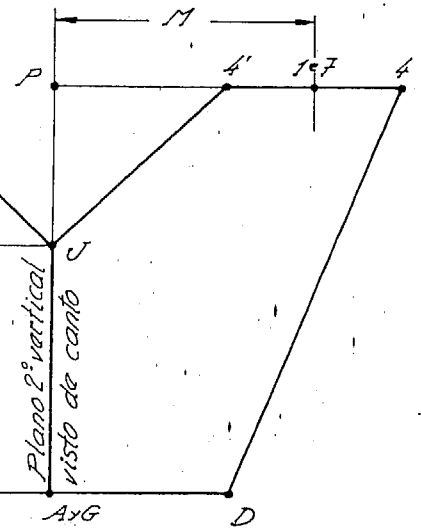
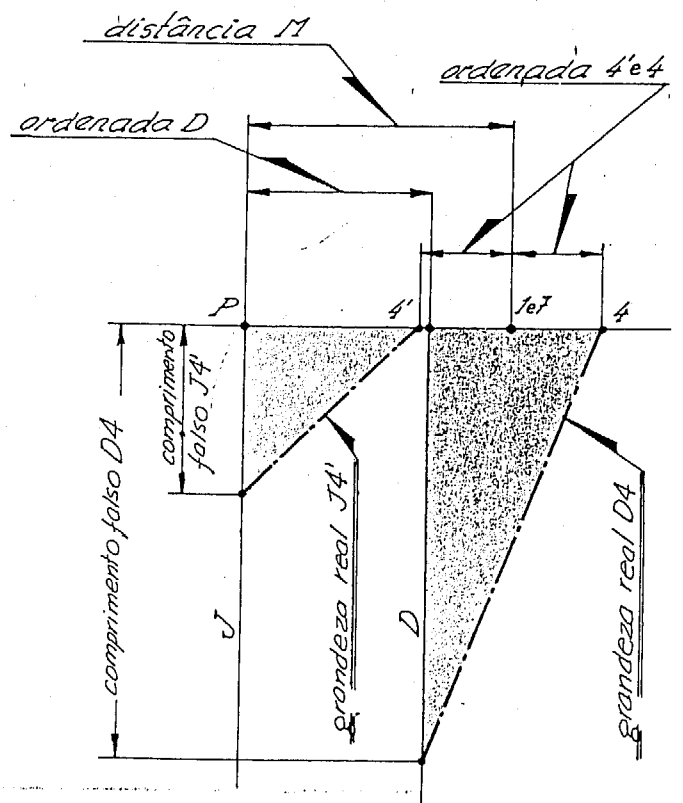


Figura 4



Calça de bocas circulares e paralelas, estando seus eixos em planos diferentes (outro procedimento)

Já que foi estudado anteriormente, este outro procedimento será aplicado agora para desenvolver a calça em questão.

Sobre os diâmetros médios de ambas as bocas (fig. 1), descrevem-se semicircunferências que são divididas em um número adequado de partes iguais, colocando-se números nos pontos de divisão da semicircunferência superior e letras nos pontos de divisão da semicircunferência da base.

Depois traçam-se as ordenadas de ambas as circunferências, obtendo-se novos pontos sobre os diâmetros que se unem entre si formando triângulos, assim como foi feito na ilustração da figura 1, sendo estes os triângulos da parte anterior da perna.

Em seguida desenha-se a curva de intersecção desejada, à gosto do estudante, cortando as respectivas geratrizes $B2$, $C3$, $D4$, $E5$ e $F6$ nos pontos L , K , J , I e H que se unem com os pontos $3'$, $4'$ e $5'$ por meio de retas descontínuas, ficando assim triangulada a superfície posterior da perna, sendo suas correspondentes linhas falsas as retas $A2'$, $L2'$, $L3'$, $K3'$, $K4'$, $J4'$, $H5'$, $H6'$ e $G6'$.

Verdadeiras grandezas (fig. 3). Sobre uma vertical qualquer, marca-se o ponto 1 e 7 que representa o centro da boca superior. Em ambas as partes deste ponto, marcam-se sobre a vertical as respectivas ordenadas 2, 3, 4, 5, 6 e 2', 3', 4', 5' e 6', determinando novos pontos que serão chamados pelo mesmo número.

A partir do ponto 1 e 7 e para cima, marca-se sobre a vertical a distância M tomada da figura 2, determinando um novo ponto que chamaremos P e que representa o plano secante que passa pela linha de intersecção de ambas as pernas.

Desde este ponto traça-se uma perpendicular à vertical, colocando-se em sua extremidade as letras A , G , H , I , J , K e L . A partir do ponto P e para baixo, marcam-se sobre a vertical as ordenadas B , C , D , E e F do semicírculo da base e desde os pontos resultantes traçam-se perpendiculares à

vertical e depois coloca-se nelas suas correspondentes letras.

Sobre as retas A , B , C , D , E , F e G , transportam-se as correspondentes grandezas falsas $A1$, $A2$, $B2$, $B3$, $C3$, $D4$, $E4$, $E5$, $F6$, $G6$ e $G7$ da *elevação*, determinando pontos que, unidos com os pontos da mesma origem da vertical, determinam as grandezas reais das linhas traçadas sobre a superfície anterior da perna. Como exemplo, uniram-se os pontos 3-3, sendo esta a verdadeira grandeza $C3$.

Depois, marca-se sobre a reta H , J , I , K e L todas as grandezas falsas $A2'$, $L2'$, $L3'$, etc. da parte posterior da perna, vista em *elevação* (estas medidas são marcadas desde o ponto P), obtendo-se assim novos pontos que, unidos com os pontos da mesma origem da vertical, determinariam as verdadeiras grandezas das linhas traçadas sobre a superfície posterior da perna.

Como exemplo, uniu-se o ponto $K3'$ com o ponto $3'$ da vertical, determinando assim a verdadeira grandeza $K3'$.

Desenvolvimento de uma perna (fig. 4). Uma vez obtidas todas as verdadeiras grandezas, começa-se a traçar todos os triângulos reais sobre o desenvolvimento, procurando transportar os desenvolvimentos das bocas e da curva de intersecção sobre as régua flexíveis, como se indica no exercício 29.

Começa-se a triangular o desenvolvimento a partir da linha $D4$, procurando seguir a ordem que indica a *elevação* (fig. 1). Os triângulos do desenvolvimento que estão traçados com linhas descontínuas pertencem à parte posterior da perna.

Nota. Uma vez desenvolvida, a perna será empregada como gabarito para marcar a outra perna, considerando-se que deve ser curvada à mão e a outra ao contrário.

Caso a calça tenha as bocas inclinadas, o trabalho será resolvido da mesma maneira.

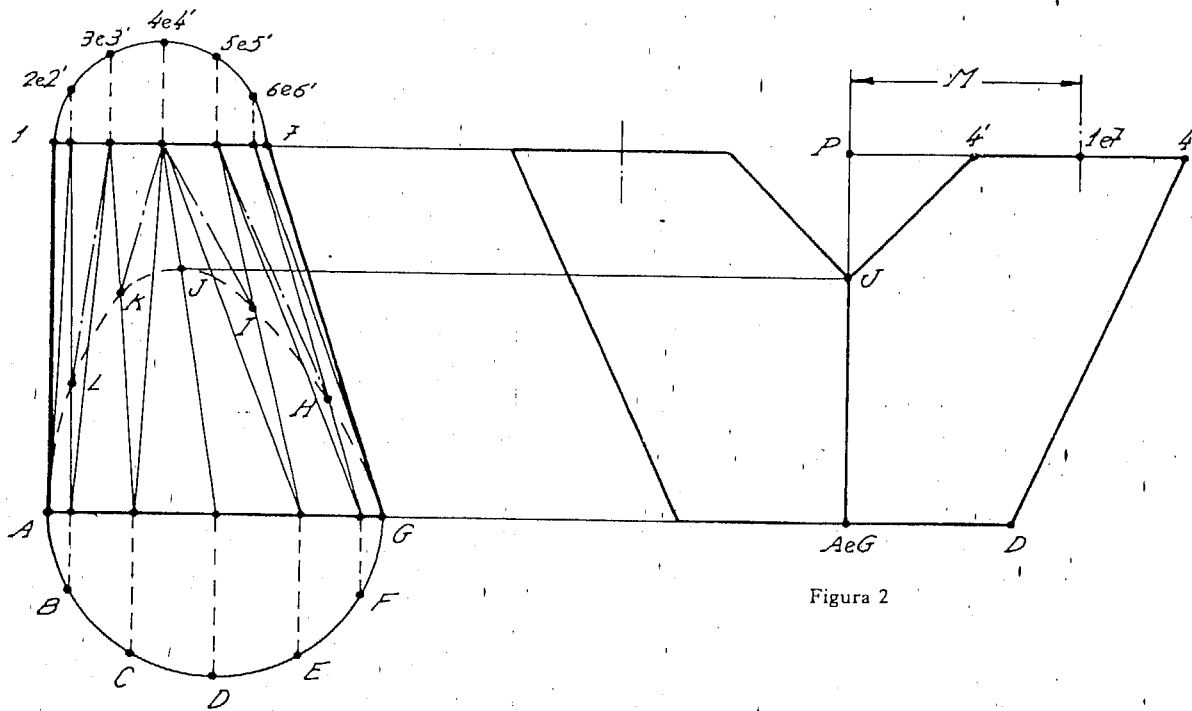


Figura 1

Figura 2

Figura 3

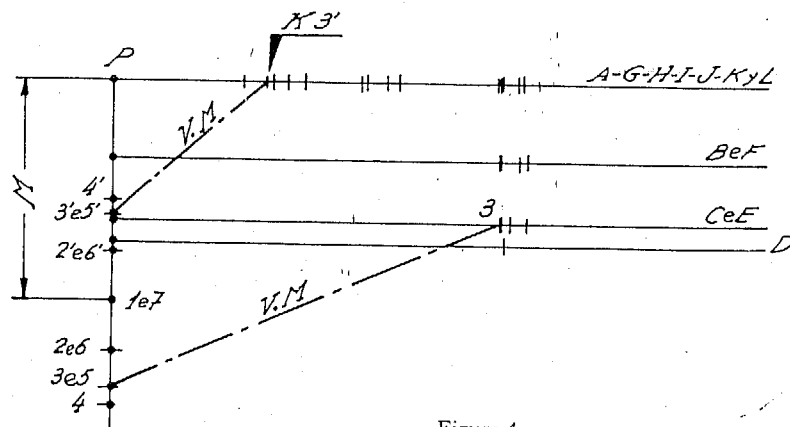
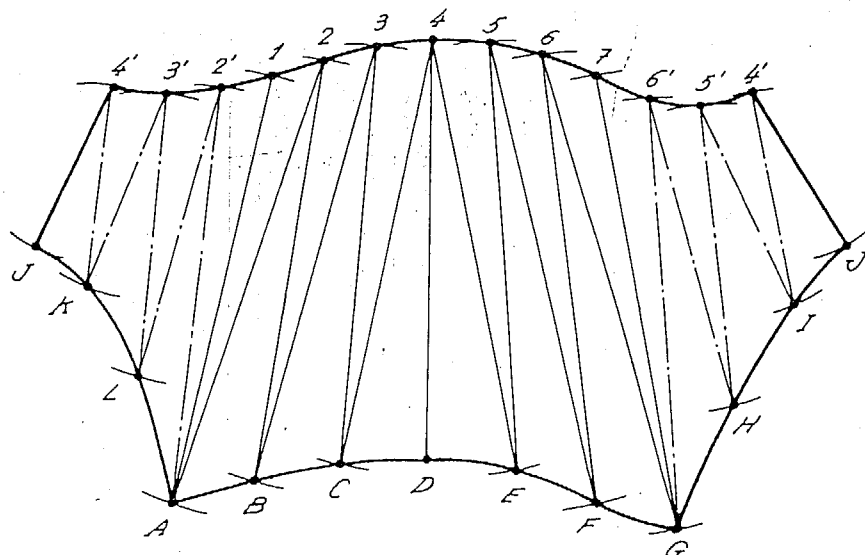


Figura 4



Cotovelo de duas vias, de bocas circulares

As respectivas figuras 1 e 2 dão a *elevação* e *perfil* do cotovelo representado por sua fibra média. Este cotovelo é formado por duas virolas cilíndricas iguais, unidas em dois braços cônicos também iguais e unidos entre si, tendo ao mesmo tempo outra virola unida de diâmetro maior que as anteriores.

Sobre os diâmetros médios das virolas cilíndricas (fig. 1), descrevem-se semicircunferências que são divididas em certo número de partes iguais (seis, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares aos seus respectivos eixos, determinando-se novos pontos sobre as bocas do braço cônico e sobre as geratrizes de ambas as virolas cilíndricas.

Os pontos obtidos sobre as bocas do braço cônico são unidos entre si, como se vê na figura 1, ficando assim representados todos os triângulos da parte anterior do braço. Depois desenha-se a curva de intersecção de ambos os cones, a gosto do estudante, cortando as linhas *B2*, *C3*, etc. nos pontos *L*, *K*, etc. que se unem com os pontos *3'*, *4'* e *5'* por meio de retas descontínuas, ficando assim triangulada a superfície posterior do braço, sendo suas correspondentes linhas falsas as retas *A2'*, *L2'*, *L3'*, *K3'*, *K4'*, *J4'*, *I4'*, *I5'*, *H5'*, *H6'* e *G6'*.

Grandezas reais (fig. 3). Sobre uma vertical qualquer, marca-se o ponto 1 e 7 e em ambas as partes deste ponto, marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3, 4, etc. e 2', 3', 4', etc., correspondentes à semicircunferência menor. Desde o ponto 1 e 7, transporta-se para cima a distância *M* da figura 2 (esta figura não é necessária, pois a distância *M* pode ser tomada diretamente do plano de trabalho), obtendo-se assim o ponto *P*, a partir do qual se traça uma perpendicular à vertical que receberá suas correspondentes letras *A*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K* e *L*.

Desde *P* e para baixo, marcam-se sobre a vertical as ordenadas da semicircunferência maior e desde os pontos resultantes traçam-se perpendiculares à vertical, nomeando estas com a mesma letra correspondente dessa semicircunferência.

Sobre a horizontal *A*, *G*, *H*, etc. e desde o ponto *P*, transportam-se os comprimentos falsos *A2*, *A2'*, *L2*, etc., determinando-se novos pontos que, unidos com os pontos da mesma origem que se encontram sobre a vertical, fazendo achar as grandezas reais das linhas anteriores.

Desde o ponto de intersecção formado pela vertical com as horizontais *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, marcam-se sobre estas os comprimentos das linhas falsas *B2*, *B3*, *C3*, etc. da *elevação*, determinando os pontos correspondentes que se unem com os pontos da mesma origem situados na vertical, ficando assim determinadas as grandezas reais das linhas anteriores do cone.

Desenvolvimento das virolas cilíndricas. As figuras 4 e 5 ilustram o desenvolvimento de ambas as virolas, sendo seu processo o mesmo que se explica no capítulo correspondente às virolas cilíndricas.

Desenvolvimento do braço cônico (fig. 6). Tomam-se três réguas flexíveis, flexionando-as até acoplá-las às curvas dos desenvolvimentos das figuras 4 e 5 e à curva de intersecção de ambos os braços da figura 1, marcando todos os pontos de divisão correspondentes.

Uma vez que as três réguas flexíveis estiverem dispostas para serem transportadas ao desenvolvimento, começa-se a triangular o desenvolvimento a partir da linha *D4*, efetuando-se seu traçado, como se ilustra.

Nota. Como os braços cônicos são simétricos, um braço será curvado contrariamente ao outro.

