

Trazado de planchistería y calderería

*II- Desarrollo de piezas
complejas
e intersecciones*

Ch. Lobjois



1

Las superficies compuestas

GENERALIDADES

DEFINICION

La superficie lateral de un sólido recibe el nombre de «**superficie compuesta**» cuando está constituida por varios elementos, cada uno de los cuales es una **parte de superficie geométrica desarrollable** (plano, cilindro, cono o tronco de cono).

Las superficies compuestas se utilizan con frecuencia en calderería para la fabricación de numerosas tolvas, canalones, basamentos, campanas, uniones, etc. Efectivamente, y por lo general, se destinan a unir dos orificios de formas diferentes, llamados *bases*; frecuentemente, uno de estos orificios tiene una forma circular, el otro puede ser ya poligonal, ya compuesto de arcos de círculo o incluso de forma cualquiera.

TEORIA DE LOS PLANOS TANGENTES

Una superficie que une dos bases convexas (1) es desarrollable solamente en el caso de que, al rodar sobre un plano, se mantenga constantemente en contacto con este plano, sea por una superficie, sea por una recta: el plano contiene una porción de superficie o bien es tangente a la superficie a lo largo de una generatriz. (Se demuestra en matemáticas que para que una superficie sea desarrollable es necesario y suficiente que sea reglada y que admita el mismo plano tangente a lo largo de una generatriz cualquiera).

El calderero debe *crear, determinar* la superficie compuesta, conociendo las dos bases a unir. Para resolver el problema, se puede imaginar que la pieza ya está realizada y que rueda, *que se desarrolla, sobre un plano al que se mantiene tangente* o, hipótesis más lógica, que *el plano se desplaza y envuelve la superficie*.

(1) Ver la página 31, sobre los casos particulares y las uniones de bases cóncavas.

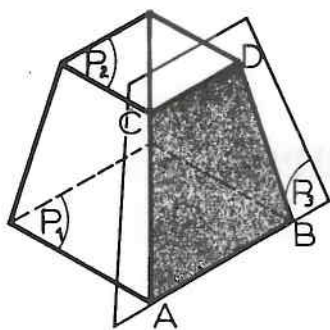


Fig. 1.
 AB : recta de P_1 y de P_3 = traza de P_1 con P_3
 CD : recta de P_2 y de P_3 = traza de P_2 con P_3

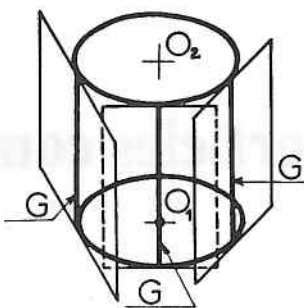


Fig. 2.

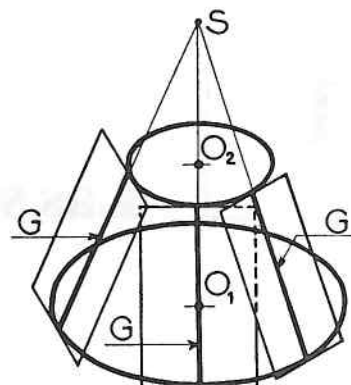


Fig. 3.

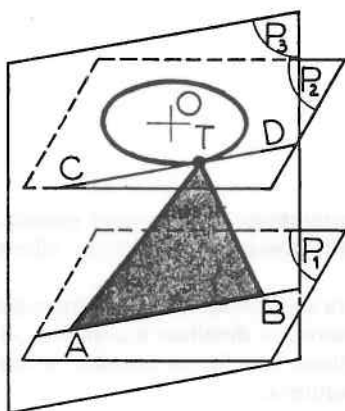


Fig. 4.

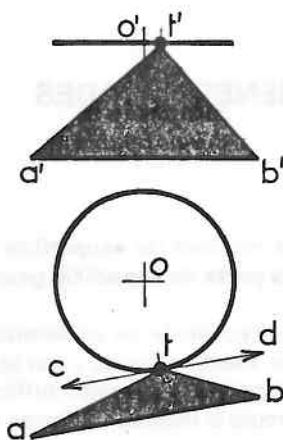


Fig. 5.