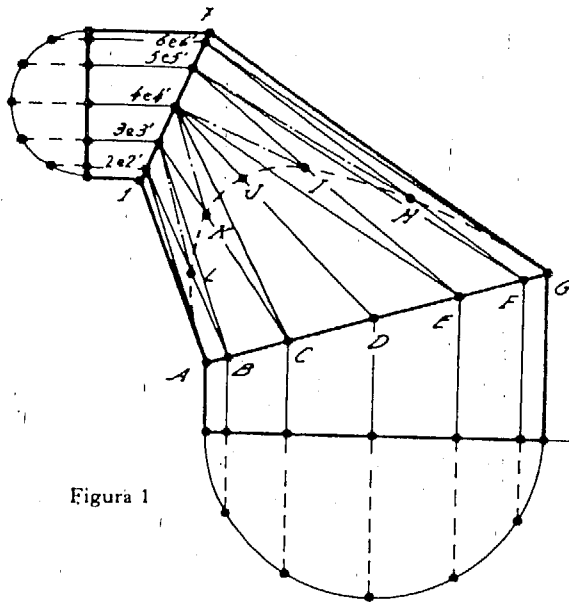


Figura 1

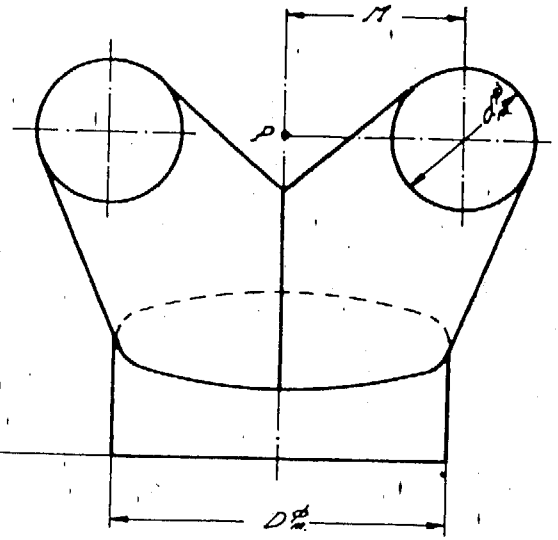


Figura 2

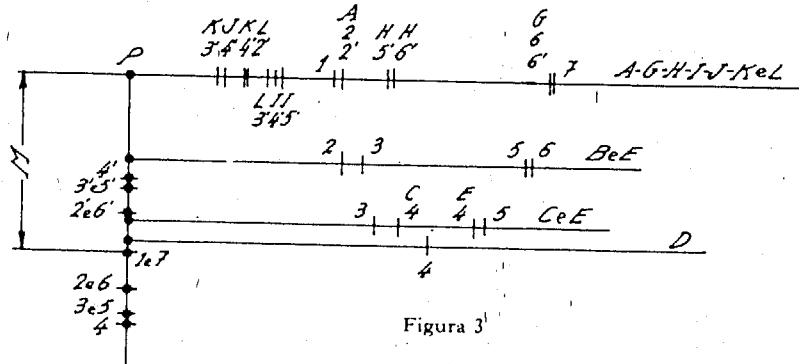


Figura 3

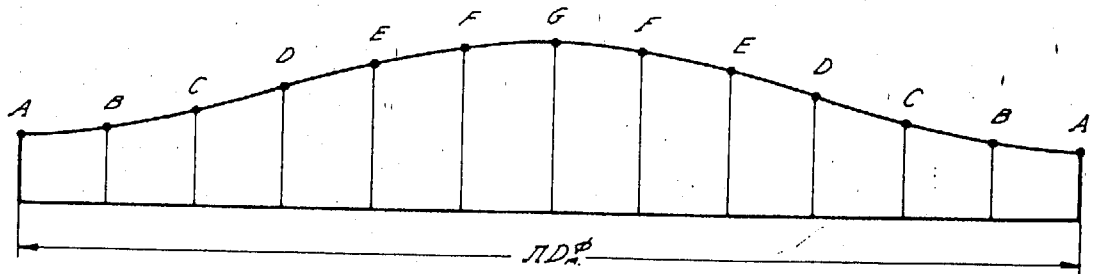


Figura 4

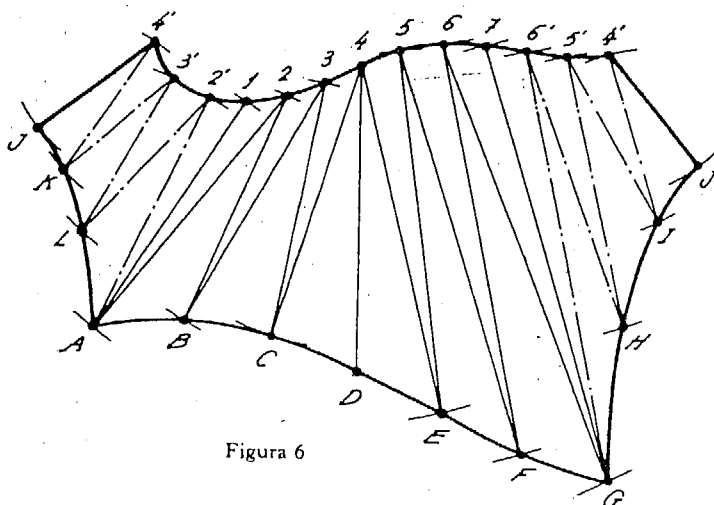


Figura 5

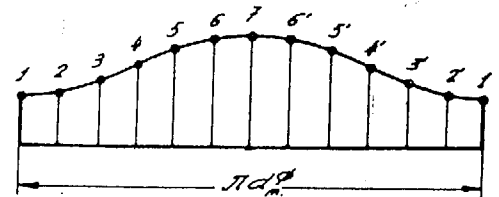


Figura 6

Cotovelo de duas entradas circulares e uma saída quadrada

O cotovelo que vamos desenvolver é formado por duas virolas cilíndricas iguais unidas em dois transformadores que, por sua vez, estão unidos a um prisma quadrado.

As figuras 1 e 2 representam a *elevação* e *perfil* respectivamente, do cotovelo por sua fibra interna. Na figura 3 foi desenhada a seção Z-Z mas, neste caso, pela sua fibra média. Portanto, na figura 1 vemos a parte anterior de uma das vias do cotovelo e na figura 3, a parte posterior da mesma via.

Triangulação da parte anterior. Prolongam-se as bocas do transformador até cortar-se no ponto B_1 que se projeta perpendicularmente ao prolongamento da aresta A-D da figura 2, determinando sobre esta o ponto de intersecção B'_1 . Desde este ponto traça-se uma tangente à circunferência interna da virola cilíndrica, obtendo-se assim o ponto 3 de tangência pertencente à geratriz de separação (para simples verificação, ver o exercício 20).

O arco 1-3 e o arco 3-5 são divididos em um número adequado de partes iguais (duas divisões iguais, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao eixo vertical da virola, obtendo-se assim as ordenadas 2, 3 e 4.

Também os pontos 1, 2, 3, etc. são projetados horizontalmente para a *elevação*, formando desta maneira as geratrizes do mesmo nome do cilindro.

Os novos pontos obtidos sobre a boca do transformador (fig. 1) são unidos com os respectivos pontos A e B, ficando assim triangulada a parte anterior do transformador.

Triangulação da parte posterior (fig. 3). Descreve-se uma semicircunferência sobre o diâmetro médio da virola cilíndrica, que é dividida em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os pontos de divisão traçam-se paralelas ao eixo dessa virola, formando assim suas correspondentes geratrizes, as ordenadas correspondentes e os pontos 1, 2', 3', 4' e 5 da boca do transformador. Depois divide-se em quatro partes a curva de intersecção do transformador de forma parecida à desenhada na figura 3 (esta curva é feita a gosto do estudante) e os pontos de divisão a, b, etc. unem-se com os pontos 1, 2', etc. formando triângulos, ficando assim triangulada a superfície posterior do transformador.

Grandezas reais da parte anterior (fig. 4). Sobre uma vertical qualquer, marca-se o ponto 1 e 5. A partir deste ponto e para baixo, transportam-se as ordenadas 2, 3 e 4 da figura 2, determinando novos pontos sobre a vertical que também designaremos com o mesmo número.

Desde o ponto 1 e 5 marca-se para baixo a distância N tomada da figura 2 e desde o ponto resultante traça-

se uma perpendicular à vertical que chamaremos A e B. Também desde o ponto resultante, transportam-se sobre a reta A e B todas as grandezas falsas A1, A2, A3, B3, B4 e B5 da figura 1, obtendo-se novos pontos que, unidos com os pontos da mesma origem que se encontram na vertical, determinariam as grandezas reais.

Grandezas reais da parte posterior (fig. 5). Marca-se o ponto 1 e 5 sobre uma vertical qualquer e desde este ponto marcam-se para cima as ordenadas 2', 3' e 4' da figura 3. Também desde este ponto marca-se para cima a distância M tomada da figura 2 e desde o ponto obtido traça-se uma horizontal que chamaremos a, b, c, d e e. Sobre esta horizontal transportam-se todas as grandezas falsas a1, a2', b2', etc. da seção Z-Z, determinando novos pontos que se unem com os pontos da mesma origem situados na vertical, obtendo-se desta maneira as grandezas reais.

Desenvolvimento do cilindro (fig. 6). Traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do cilindro ($d^m \times 3,1416$), dividindo-a em duas partes iguais, dividindo depois uma destas partes em quatro partes iguais e desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares à reta de comprimentos iguais aos das geratrizes 1, 2', 3', etc. da seção Z-Z, determinando novos pontos que também chamaremos 1, 2', 3', etc. e que se unem por meio de uma curva contínua.

Depois desenha-se a semicircunferência média da boca circular da figura 2 (essa semicircunferência não foi desenhada neste caso mas pode ser como se vê na figura 4 do exercício 18) e pelos pontos de divisão 1, 2, 3, etc. traçam-se retas radiais que cortam a semicircunferência média antes mencionada, determinando novos pontos. Estes pontos são marcados sobre uma régua flexível que se acoplou à semicircunferência média.

Esta régua é transportada sobre o desenvolvimento da figura 6 para marcar os pontos de divisão desigual e às perpendiculares traçadas desde estes pontos, são transportados os comprimentos das geratrizes 2, 3, 4 e 5 da figura 2, determinando-se assim novos pontos que também chamaremos 2, 3, 4 e 5.

Desenvolvimento do transformador (fig. 7). Acopla-se uma régua flexível à curva do desenvolvimento da figura 6, marcando-se nela os pontos 5, 4, 3, 2, 1, 2', 3', 4' e 5' que servem para determinar os pontos da mesma origem do desenvolvimento do transformador. Depois flexiona-se outra régua flexível até ser acoplada à curva de intersecção da figura 3, marcando-se nela os pontos de divisão a, b, c, d e e.

Uma vez obtidas as duas régua flexíveis, começa-se a triangular o transformador a partir da reta Aa e termina-se como se vê na ilustração.

O prisma quadrado (fig. 8) é desenvolvido pela sua fibra interna.

Figura 1

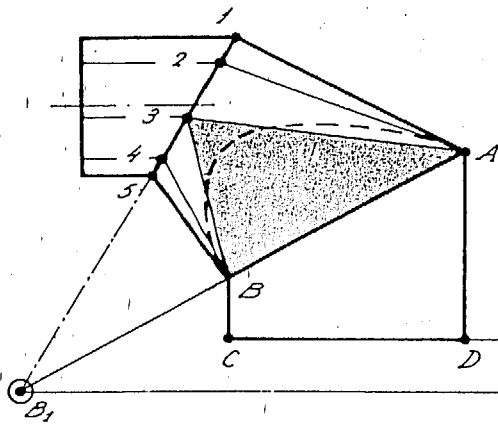


Figura 2

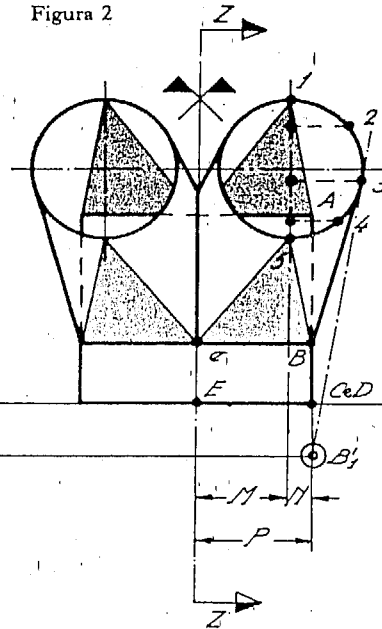


Figura 3

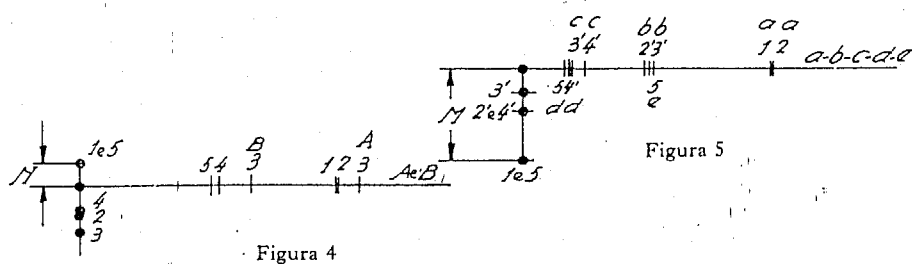
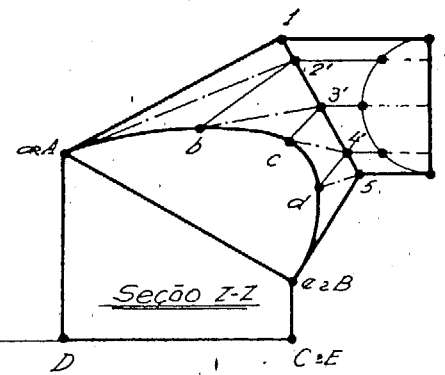


Figura 4

Figura 5

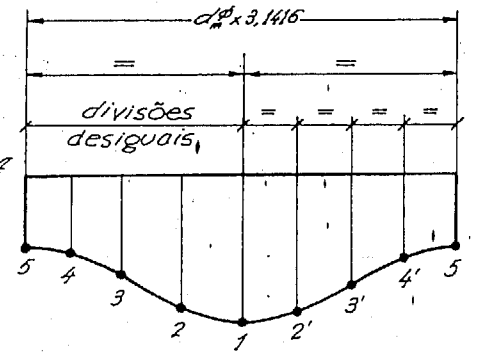


Figura 6

Figura 7

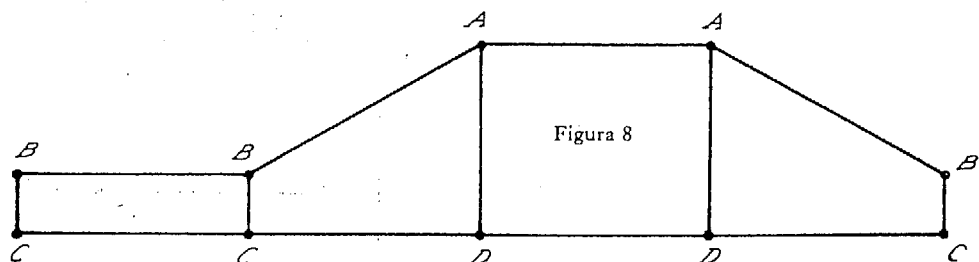
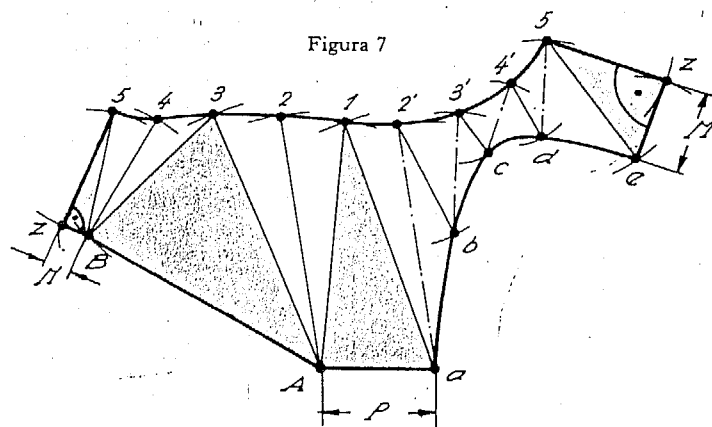


Figura 8

PEÇAS DE TRÊS VIAS

EXERCÍCIO

34

Para triangular o desenvolvimento de uma das pernas da peça de três vias, a primeira coisa que deve ser feita é desenhar a elevação da perna em uma posição adequada. Depois divide-se a superfície da elevação em certo número de triângulos que são formados por *linhas falsas*, devendo-se achar suas *verdadeiras grandezas* para poder ser feita a construção dos triângulos que formam o desenvolvimento da peça.