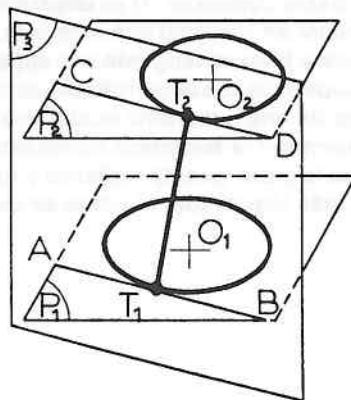


Fig. 6.

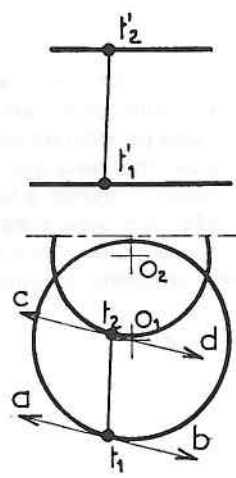


Fig. 7.

1. De una manera general, los **poliedros** que tengan dos bases se pueden considerar como engendrados de la misma manera que una superficie compuesta. En la *pirámide* una de las bases se reduce a un punto (el vértice).

Si el plano generador P_3 (Fig. 1), que pasa por un lado de una de las bases, no puede contener un lado de la otra base, la superficie que une las bases es *alabeada* y *no desarrollable*. Generalmente se reemplaza esta superficie por dos trozos de plano (ver tomo I, página 87 y tomo II, página 29).

2. Las **superficies cilíndricas y cónicas** se pueden engendrar mediante un plano que se mantiene siempre tangente a dos curvas. Cada posición del plano determina una recta G , llamada *generatriz*, que une los puntos de contacto del plano y de las curvas sobre las que se apoya.

Cuando las dos curvas a unir son iguales y situadas en planos paralelos, las generatrices son paralelas entre sí y la superficie engendada es cilíndrica (Fig. 2).

Cuando las dos bases son homotéticas y desiguales, las extremidades de las generatrices, en cada desplazamiento, recorren sobre la base mayor un camino más grande que sobre la base menor. Las generatrices concurren en el centro de homotecia, la superficie es cónica y el punto de intersección de las generatrices es el vértice del cono (Fig. 3). Las figuras 2 y 3 representan casos particulares (cilindro y cono de revolución) de este principio.

TIPOS DE SUPERFICIES COMPUESTAS

Dada la enorme variedad de formas de las bases a unir, las superficies compuestas son prácticamente innumerables; sin embargo, se las puede clasificar en dos grandes grupos, según que los planos que contienen las bases sean paralelos o no.

Las bases a unir están situadas en planos paralelos

ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS ELEMENTALES

1. DETERMINACION DEL ELEMENTO QUE UNE UN SEGMENTO DE RECTA A UN CIRCULO (Fig. 4)

Hágase pasar por AB un plano P_3 tangente al círculo O . El punto de contacto T está situado sobre la intersección CD de los planos P_2 y P_3 . Como AB está sobre la traza de los planos P_1 y P_3 , y P_1 y P_2 son paralelos, las dos intersecciones son paralelas entre sí; por lo tanto, CD es paralela a AB . El plano tangente ha determinado el triángulo ABT .

Diseño (Fig. 5). El punto t se obtiene trazando la proyección horizontal de la tangente CD paralela a ab .

2. DETERMINACION DEL ELEMENTO QUE UNE DOS ARCOS DE CIRCULO (Fig. 6)

Si, por un punto T_1 del círculo O_1 , se hace pasar un plano P_3 tangente a la vez a los círculos O_1 y O_2 , las intersecciones AB y CD de P_3 con P_1 y P_2 son tangentes a los círculos O_1 y O_2 y paralelos entre sí. Se determina, pues, T_2 por la condición de ser el punto de contacto de la tangente CD paralela a AB .

La recta T_1T_2 , contenida en el plano tangente, es una generatriz ya de un cilindro, si los dos círculos tienen el mismo diámetro, ya de un tronco de cono, si los dos círculos tienen distinto diámetro.

Diseño (Fig. 7): a) trazar una tangente ab al círculo o_1 en t_1 ; b) trazar una tangente cd al círculo o_2 , paralela a ab , que da el punto de tangencia t_2 ; c) trazar la recta t_1t_2 , proyección horizontal de la generatriz determinada por el plano tangente en T_1T_2 .

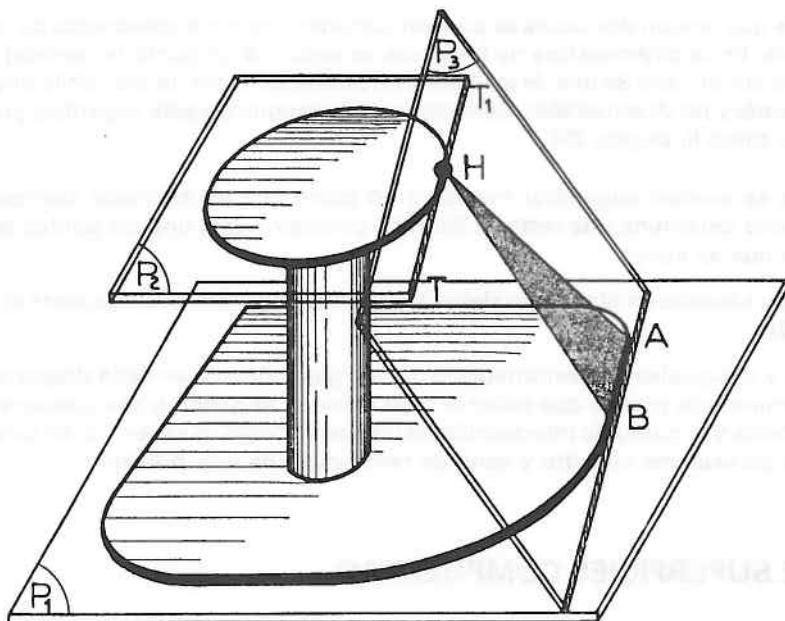


Fig. 8.

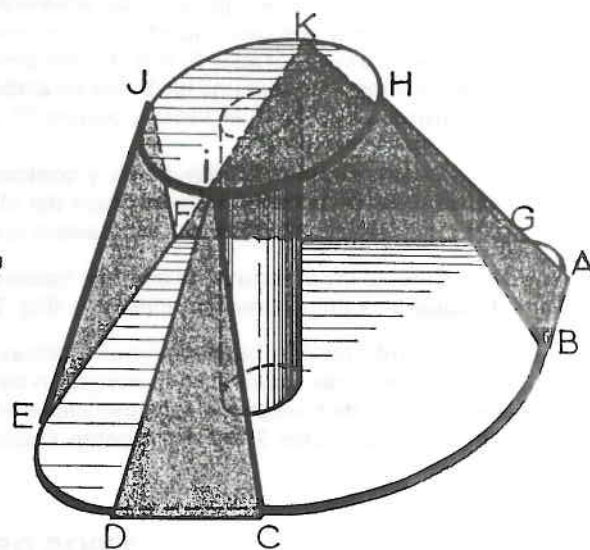


Fig. 10.

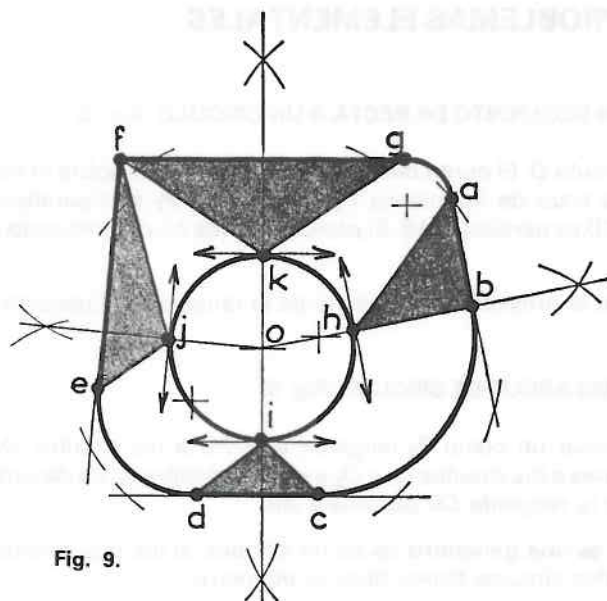


Fig. 9.