Na perspectiva representou-se uma das pernas que compõem a peça de união de três vias de bocas circulares e paralelas entre si, sendo paralelo ao plano V de projeção o plano que passa pelos eixos das bocas.

Observe-se que o ponto F da curva de intersecção é mais alto do que o ponto G , pois dessa maneira será mais fácil construir essa perna. (A construção dessa curva é explicada no exercício 53 da terceira parte).

Esta curva pode ser desenhada a gosto do desenhista, mas a curva mais conveniente é a desenhada no exercício seguinte.

A linha de intersecção também pode ser feita em forma retangular ou de outra forma diferente, como foi feito no exercício 36.

A circunferência da base é dividida, neste caso,

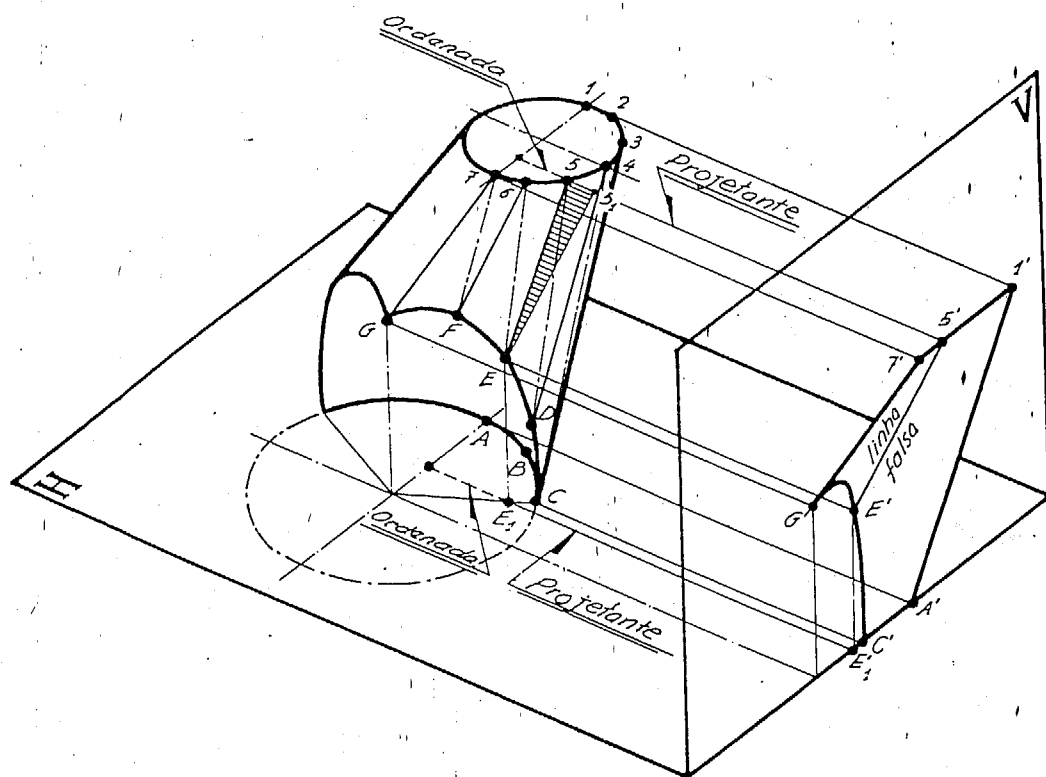
em três partes iguais. Uma vez triangulada a superfície da perna, como se ilustra na perspectiva, tomar-se-á como exemplo a linha $E5$ para explicar a maneira de obter sua verdadeira grandeza. Para isto projeta-se a perna sobre o plano V de projeção, sendo a linha falsa $E'5'$ a projeção da linha real $E5$ da perna.

A linha $E'5'$ não está na verdadeira grandeza porque a projetante do ponto 5 é maior do que a projetante do ponto E .

Se a partir de E for traçada uma paralela à linha $E'5'$, determinaríamos o triângulo retângulo $E-5-5_1$, sendo a hipotenusa $E5$ a grandeza real. O cateto $5-5_1$ é igual à diferença existente entre as ordenadas E_1 da base e a ordenada 5 da boca superior. O cateto $E5_1$ é igual à projeção vertical $E'5'$ da linha real $E5$.

Esclarecida esta questão, é muito fácil obter a grandeza real da linha $E5$, pois basta traçar um triângulo retângulo que tenha um dos catetos igual ao comprimento da linha $E'5'$ tomada da elevação e o outro cateto igual à diferença das ordenadas E e 5 , sendo a hipotenusa deste triângulo a grandeza real da linha $E5$.

A grandeza real de qualquer linha de elevação da perna é determinada de forma análoga.



Calça de três vias de bocas circulares e inclinadas entre si

Depois da explicação que foi dada do sistema, não encontraremos nenhuma dificuldade em aplicar o sistema para desenvolver uma das pernas que compõem a calça em questão.

Desenha-se uma das pernas, como se ilustra na figura 1, e sobre o diâmetro médio da boca superior descreve-se uma semicircunferência que é dividida em certo número de partes iguais (seis, por exemplo) e chamaremos 1, 2, 3, etc. os pontos de divisão. Desde estes pontos traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando assim as ordenadas necessárias para achar as grandezas reais.

Desenha-se sobre a base um quadrante de circunferência que é dividido em três partes iguais, formando o setor $A-O-C$ que representa a metade da base da perna. Desde os pontos B e C traçam-se perpendiculares ao diâmetro da base.

Em um ponto qualquer O do prolongamento da base (fig. 2) traça-se uma perpendicular de comprimento OG igual à distância OG da figura 1.

Desde O marca-se sobre a horizontal a distância OC igual ao raio médio R_m da base e une-se C com G por meio de uma curva ovalada que é dividida em um número adequado de partes, de forma parecida à da figura 2, determinando-se assim os pontos de divisão C, D, E, F e G .

A partir destes pontos traçam-se perpendiculares indefinidas à reta OG , determinando novos pontos sobre esta reta. As distâncias existentes entre esses novos pontos e os pontos C, D, E , etc. são transportadas sobre a reta OC (fig. 1) desde o ponto O , obtendo-se assim novos pontos que também chamaremos C, D, E , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares indefinidas à base até cortar as perpendiculares anteriores nos pontos C, D, E , etc. que se unem por meio de uma curva contínua, sendo esta a linha de intersecção formada com as outras pernas; também foram determinadas desta maneira as ordenadas D, E e F que são desenhadas com linhas descontínuas.

Todos os pontos achados sobre a base, sobre a curva de intersecção e sobre o diâmetro médio da boca superior são unidos formando triângulos, como se ilustra na figura 1, ficando desta maneira triangulada a elevação de uma perna.

Grandezas reais (fig. 3). Sobre uma vertical qualquer marca-se o ponto 1 e 7. Desde este ponto marcam-se as ordenadas 2, 3, 4, etc. da boca superior e desde o mesmo ponto marcam-se as ordenadas B, C, D , etc. da base e da garganta, determinando sobre a vertical novos pontos, a partir dos quais se traçam perpendiculares que também chamaremos B, C, D , etc.

Também desde o ponto 1 e 7 traça-se uma perpendicular à vertical marcada com a letra A , uma vez que os pontos $A, 1$ e 7 da perna estão em um mesmo plano.

Todas as grandezas das linhas falsas $A2, B2, B3$, etc. da elevação (fig. 1) são transportadas sobre as correspondentes horizontais A, B, C , etc. da figura 3 a partir do ponto de intersecção que é formado com a vertical, determinando-se assim novos pontos que receberão seus números correspondentes e que, unidos com os pontos da mesma origem situados na vertical, determinariam as grandezas reais de todas as linhas falsas $A2, B2, B3$, desenhadas na elevação.

As linhas $A1$ e $G7$ da elevação são as únicas que estão em verdadeira grandeza nesta projeção.

Desenvolvimento (fig. 4). O desenvolvimento da perna é feito de forma análoga à de uma calça comum. Procura-se transportar o desenvolvimento da boca superior, o desenvolvimento da base e o desenvolvimento da curva de intersecção CG da figura 2 sobre três réguas flexíveis.

Nota. Se a boca superior for paralela à base ou a calça tiver mais pernas, o procedimento será de forma parecida.

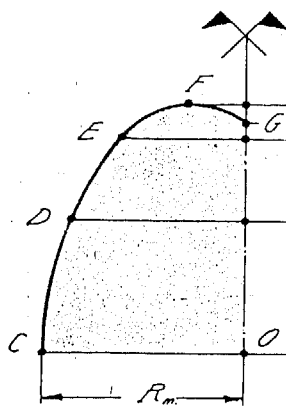


Figura 1

The diagram illustrates the geometry of a dome. The lower portion is a plan view of the dome's base, showing a circular area with points A, B, C, D, E, and F marked along its circumference. A radius R_m is shown from the center point O to point F. A curved arrow indicates a 60° angle. The upper portion is a perspective view of the dome, showing its curved surface and internal structural lines. Points 1 through 7 are marked along the top edge of the dome, with lines connecting them to form the structure.

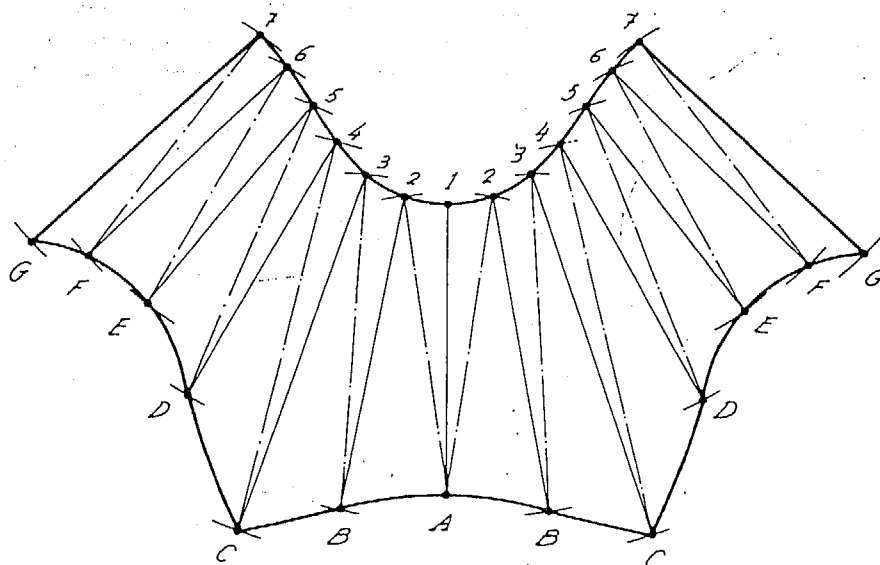
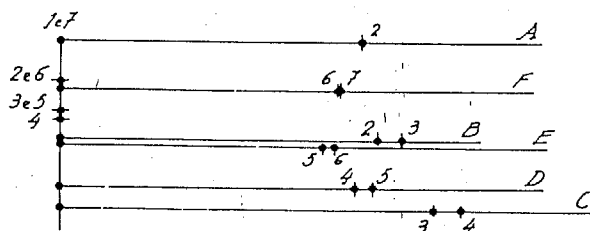
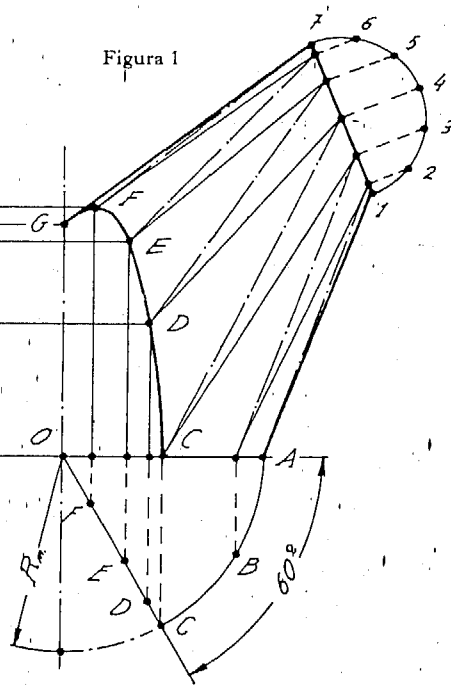


Figura 4

Calça de três vias circulares e curva de intersecção retilínea

As respectivas figuras 1 e 2 representam meia projeção horizontal e vertical de uma perna por sua fibra interna.

A figura 3 representa meia garganta ou linha de intersecção que é sombreada.

A partir do centro da boca circular menor (fig. 1) traça-se uma perpendicular à reta DE , determinando-se assim o ponto 5 sobre a semicircunferência interna. Depois traça-se uma tangente à mesma semicircunferência desde o ponto D , obtendo-se desta maneira o ponto de tangência 3.

Os arcos 1-3, 3-5 e 5-7 são divididos, cada um, em um número adequado de partes iguais (dois, por exemplo).

O arco AC da base é dividido em duas partes iguais, neste caso, e desde os pontos de divisão A , B e C traçam-se perpendiculares à base da perna que é cortada nos novos pontos que chamaremos A , B e C (fig. 2), obtendo-se assim as ordenadas B e C que são representadas por retas de pontos.

Também desde os pontos 1, 2, 3, etc. da figura 1 traçam-se perpendiculares ao seu diâmetro (fig. 2) para obter sobre este os pontos 1, 2, 3, etc. e suas correspondentes ordenadas.

Depois unem-se todos os pontos, como mostram as figuras 1 e 2, sendo desta maneira triangulada a perna (não é necessário triangular a *planta*). Os triângulos sombreados são as superfícies planas.

Grandezas reais (fig. 4). Traça-se uma vertical qualquer, marcada com o ponto 1 e 7 e que representa o centro da boca superior e desde este ponto marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3, 4,

etc.; também desde este ponto marcam-se as ordenadas B , C e D , obtendo sobre a vertical novos pontos a partir dos quais se traçam perpendiculares que chamaremos B , C e D , respectivamente.