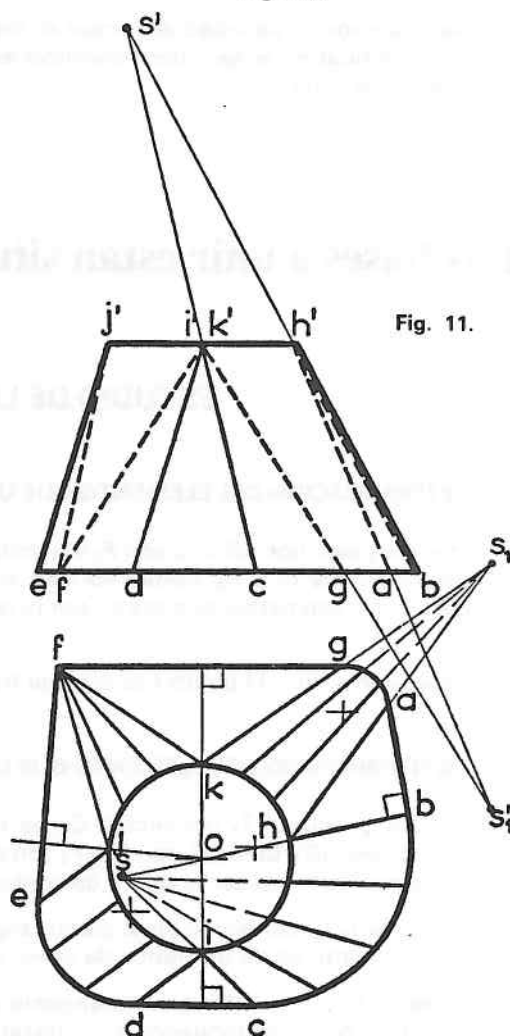


Fig. 11.

Unión de un orificio circular con un orificio compuesto de rectas y de arcos de círculo

DETERMINACION DE LOS ELEMENTOS QUE CONSTITUYEN LA SUPERFICIE

La figura 8 representa una maqueta constituida por dos chapas unidas por un tubo. Las chapas representan dos bases situadas en dos planos paralelos. La base superior es circular. El contorno de la base inferior se compone de cuatro segmentos de recta y de tres arcos de círculos.

1. BUSQUEDA DE LAS SUPERFICIES PLANAS

Tómese una plancha transparente (plexiglás, por ejemplo), que representa el plano tangente P_3 y aplíquese sobre la maqueta de modo que un lado se confunda con la recta AB y que se apoye sobre el círculo, al que será tangente. Con el fin de materializar el plano que contiene el círculo, colóquese también una plancha transparente P_2 sobre aquél. La intersección de los planos P_2 y P_3 da la tangente al círculo en el punto H (Fig. 8). Esta tangente TH_1 es paralela a AB , su proyección horizontal también lo es y esta propiedad permite determinar el punto h (Fig. 9).

OBSERVACION. Para trazar la tangente al círculo, paralela a ab , es necesario primero trazar por el centro o una perpendicular a ab . Esta perpendicular da el punto h ; prácticamente es, pues, inútil trazar la tangente.

El punto H constituye el tercer vértice del triángulo ABH . Constrúyase éste con chapa y póngasele en su sitio. Haciendo la misma demostración con las restantes partes rectas, se obtendrán los puntos IJK y los triángulos correspondientes, que se colocarán en su sitio en la maqueta (Fig. 10).

En el diseño, los puntos ijk se determinarán mediante perpendiculares trazadas por o a las diferentes rectas (Fig. 9).

2. BUSQUEDA DE LAS SUPERFICIES CILINDRICAS Y CONICAS QUE SE UNEN A LAS SUPERFICIES PLANAS

a) Divídase el arco BC en partes iguales y considérese el plano que rueda sobre el arco BC y sobre el círculo O (ver figura 3). Dicho plano permite hacer corresponder, a cada uno de los puntos marcados sobre BC , un punto del círculo O y determinar una generatriz de una superficie cónica de vértice S (Fig. 11). Puesto que estas generatrices terminan en puntos equidistantes del arco BC , determinan puntos equidistantes en el círculo O .

En el diagrama, se ha dividido cada uno de los arcos bc e ih en cuatro partes iguales. Uniendo los puntos correspondientes, se obtienen las proyecciones horizontales de las generatrices.