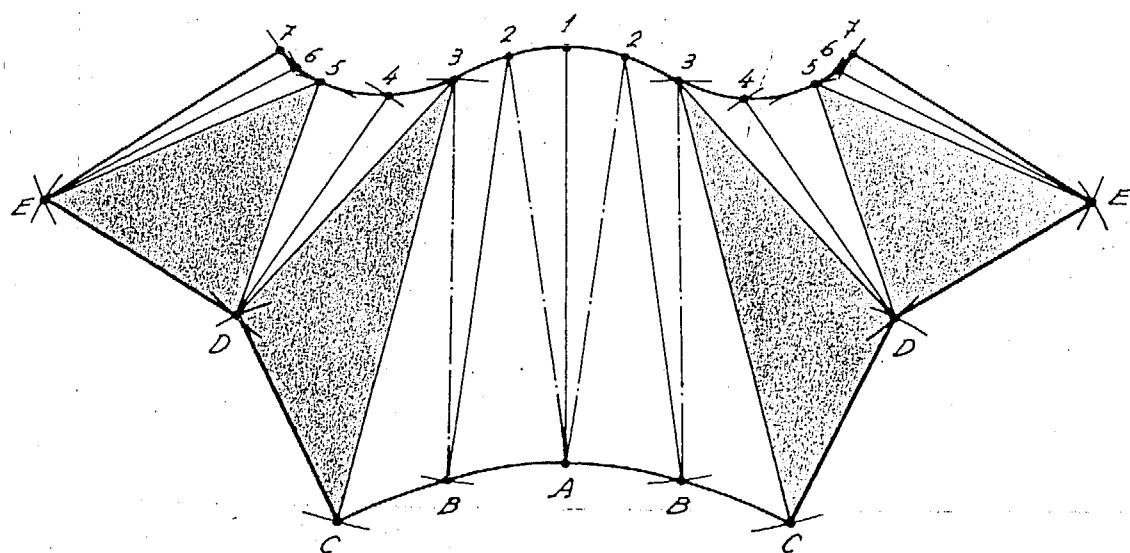
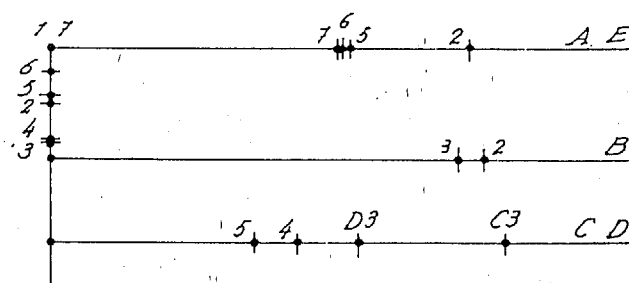
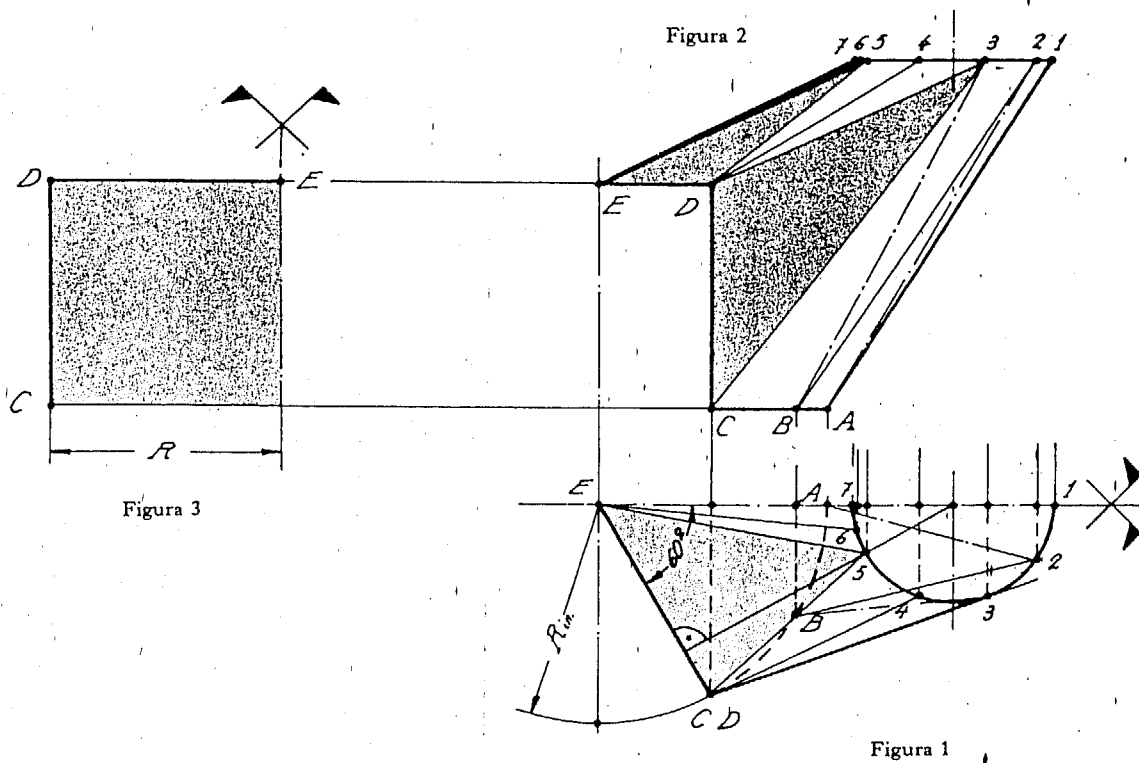
Desde o ponto 1 e 7 traça-se uma perpendicular à vertical que chamaremos A e E por estarem os pontos A , E , 1 e 7 em um mesmo plano.

Sobre as respectivas horizontais A , B , C , etc., transportam-se as correspondentes grandezas falsas $A2$, $B2$, $B3$, etc. da *elevação*, determinando novos pontos que também chamaremos 2, 3, 4, etc., que se unem com os pontos da mesma origem que se encontram na vertical para assim obterem-se as grandezas reais.

Desenvolvimento (fig. 5). Sobre uma régua flexível transporta-se um terço do desenvolvimento da circunferência média da base que é dividida em quatro partes iguais, chamando C , B , A , B e C os pontos de divisão.

Desde o centro da semicircunferência da boca superior (fig. 1) traça-se a semicircunferência média da perna (tudo isto deve ser imaginado, uma vez que não foi representado) e traçam-se linhas radiais que passam pelos pontos 1, 2, 3, etc., determinando assim novos pontos sobre a circunferência média, sendo estes pontos os que são marcados sobre uma régua flexível que se acopla à semicircunferência média. Podemos ver isto graficamente na figura 4 do exercício 18.

Depois começa-se a triangular a partir da reta $A1$ e em ambas as partes dela, construindo os triângulos reais, assim como se vê na figura 5.



Peça de união de duas bocas circulares e outra central retangular e de base circular

Esta peça é composta de três vias, sendo as pernas extremas iguais de bocas circulares e a central retangular, com base circular, estando todos os eixos de boca e de base em um mesmo plano (a elevação é representada pela fibra interna).

Sobre um dos diâmetros internos das bocas circulares das pernas extremas, descreve-se uma semicircunferência. Esta semicircunferência é dividida em um número adequado de partes iguais (seis, por exemplo) e desde os pontos de divisão 1, 2, 3, etc., traçam-se perpendiculares ao diâmetro, obtendo-se assim as ordenadas 2, 3, etc.

Sobre a base da mesma perna descreve-se um quadrante de circunferência que é dividido, neste caso, em três partes iguais, determinando-se os pontos de divisão *A*, *B*, *C* e *D*, a partir dos quais se traçam perpendiculares à base para obter as ordenadas *B*, *C* e *D*.

Desde o ponto médio da base traça-se uma perpendicular à linha de intersecção da perna esquerda, dando-se-lhe um comprimento igual ao raio interno da base, determinando assim um novo ponto que também chamaremos *D*, que se une com o ponto *G* por meio de uma curva qualquer (neste caso é uma curva de oval). Esta curva é dividida em três partes, como se ilustra na figura 1 e desde os pontos de divisão *E* e *F* traçam-se perpendiculares à linha de intersecção, obtendo-se desta maneira as ordenadas *E* e *F*. Os novos pontos achados sobre a linha de intersecção passam à parte direita, formando assim os pontos *E* e *F*. Todos os pontos das bocas circulares e da linha de intersecção da perna da parte direita são unidos formando triângulos. Também se unem os pontos da linha de intersecção com o ponto 8 da boca retangular da perna central.

Grandezas reais (fig. 2). Traça-se uma vertical marcando-se nela o ponto 1, 7 e 9 que representa o centro das bocas das pernas e desde este ponto marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3, etc. e a distância *N* da boca central, determinando-se um novo ponto que será marcado com o número 8. (O retângulo que foi desenhado na parte superior da perna central é a boca dessa perna).

Também desde o ponto 1, 7 e 9 transportam-se sobre a vertical as ordenadas *B*, *C*, *D*, *E* e *F* do quadrante da base e do quadrante de oval, respec-

tivamente. Desde os pontos resultantes traçam-se perpendiculares à vertical que receberão suas correspondentes letras.

Também desde o ponto 1, 7 e 9 traça-se uma perpendicular que terá a letra *A*, já que os pontos *A*, 1, 7 e 9 das pernas encontram-se em um mesmo plano.

Sobre todas estas perpendiculares transportam-se suas correspondentes grandezas das linhas falsas da elevação, determinando assim novos pontos que se unem com os pontos da mesma origem situados na vertical para assim determinar as grandezas reais.

Desenvolvimento da perna central (fig. 3). Os pontos *D*, *E*, *F* e *G* do quadrante de oval da fibra interna da garganta passam para o quadrante da fibra média, acoplando-se uma régua flexível a este novo quadrante, marcando na régua os pontos *D*, *E*, *F* e *G*.

Depois marca-se a reta 8-8 (fig. 3) de comprimento igual ao lado interno 8-8 da boca retangular. Desde os pontos 8 descrevem-se arcos de raio igual à grandeza real 8*D* tomada da figura 2, determinando pela intersecção de ambos os arcos o ponto *D*.

Com as grandezas reais 8*E*, 8*F* e 8*G* descrevem-se arcos desde os mesmos pontos, colocando-se o ponto *D* da régua flexível sobre o ponto *D* do desenvolvimento, flexionando-se depois a régua até que seus pontos *E*, *F* e *G* coincidam com os arcos anteriores, determinando-se assim os pontos *E*, *F* e *G* (desenha-se a curva formada pela régua).

Marcando o centro nos pontos 8-8 descrevem-se arcos de raio igual à grandeza real na distância *N* (metade da largura interna da boca retangular) e marcando o centro nos pontos *G* - *G*, descrevem-se arcos de raio igual à distância *G*9 da elevação, cortando os arcos anteriores nos pontos 9-9, ficando assim desenvolvida meia perna central.

O desenvolvimento de uma das pernas externas (fig. 4) é feito de forma análoga à dos casos anteriores.

Nota. Sobre as régua flexíveis correspondentes transportam-se os desenvolvimentos das fibras neutras.

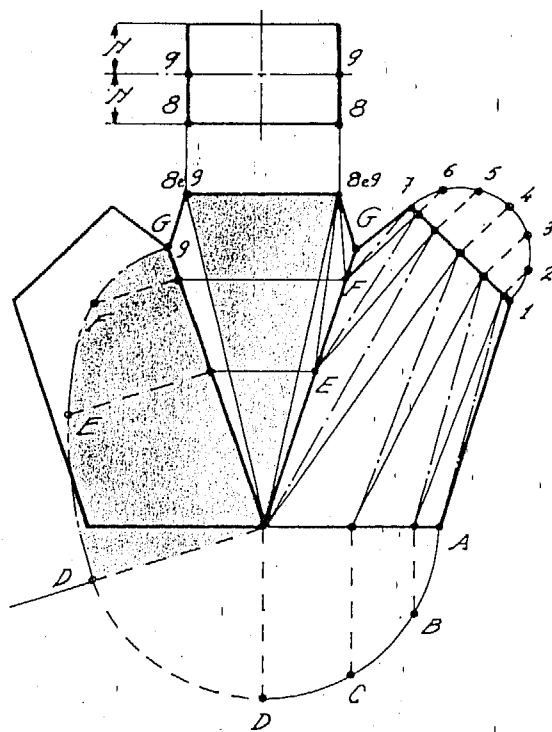


Figura 1

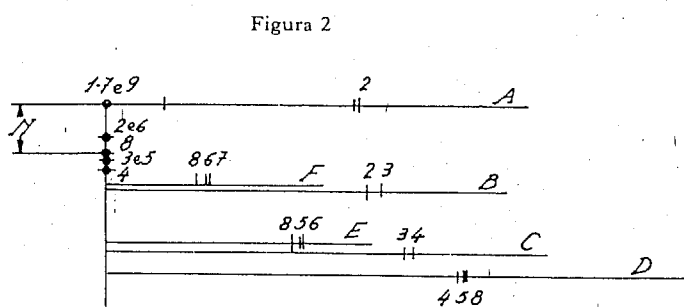


Figura 2

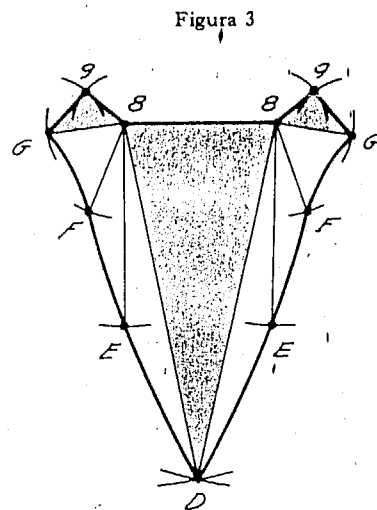


Figura 3

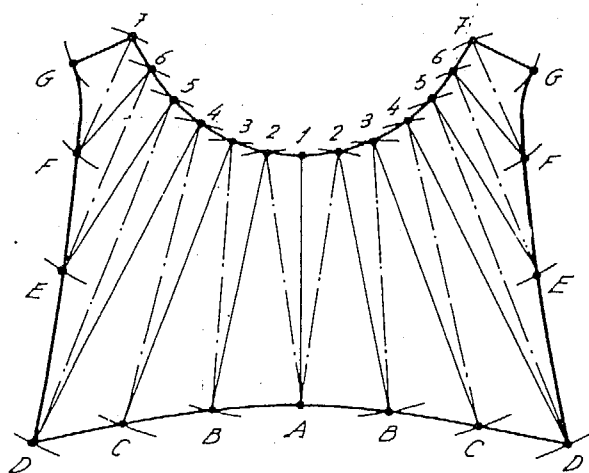


Figura 4

Peças de três pernas diferentes, estando os centros de suas bocas em um mesmo plano

A figura 1 representa a *elevação* da peça em questão que é formada por três pernas de boca quadrada, circular e elíptica, respectivamente, que formam uma base circular.

A figura 2 representa a forma da boca da perna da parte esquerda, sendo, neste caso, um quadrado. Sobre o diâmetro da peça e dos diâmetros das outras duas pernas foi desenhada a metade do contorno de suas bocas.

Para achar o ponto D da semicircunferência, passa-se um plano projetante pela boca quadrada da perna da esquerda, sendo esse plano representado por suas linhas horizontal e vertical Q e Q_1 , respectivamente.

Desde h' transporta-se sobre a linha horizontal Q a distância $N = OX$ igual à metade do lado interno da boca quadrada, determinando-se assim o ponto h . Depois traça-se uma tangente à semicircunferência da base desde o ponto h , determinando-se assim o ponto de tangência D .

Os arcos AD e DC são divididos em um número adequado de partes iguais (três, por exemplo), desenhando-se ordenadas B , C , D , E e F .

Também a semicircunferência da perna central e a semi-elipse da perna da parte direita são divididas, neste caso, em seis partes iguais, desenhando-se suas correspondentes ordenadas 2 , 3 , 4 , etc. e $2'$, $3'$, $4'$, etc.

Depois desenha-se na figura 3 a metade da curva de intersecção da perna central e da perna de boca quadrada de forma análoga à do caso anterior, dividindo-se a curva em três partes quaisquer, traçando depois perpendiculares à reta DJ , obtendo-se assim as ordenadas H e I . Embora neste caso tenha sido desenhado um quadrante de oval, o mais apropriado seria desenhá-la curva de

forma parecida à desenhada por linhas imaginárias.

Depois as distâncias DH , HI e IJ (fig. 3) são transportadas sobre a correspondente linha DJ da figura 1, obtendo-se desta maneira os pontos H , I e J na *elevação*.

A outra curva de intersecção (fig. 4) correspondente à perna central e à perna da parte direita é feita da mesma maneira.

Todos os pontos dos diâmetros, das linhas de intersecção, etc. (fig. 1) unem-se entre si, assim como se ilustra, formando triângulos.

Nas respectivas figuras 5, 6 e 7 foram traçadas as grandezas reais da perna de boca quadrada, da perna central e da perna de boca elíptica da mesma maneira como foram traçadas para casos parecidos.

Antes de começar a desenvolver as pernas, passam-se à fibra média todos os pontos de divisão das bocas, da base e das curvas de intersecção, transportando depois sobre estas fibras médias as régua flexíveis adequadas para marcar os novos pontos de divisão situados nessas fibras médias.

A figura 8 representa meio desenvolvimento da perna de boca quadrada que se começou a traçar a partir da reta OA .

O traçado da figura 9 representa meio desenvolvimento da perna central, sendo a reta $D4$ a primeira a ser traçada.

Para desenvolver a outra perna (fig. 10), começa-se pela reta $A1'$ e depois continua-se, por sua vez, em ambas as partes desta reta.

Estes desenvolvimentos são feitos da mesma maneira que os desenvolvimentos dos casos anteriores.

Figura 2

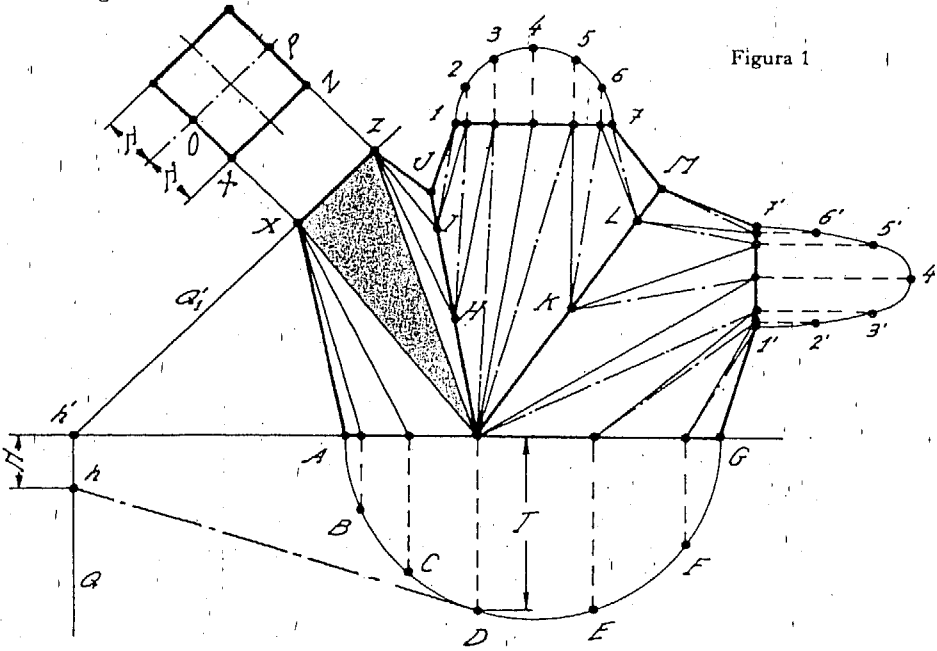


Figura 1

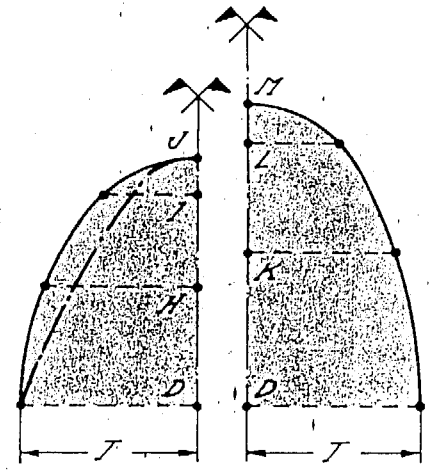


Figura 3

Figura 4

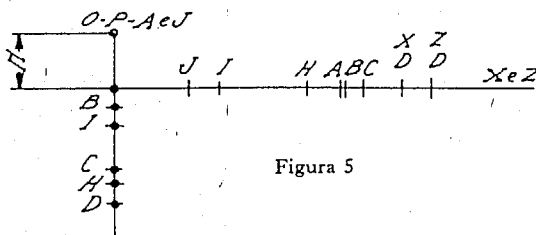


Figura 5

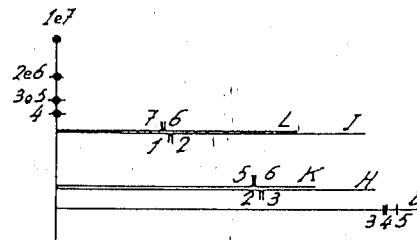


Figura 6

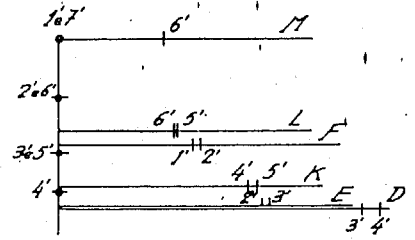


Figura 7

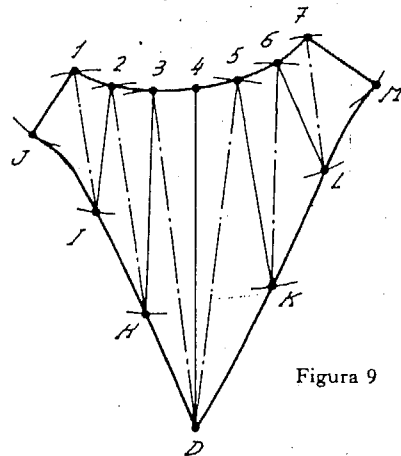


Figura 9

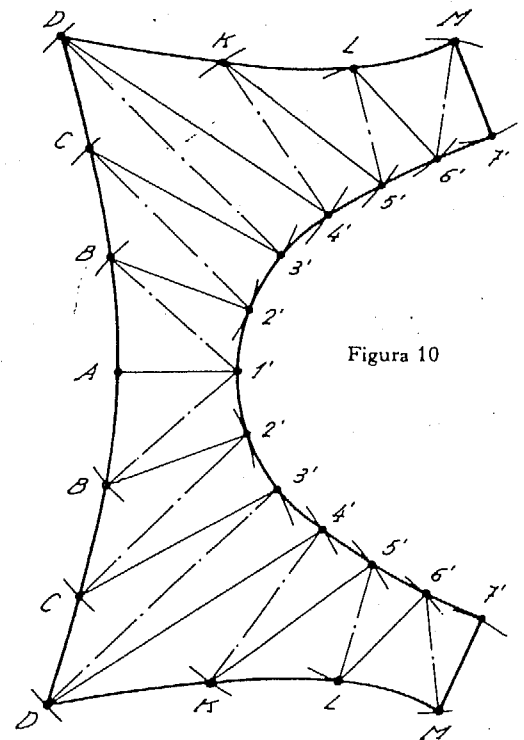


Figura 10

INTERSECÇÕES

EXERCÍCIO

39

Intersecção de um cone perpendicularmente sobre um cilindro, cujos eixos estão em um mesmo plano

Quando o vértice do cone não for acessível ao compasso, recorre-se ao método de triangulação.

A figura 1 representa o tronco de cone pela fibra média e a virola cilíndrica, por sua circunferência externa.

Sobre os diâmetros do cone desenha-se um quadrante de circunferência que é dividido em certo número de partes iguais (três, por exemplo), colocando números nos pontos de divisão do quadrante superior e letras no outro quadrante. Depois desenharm-se as ordenadas 1, 2, etc. e A, B, etc., determinando novos pontos sobre os diâmetros que se unem entre si por meio de retas geratrizes que cortam a circunferência externa do cilindro nos pontos a, b, etc. Desde estes pontos traçam-se perpendiculares ao eixo do cone até cortar a sua geratriz extrema nos pontos a_1 , b_1 , etc., determinando assim as distâncias H_1 , H_2 , H_3 e H_4 .

As perpendiculares anteriores também determinam os pontos b_2 e c_2 , a partir dos quais se traçam paralelas ao eixo do cone e desde os pontos b_3 e c_3 traçam-se arcos que partam dos pontos b_2 e c_2 , determinando assim os pontos b_4 e c_4 sobre as paralelas anteriores.

Traçado do orifício externo. Sobre uma reta

qualquer (fig. 2) transportam-se os comprimentos dos arcos dc , cb , etc. da figura 1, determinando-se assim novos pontos que também chamaremos a, b, c, etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares a ambas as partes da reta, transportando-se sobre estas perpendiculares os correspondentes comprimentos dos arcos b_1b_4 , c_1c_4 e a distância aa_1 da figura 1, determinando-se sobre as perpendiculares da mesma origem os pontos a_1 , b_4 , etc. que se unem por meio de uma curva contínua.

Grandeza real das diagonais (fig. 3). Traça-se um triângulo retângulo de catetos respectivos iguais à ordenada 3 e ao comprimento falso da diagonal $D3$ da figura 1, sendo a hipotenusa $D3$ da figura 3 a grandeza real de todas as diagonais.

Desenvolvimento do cone (fig. 4). Primeiramente desenvolve-se o tronco de cone completo, como se explica no exercício 4 e depois transportam-se sobre as geratrizes correspondentes as distâncias H_1 , H_2 , etc. da figura 1, obtendo-se desta maneira os pontos a, b, etc. da figura 4 que se unem entre si por meio de uma curva contínua.

Figura 1

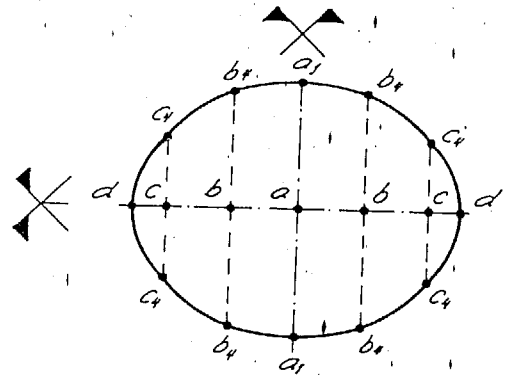
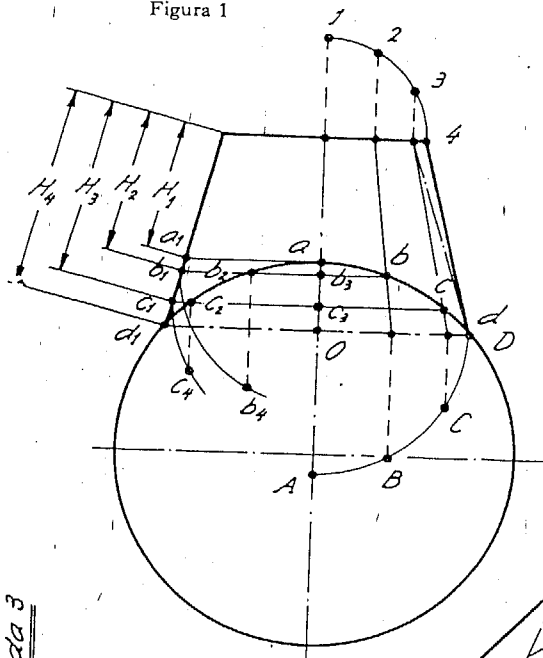


Figura 2

Figura 3

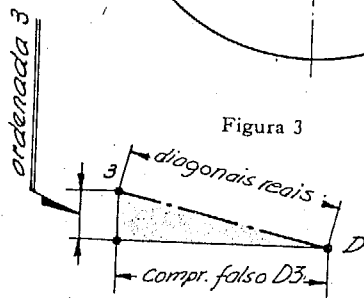
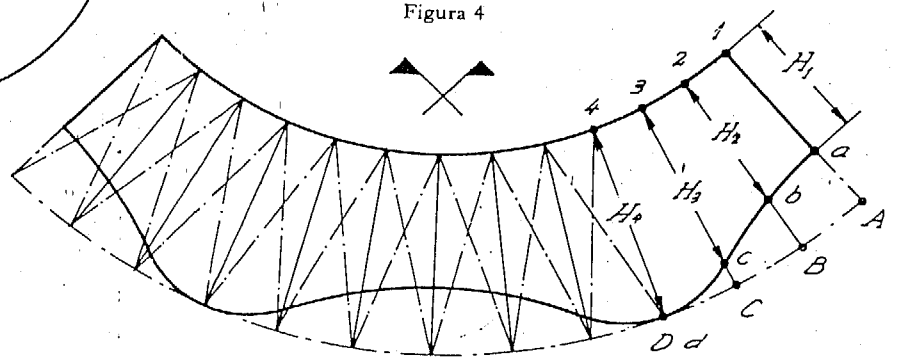


Figura 4



Intersecção de um cone perpendicularmente sobre um cilindro, cujos eixos estão em planos paralelos

A representação do cone é feita por sua fibra média e a do cilindro pela fibra externa.

A figura 1 só representa o cone e um arco da circunferência externa do cilindro.

Sobre os diâmetros do cone descrevem-se semi-circunferências, divididas em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo) e desde os

pontos de divisão 2, 3, etc. e B, C, etc., traçam-se perpendiculares aos diâmetros, obtendo assim novos pontos sobre estes que se unem por meio de retas gératrizes, como se ilustra na figura 1.

O resto dos dados podem ser achados da mesma maneira do exercício anterior.

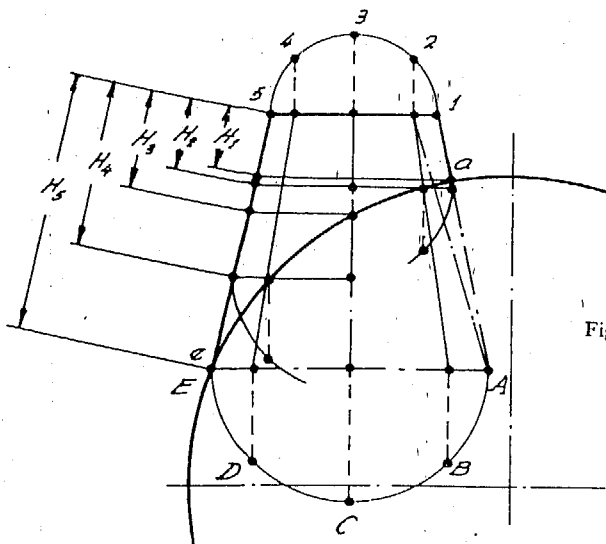


Figura 1

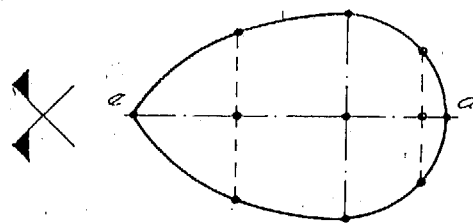


Figura 2

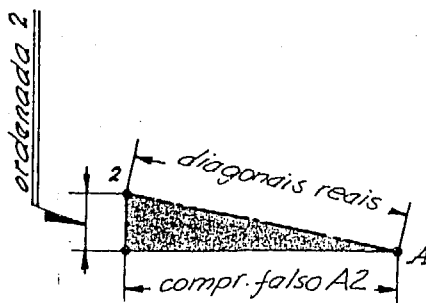


Figura 3

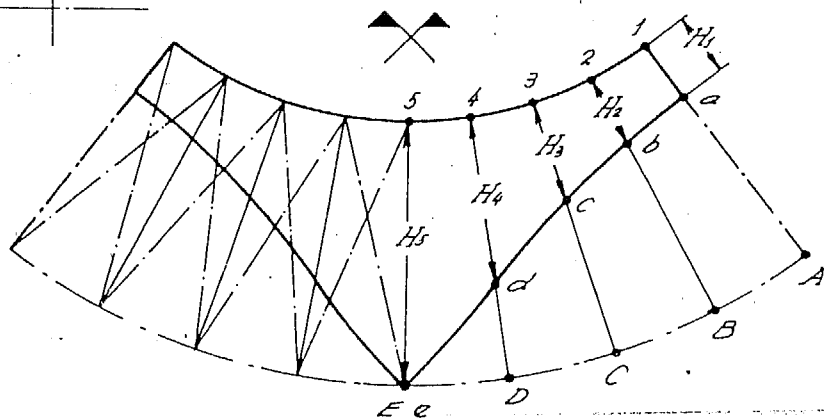


Figura 4

Intersecção de um cone sobre um cilindro, cujos eixos são oblíquos e estão em um mesmo plano

A curva de intersecção de ambos os corpos (fig. 1) pode ser obtida pelo método das esferas, como se explica no exercício 121 da terceira parte.

Sobre os diâmetros médios do tronco de cone descrevem-se semicircunferências que são divididas em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo), traçando desde os pontos de divisão as respectivas ordenadas 2, 3, etc. e B, C, etc. Os pontos obtidos sobre os diâmetros, quando forem traçadas as ordenadas, unem-se entre si por meio de retas geratrizes que cortam a curva de intersecção nos pontos a, b, c , etc., a partir dos quais se traçam perpendiculares ao tronco de cone até cortar a geratriz externa, determinando-se desta maneira as distâncias H_1, H_2, H_3 , etc.

Em seguida, descreve-se um quadrante de circunferência sobre um dos diâmetros externos do cilindro e os pontos a, b, c , etc. são projetados paralelamente ao eixo horizontal do cilindro até cortar o quadrante nos pontos a_1, b_1, c_1 , etc.

Desenvolvimento do orifício externo. Os pontos a, b, c , etc. (fig. 1) são projetados perpendicular-

mente sobre uma paralela qualquer ao eixo do cilindro, determinando sobre esta os pontos a_2, b_2, c_2 , etc. Esta reta é transportada à figura 2 e a uma distância qualquer desta reta traça-se a paralela a_1e_1 .

Desde os pontos b_2, c_2 e d_2 , traçam-se perpendiculares à reta a_1e_1 e em ambas as partes desta reta, transportam-se sobre as perpendiculares os comprimentos dos arcos da mesma origem a_1b_1, a_1c_1 e a_1d_1 da figura 1, determinando assim os pontos b_1, c_1 e d_1 do desenvolvimento que se unem com os pontos a_1 e e_1 por meio de uma curva contínua.

Grandeza real das diagonais. A grandeza real das diagonais do cone pode ser achada graficamente, como se vê na figura 3.

Desenvolvimento do cone (fig. 4). Primeiramente desenvolve-se o tronco de cone, como se explica no exercício 4 e depois transportam-se sobre as geratrizes correspondentes as distâncias H_1, H_2 , etc. da figura 1 para se obter dessa maneira os pontos a, b , etc. do desenvolvimento que se unem por meio de uma curva contínua.

Figura 1

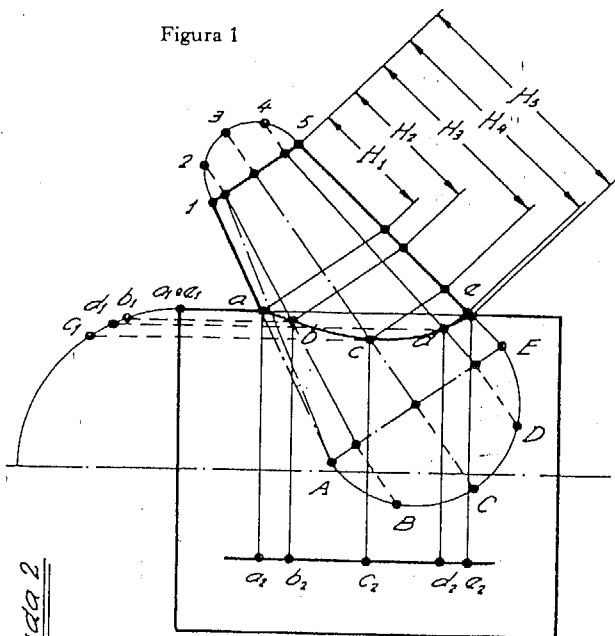


Figura 3

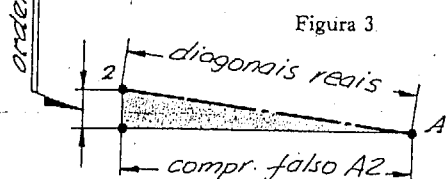


Figura 2

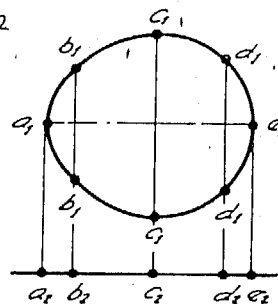
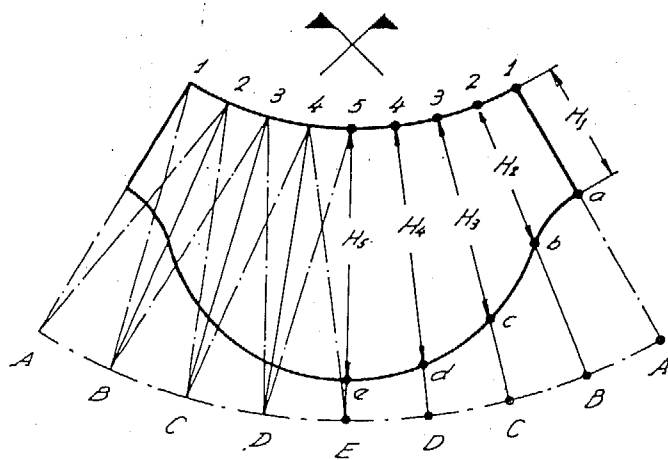


Figura 4



Intersecção de um cone sobre um cilindro, cujos eixos são oblíquos e estão em planos paralelos

As respectivas figuras 1 e 2 representam a *elevação* e o *perfil* de ambos os corpos.

O *desenvolvimento do orifício* (fig. 3). O traçado das diagonais reais (fig. 4) e o desenvolvimento do tronco de cone são feitos como no caso anterior.

Traçado da curva de intersecção. Sobre o diâmetro menor do cone (fig. 1) descreve-se uma semicircunferência que é dividida em certo número de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão 2 e 2', 3 e 3', etc. traçam-se perpendiculares a diâmetro, determinando sobre este novos pontos e as distâncias M e N .

Os novos pontos achados sobre o diâmetro menor são projetados horizontalmente ao perfil e em ambas as partes do eixo do cone (fig. 2); transpor-

tam-se sobre estas partes as distâncias M e N , determinando-se assim os pontos $1_1, 2_1, 3_1$, etc. e $2'_1, 3'_1$, etc., que são unidos por meio de uma curva contínua que, neste caso, é uma elipse, ficando assim representada a base menor do cone na vista de *perfil*.

A mesma operação é feita para representar no *perfil* a base maior.

Os pontos obtidos sobre os diâmetros (fig. 1) unem-se por meio de retas geratrizes, como os da figura 2. As geratrizes da figura 2 cortam a circunferência externa do cilindro nos pontos a, b, c , etc. e b', c' . Estes pontos são projetados horizontalmente na figura 1, determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos de intersecção a_1, b_1, c_1 , etc. e b'_1, c'_1 , etc. que, unidos por meio de uma curva contínua, determinam a curva de intersecção.

Figura 1

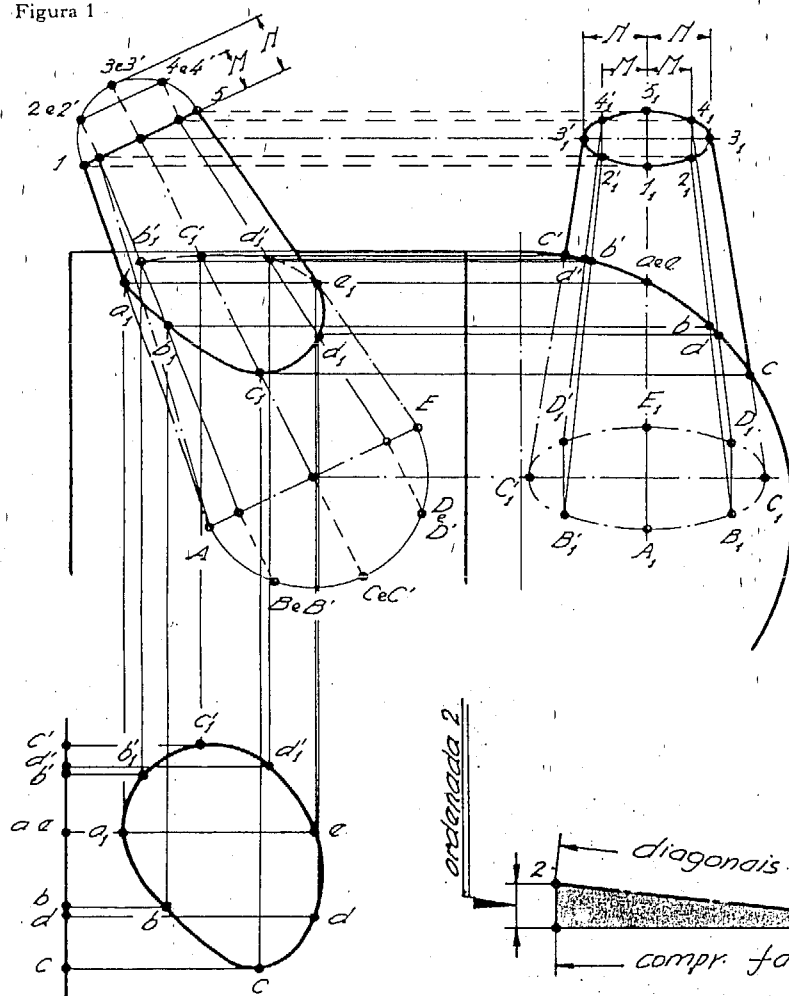


Figura 3

Figura 2

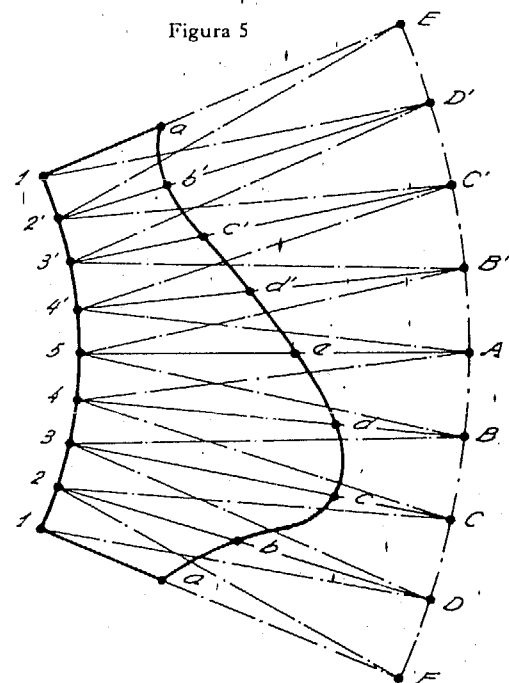


Figura 5

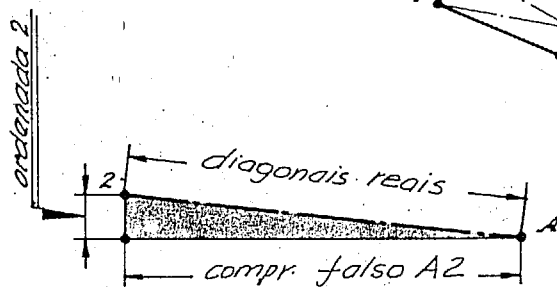


Figura 4

Intersecções cônicas (método geral)

Neste exercício explicaremos um *método geral* para desenvolver intersecções retas que servirá para desenvolver outras intersecções parecidas.

Este método consiste em seccionar ambos os cone por meio de planos secantes que passam pelas geratrizes de divisão do enxerto. Em primeiro lugar explicaremos como se determina a curva formada por um plano secante ao seccionar obliquamente um cone qualquer. Representaremos somente a curva necessárias, sendo, neste caso, a compreendida na metade do cone da parte direita.

A metade da circunferência da base (fig. 1) é dividida em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo) e os pontos de divisão a , b , c unem-se com o centro V por meio de retas geratrizes, determinando os pontos a_1 , b_1 e c_1 sobre a circunferência de diâmetro menor. Os pontos a , b , c e a_1 , b_1 , c_1 são projetados perpendicularmente sobre seus respectivos diâmetros da figura 2, determinando sobre este diâmetro os pontos a_2 , b_2 , c_2 e a_3 , b_3 , c_3 que se unem entre si por meio de retas geratrizes.

O cone é seccionado por meio de um plano secante qualquer que corta, neste caso, as geratrizes nos pontos a_4 , b_4 e c_4 (fig. 2). Os pontos a_4 e b_4 são projetados na *planta*, determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos a_5 e b_5 (fig. 1). O ponto c_4 da figura 2 é projetado perpendicularmente, ao eixo do cone até cortar a geratriz extrema no ponto c_5 que é projetado perpendicularmente ao eixo horizontal da figura 1, determinando desta maneira o ponto c_6 . Gira-se este ponto em redor do ponto V , determinando sobre o eixo vertical os pontos c_7 que, unidos com os pontos b_5 e a_5 , representariam a curva formada pelo plano secante em questão.

A seguir explicaremos como se representa a *planta* (fig. 4) de um tronco de cone quando sua *elevação* (fig. 3) tem o eixo paralelo ao plano vertical de projeção e inclinado com respeito ao horizontal.

Sobre o diâmetro maior (fig. 3) descreve-se uma semicircunferência que é dividida em um número adequado de partes iguais (quatro, por exemplo). Desde os pontos de divisão B e H , C e G , D e F traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando novos pontos sobre este diâmetro e as distâncias N e M . Desde estes novos pontos traçam-se perpendiculares ao eixo do cone, visto em *planta*, e em ambas as partes deste eixo traçam-se paralelas às distâncias N e M tomadas da figura 3, determinando novos pontos sobre as perpendiculares anteriores que também chamaremos A , B , C , etc., que se unem por meio de uma curva contínua e

que, neste caso, é uma elipse. Para achar a base menor, vista em *planta*, aplica-se o mesmo procedimento usado para a base maior e depois unem-se os pontos 1 , 2 , 3 , etc. e A , B , C , etc. (fig. 4) por meio de retas geratrizes.

Uma vez compreendidas estas explicações não encontraremos nenhuma dificuldade para achar a linha de intersecção de ambos os corpos, conhecendo as vistas em *planta* (fig. 6) e *elevação* (fig. 5). A *planta* e a *elevação* do enxerto são representadas tal como se explicou anteriormente, e por suas geratrizes de divisão (fig. 5) passam planos secantes, determinando as curvas formadas por estes planos quando o cone for seccionado (fig. 6).

As geratrizes do enxerto (fig. 6) cortam as curvas de seção da mesma origem nos pontos a , b , c , etc. pertencentes à linha de intersecção. Estes pontos são projetados na *elevação*, determinando sobre as geratrizes da mesma origem os pontos a_1 , b_1 , c_1 , etc. que se unem por meio de uma curva contínua que representa a linha de intersecção.

Desde estes pontos traçam-se perpendicularmente aos eixos de ambos os cones até cortar as geratrizes extremas, determinando novos pontos sobre estas geratrizes.

Desde V (fig. 6) traçam-se retas geratrizes que passam pelo pontos a , b , c , etc., da linha de intersecção, determinando sobre as circunferências de ambas as bases os pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc. e a_3 , b_3 , c_3 , etc.

Desenvolvimento do orifício (fig. 7). Primeiramente desenvolve-se o cone marcando-se o seu eixo (não se representou o desenvolvimento completo). Depois acopla-se uma régua flexível à circunferência da base maior do cone (fig. 6) marcando-se o eixo horizontal e os pontos a_3 , b_3 , c_3 , etc.; em seguida, transporta-se essa régua ao arco maior do desenvolvimento (fig. 7), colocando o eixo do cone marcado na régua sobre o eixo do cone marcado no desenvolvimento; os pontos a_3 , b_3 , etc. da régua são marcados no arco. A mesma operação é feita com outra régua que se acopla à circunferência menor para achar os pontos a_2 , b_2 , c_2 , etc. do desenvolvimento.

Os pontos a_2 , b_2 , etc. são unidos com os pontos a_3 , b_3 , etc. e a partir destes últimos pontos, transportam-se sobre as correspondentes geratrizes desenvolvidas seus comprimentos reais, tomados da geratriz extrema do cone da figura 5 a partir do ponto P .

O desenvolvimento do enxerto é feito de forma análoga à dos casos anteriores.

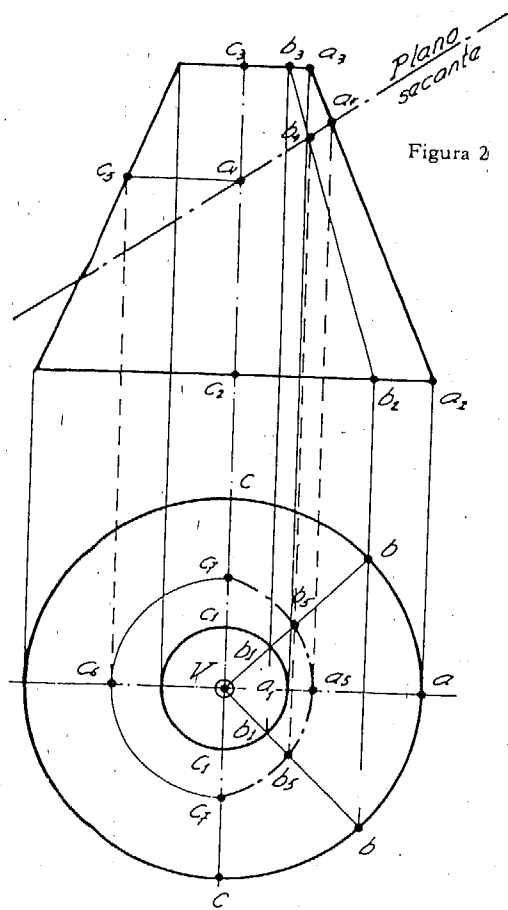


Figura 2

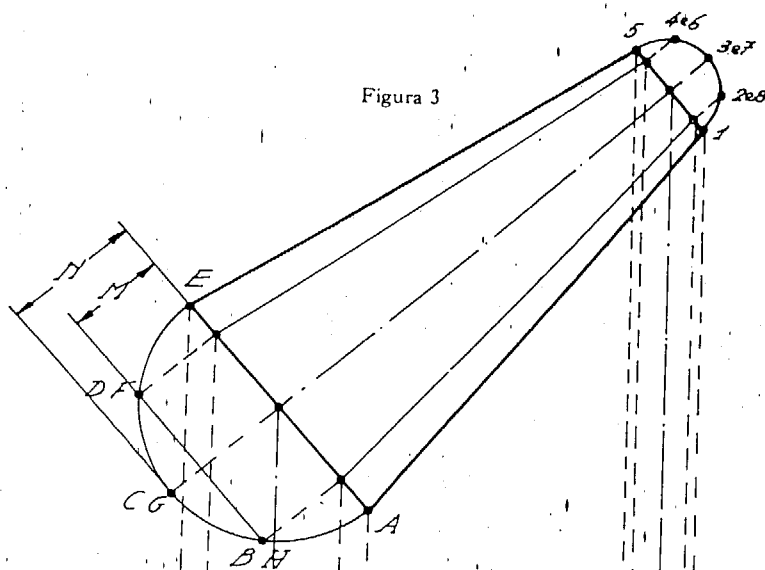


Figura 3

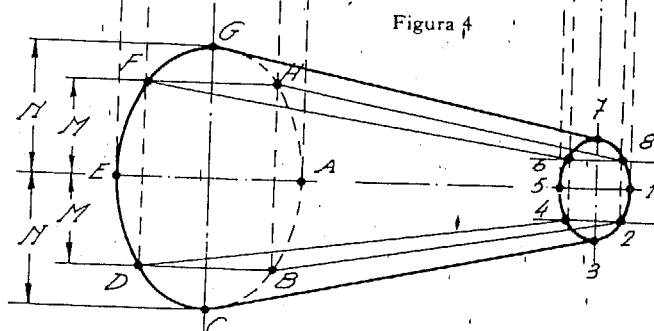


Figura 4

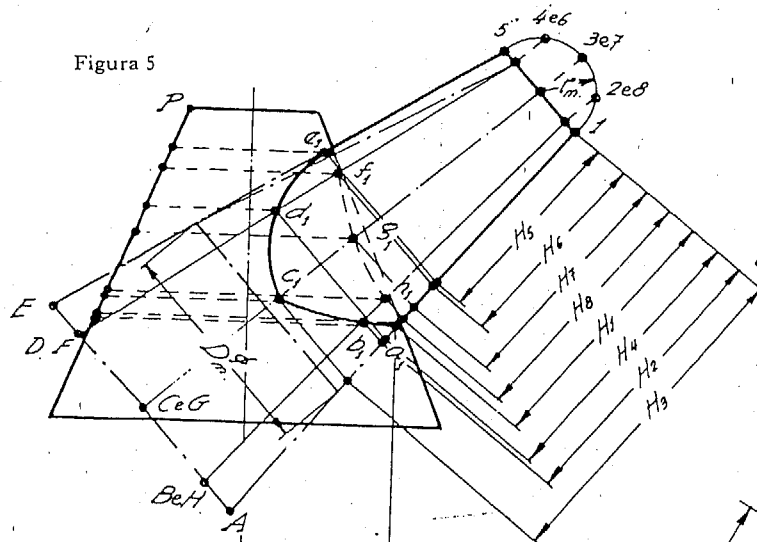


Figura 5

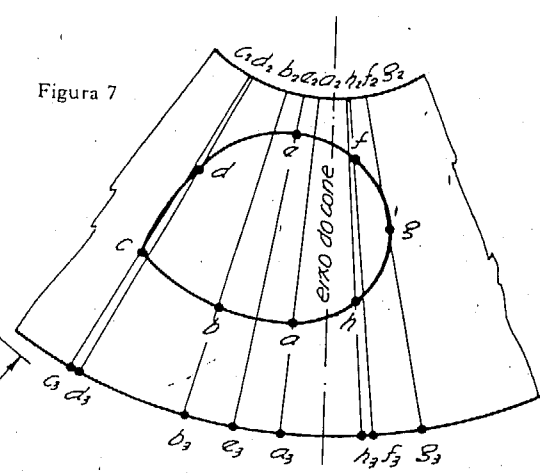


Figura 7

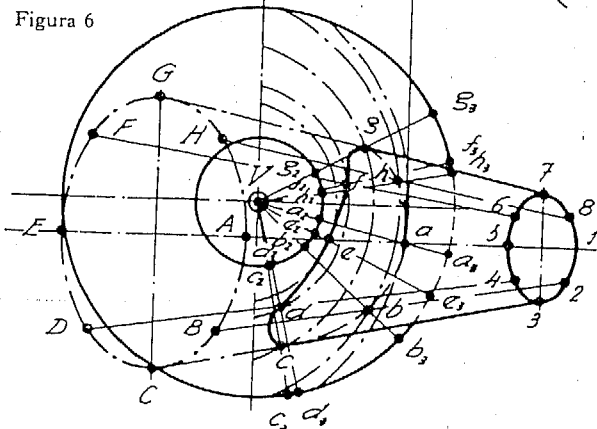


Figura 6

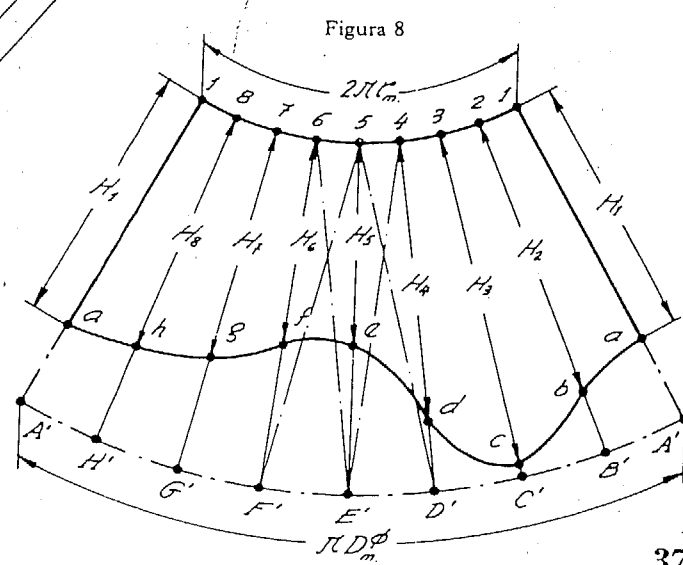


Figura 8

Intersecção de uma peça especial sobre um cilindro

Dada a *elevação* da peça especial enxertada em um cilindro, o procedimento será decompor essa peça em partes desdobráveis. Como se pode observar na ilustração, a peça é composta de duas superfícies cônicas iguais e outras duas superfícies planas também iguais em forma de triângulos (o triângulo sombreado), pois, na *elevação* só se vê um, já que este cobre a projeção do outro.

Sobre o diâmetro médio da peça desenha-se um quadrante de circunferência que representa a quarta parte da boca que se divide em um número adequado de partes iguais (três, por exemplo), numerando-se 1, 2, 3 e 4 os pontos de divisão.

Estes pontos são projetados perpendicularmente ao diâmetro, determinando-se novos pontos sobre este diâmetro e as ordenadas 2, 3 e 4.

Depois descreve-se um quadrante de circunferência sobre o diâmetro médio do cilindro que é dividido, neste caso, em três partes iguais, marcando-se os pontos de divisão com A, B, C e D.

Desde estes pontos traçam-se paralelas ao eixo do cilindro, obtendo-se as ordenadas B, C e D (estas ordenadas foram desenhadas com retas descontinuas).

Também estas paralelas cortam a linha de intersecção da peça e do cilindro nos pontos A_1 , B_1 , C_1 e D_1 que se unem com os pontos do diâmetro da peça, formando triângulos, como se ilustra na figura 1.

Desenvolvimento do orifício (fig. 2). A uma distância qualquer do prolongamento do eixo da peça especial traça-se uma paralela sobre a qual se transporta a metade do desenvolvimento da circunferência média do cilindro, dividida, neste caso, em seis partes iguais.

Desde os pontos de divisão A, B, C, etc. traçam-se perpendiculares à reta, determinando-se os pontos A_1 , B_1 , C_1 , etc. sobre as projeções da mesma origem da figura 1. Estes novos pontos achados são unidos por meio de uma curva contínua e os pontos D_1 e E_1 são unidos por meio de retas, ficando desta maneira desenvolvido meio orifício. A

outra metade que foi desenhada com linhas imaginárias é traçada da mesma maneira.

Grandezas reais (fig. 3). Traça-se uma vertical qualquer marcando-se nela o ponto 1 que representa o centro da boca da peça especial. Desde este ponto transportam-se sobre a vertical as ordenadas 2, 3, 4 e B, C, D e E, colocando números nos pontos obtidos com as primeiras ordenadas e traçando-se perpendiculares à vertical desde os pontos obtidos com as segundas (estas perpendiculares recebem suas correspondentes letras).

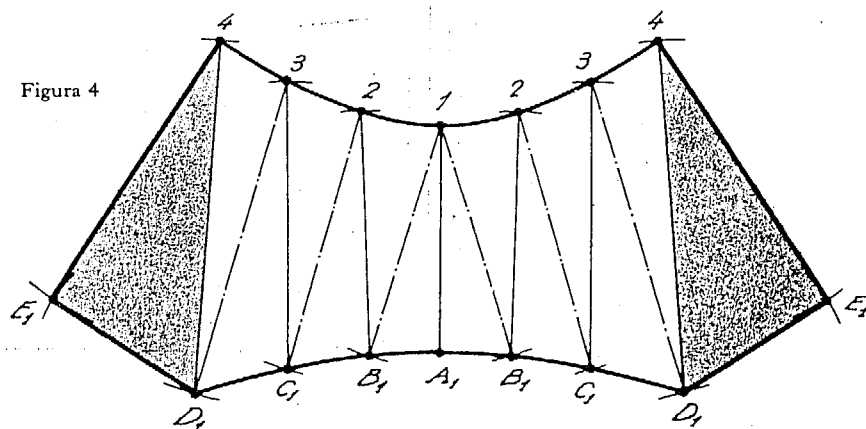
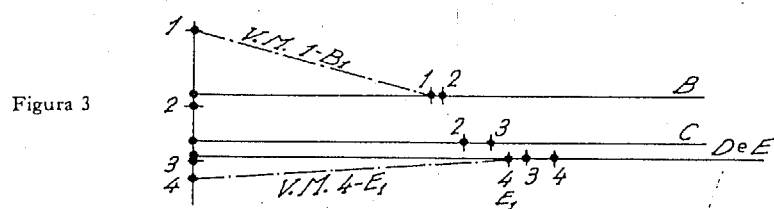
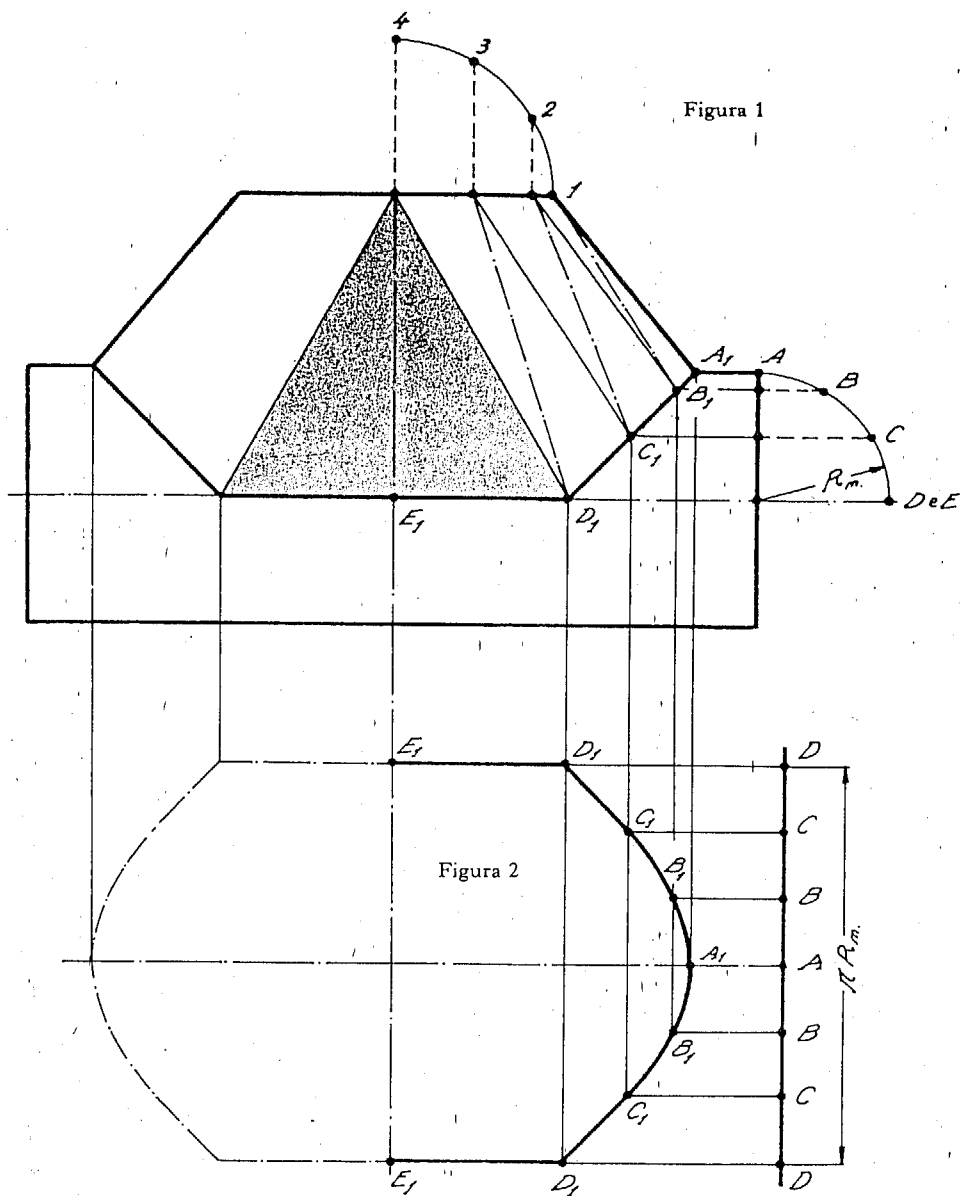
Todos os comprimentos das linhas falsas B_11 , B_12 , C_12 etc. da *elevação* são transportados sobre suas correspondentes horizontais da figura 3, medidas a partir do ponto de intersecção que formam com a vertical, determinando novos pontos sobre as horizontais que chamaremos 1, 2, 3, etc. que, unidos com os pontos da mesma origem da vertical, determinariam todas as grandezas reais.

Como exemplo, uniu-se o ponto 1 da horizontal com o número 1 da vertical, determinando-se desta maneira a verdadeira grandeza da linha B_11 . Também uniu-se o ponto $4E_1$ da horizontal com o ponto da mesma origem da vertical, obtendo-se a verdadeira grandeza da linha $4E_1$.

Desenvolvimento da peça especial (fig. 4). Acolpa-se uma régua flexível à curva do orifício (fig. 2), marcando-se nela os pontos A_1 , B_1 , etc. Sobre outra régua flexível transporta-se a metade do desenvolvimento da circunferência média da boca da peça especial, dividindo-a, neste caso, em seis partes iguais, numerando-se os pontos de divisão.

Esta régua flexível serve para determinar os pontos 1, 2, 3, etc. do desenvolvimento e a primeira régua serve para obter os pontos A_1 , B_1 , C_1 , etc. do desenvolvimento.

O traçado do desenvolvimento começa a ser triangulado a partir da linha A_11 e em ambas as partes desta linha. A grandeza real da linha A_11 é tomada diretamente da *elevação*, assim como a distância D_1E_1 , já que estas são as únicas que se encontram em verdadeira grandeza na *elevação*.



Intersecção de um cilindro perpendicularmente sobre outro com uma peça suplementar

A representação deste exercício foi feita pela fibra média.

Sobre o diâmetro do enxerto descreve-se uma semicircunferência, dividindo-a em um número adequado de partes iguais (seis, por exemplo). Desde os pontos de divisão traçam-se perpendiculares ao diâmetro, determinando sobre este os pontos 1, 2, 3, etc., obtendo-se as ordenadas necessárias para achar as grandezas reais. Depois descreve-se um quadrante de circunferência sobre o diâmetro do cilindro horizontal e marcando o centro em um ponto qualquer de seu prolongamento, descreve-se outro quadrante de circunferência de raio igual ao raio médio do enxerto. Este quadrante é dividido, neste caso, em três partes iguais, e desde os pontos de divisão 1, 2, 3 e 4 traçam-se verticais que cortam o outro quadrante nos pontos *h*, *g*, *f* e *e*, a partir dos quais se traçam horizontais até cortar nos pontos 1', 2', 3' e 4' a linha de intersecção da peça suplementar e do cilindro horizontal.

Depois, desde os pontos 1, 2, 3, etc. do enxerto, traçam-se suas correspondentes geratrizes, determinando os pontos *A*, *B*, *C* e *D* sobre a linha de intersecção da peça suplementar e do enxerto e os pontos *E*, *F*, *G* e *H* sobre as horizontais anteriores. Estes últimos pontos são unidos por meio de uma curva contínua. Também os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são unidos com os pontos 1', 2', 3' e 4', formando triângulos.

Traçado do orifício. Desde os pontos 1', 2', 3' e 4', *E*, *F*, *G* e *H* traçam-se perpendiculares ao eixo do cilindro horizontal e sobre uma paralela qualquer a estes (fig. 2) transportam-se os comprimentos dos arcos *hg*, *gf* e *ef* do quadrante desenhado sobre o cilindro horizontal, determinando novos pontos que também chamaremos *h*, *g*, *f* e *e*, a partir dos quais se traçam perpendiculares às anteriores até cortá-las nos pontos 1', 2', 3', 4', *E*, *F*, *G* e *H* que se unem por meio de duas curvas contínuas e de duas retas, como se ilustra.

Desenvolvimento do enxerto (fig. 3). Em uma posição adequada traça-se uma reta de comprimento igual ao desenvolvimento da circunferência média do enxerto. Esta reta é dividida em doze partes iguais e desde os pontos de divisão, traçam-se perpendiculares à reta de comprimentos iguais às geratrizes da figura 1, obtendo-se novos pontos que também chamaremos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* e *G* que se unem como se vê na ilustração.

Verdadeiras grandezas (fig. 4). Sobre uma vertical qualquer marca-se o ponto 1'. Desde este ponto marcam-se sobre a vertical as ordenadas 2', 3' e 4' iguais às ordenadas 2, 3 e 4 da semicircunferência do enxerto e desde os pontos 2', 3' e 4' traçam-se perpendiculares à vertical, designando-as com as letras *B*, *C* e *D*, respectivamente.

Desde os pontos 2', 3' e 4' transportam-se sobre as retas *B*, *C* e *D* os correspondentes comprimentos falsos 1'B, 2'C, etc. da figura 1, determinando novos pontos que também chamaremos 1', 2', 3' que se unem com os pontos da mesma origem da vertical, determinando as verdadeiras grandezas das linhas 1'B, 2'C e 3'D. As linhas 1'A, 2'B, 3'C, 4'D, 4'E e *DE* encontram-se em verdadeira grandeza na figura 1.

Desenvolvimento da peça suplementar (fig. 5). Primeiramente acopla-se uma régua flexível à curva 4', 3', 2', etc. do traçado do orifício (fig. 2), marcando-se nela os pontos 4', 2', 3', etc. Depois acopla-se outra régua flexível à curva *A*, *B*, *C* e *D* (fig. 3). Estas duas régua flexíveis são as que se transportam ao desenvolvimento da peça suplementar (fig. 5), sendo que a primeira determina os pontos 1', 2', etc. e a segunda, os pontos *A*, *B*, etc. O desenvolvimento começa a ser triangulado a partir da linha *A1'* e em ambas as partes dela, como se vê na ilustração.

Nota. Os triângulos sombreados são superfícies planas.

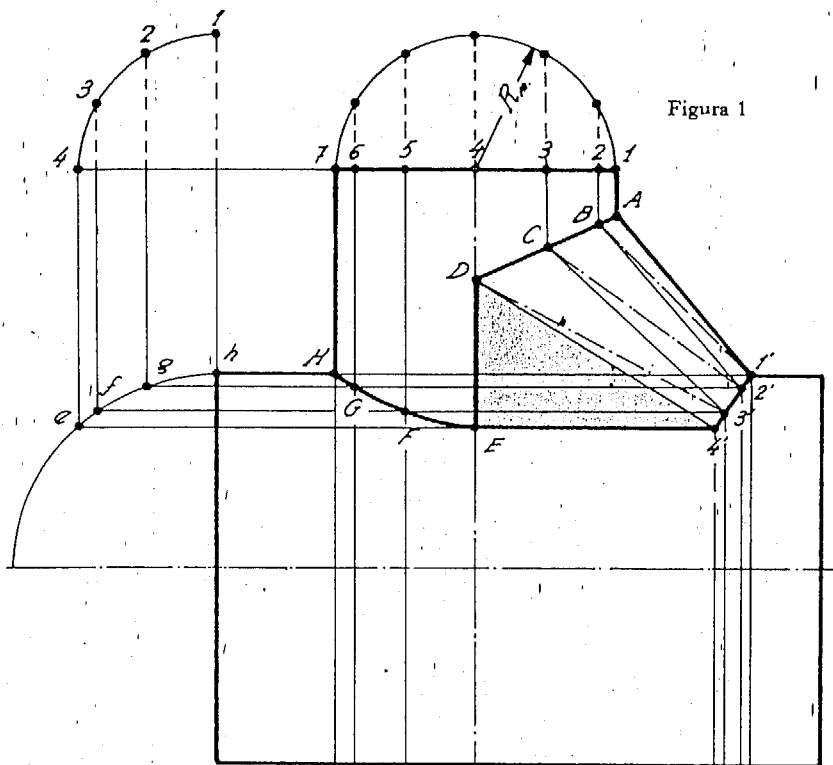


Figura 1

Verdadeiras grandezas

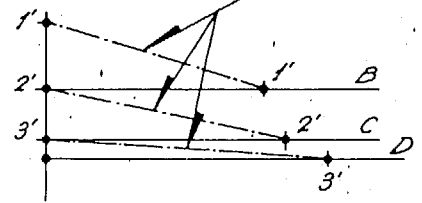


Figura 4

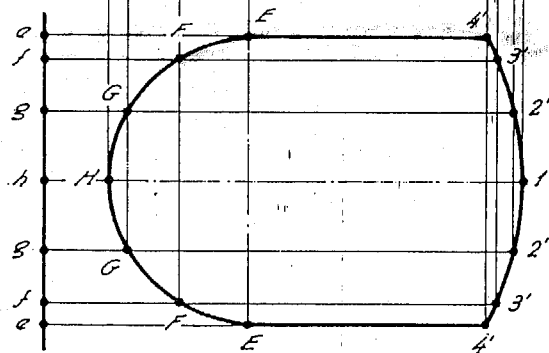


Figura 2

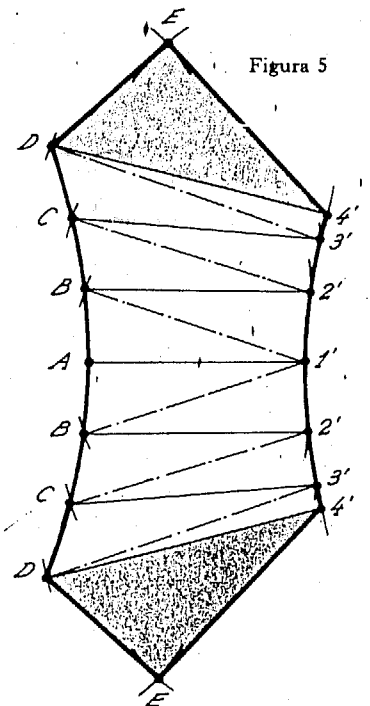


Figura 5

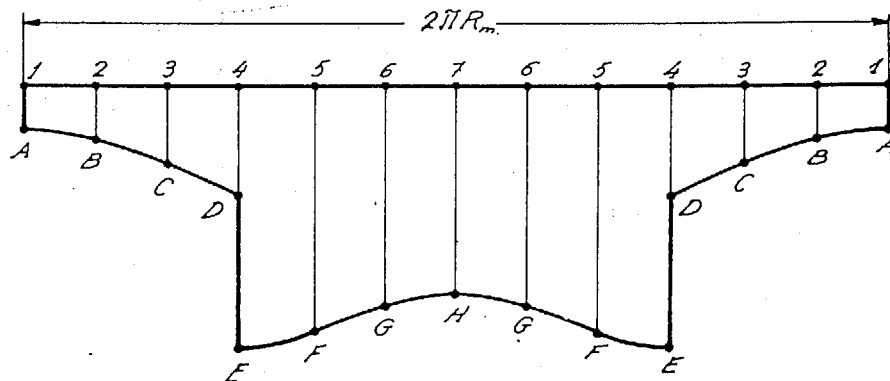


Figura 3

OUTRO SISTEMA DE TRIANGULAÇÃO

EXERCÍCIO

46

Este sistema de triangulação consiste em triangular a vista em *planta* ou *projecção horizontal* de um corpo qualquer e achar depois todas as grandezas reais dos lados dos triângulos que precisamos para desenvolver esse corpo.

O sistema que vamos estudar é somente rentável para resolver trabalhos que tenham as bocas das peças a serem desenvolvidas paralelas entre si (salvo em alguns casos em que as bocas são inclinadas e o estudante acredita que seja mais prático).

A figura 1 dá-se uma perspectiva de um tronco de cone oblíquo de bocas circulares e paralelas entre si, sendo sua base também paralela ao plano H de projeção e situada na altura H_1 do mesmo plano. A reta que passa pelos centros das bocas, vista em *planta*, é paralela à linha de terra $L-T$.

Portanto, os centros das bocas estão à mesma distância do plano V de projeção que imaginamos ser transparente para apreciar melhor a projeção vertical.

Nas projeções horizontal e vertical representou-se o contorno do tronco de cone, como se vê na ilustração.

Sobre a superfície do tronco de cone foi desenhada uma reta qualquer que chamaremos $A-B$, sendo sua projeção horizontal $a-b$ e a vertical $a'-b'$. Em nenhuma destas projeções temos a reta $A-B$ em verdadeira grandeza.

Para achar a grandeza real da linha $A-B$ recorre-se a uma mudança de plano vertical V_1 , sendo a nova linha de terra L_1-T_1 paralela à projeção horizontal $a-b$ (para simples verificação ver "Mudança de plano" na parte de Geometria descritiva), obtendo-se a nova projeção $a'_1-b'_1$ da reta $A-B$ que está em verdadeira grandeza.

Disto podemos deduzir que a grandeza real $a'_1-b'_1$ é a *hipotenusa* de um triângulo retângulo, cu-

jos respectivos catetos são iguais ao comprimento $a-b$ da vista em *planta* e à altura H do tronco de cone (o triângulo retângulo obtido com a mudança de plano foi sombreado para melhor assimilação).

Desta mesma maneira são determinadas todas as grandezas reais dos lados dos triângulos sobre a superfície das peças a serem desenvolvidas.

Uma vez conhecidas todas as grandezas reais dos lados dos triângulos necessários para desenvolver qualquer peça, proceder-se-á seguindo as mesmas normas que foram expostas nos exercícios anteriores.

As figuras 2 e 3 dão as vistas em *planta* e em *elevação* de outro tronco de cone oblíquo parecido ao da perspectiva e sobre sua superfície foram desenhadas as linhas $a, b, a'b', b-c, b'-c'$ e $c-d, c'-d'$, estando todas em grandeza falsa, salvo a reta $a-b, a'-b'$ que está em grandeza real na vista em *elevação* $a'-b'$ por ser a projeção horizontal $a-b$ paralela à linha de terra $L-T$.

Para achar a grandeza real da linha $b-c, b'-c'$, recorre-se a uma mudança de plano vertical (fig. 4), cuja linha de terra L_1-T_1 é paralela à projeção horizontal $b-c$, obtendo-se desta maneira a nova projeção $b'_1-c'_1$, sendo esta a grandeza real.

Para obter a grandeza real da linha $c-d, c'-d'$, recorre-se a outra mudança de plano, como se ilustra na figura 5, determinando desta maneira a grandeza real $c'_1-d'_1$.

Por ser muito custoso recorrer a uma mudança de plano para se obter a grandeza real de cada linha, recorre-se então à construção de triângulos retângulos de cateto comum $X-Y$ igual à altura H , como se ilustra na figura 6, evitando as mudanças de planos anteriores.