OBSERVACION. Prolongando las dos generatrices extremas bh y ci (límites de los triángulos y del tronco de cono), se obtiene la proyección horizontal s del vértice del cono. Después basta dividir el arco de la base mayor en partes iguales y unir estos puntos a s para obtener las proyecciones horizontales de las generatrices.

b) Se tiene otra porción de tronco de cono mediante los arcos GA y KH , pero en este caso el vértice S_1 del cono está situado por debajo de la base mayor.

c) Los dos triángulos EFJ y FKG tienen un punto común, F . El plano tangente se desplaza desde FJ hacia FK , rodando sobre el círculo y girando alrededor de F . Determina las generatrices de una parte de cono oblicuo de vértice F .

d) Los arcos ED y JI son arcos de círculo iguales y situados en planos paralelos. El plano tangente se desplaza la misma longitud sobre cada uno de ellos. Las generatrices son paralelas entre sí, como EJ y DI , y la superficie obtenida pertenece a un cilindro oblicuo.

La superficie compuesta está, pues, constituida por:

4 triángulos $ABH - CDI - EFJ - FGK$;

1 trozo de cono oblicuo de base circular: FJK ;

2 trozos de tronco de cono oblicuo de bases circulares: $GAHK$ y $BCIH$;

1 trozo de cilindro oblicuo de base circular: $DEJI$.

Fig. 3.

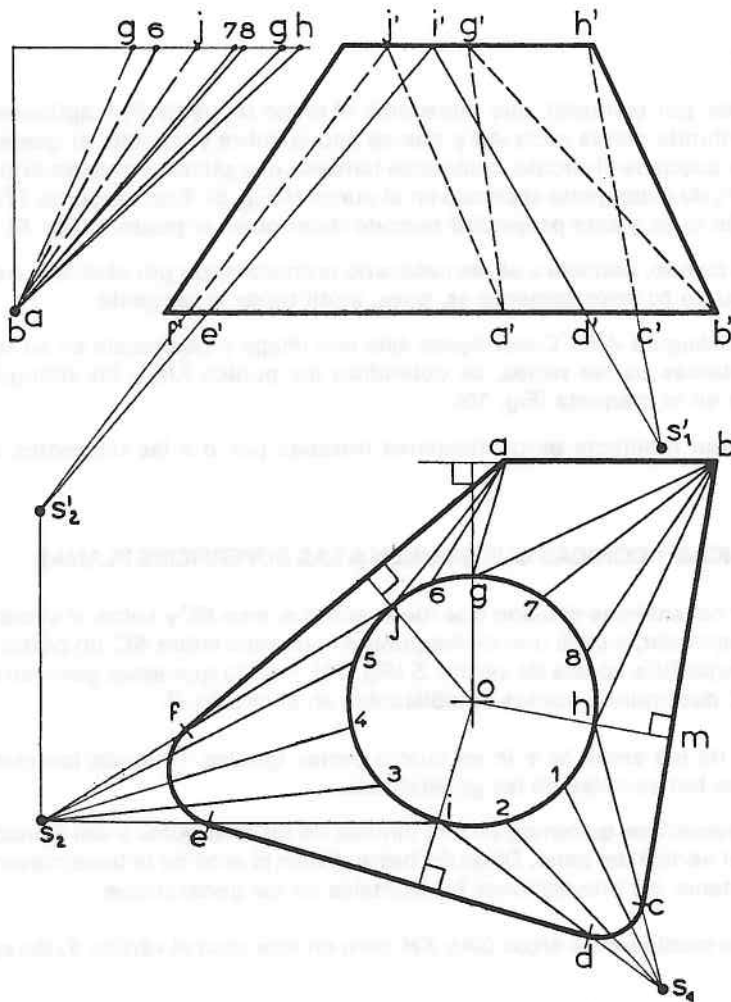
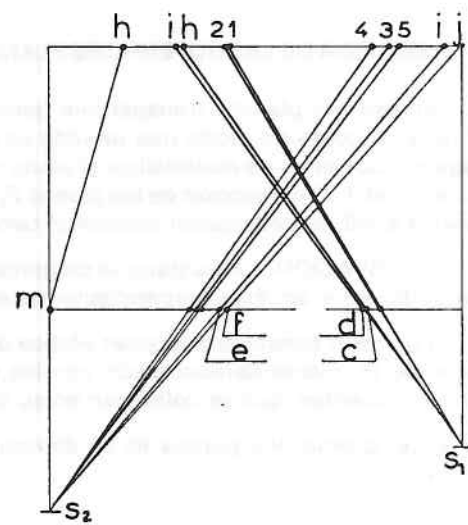


Fig. 1.

Fig. 2.



2

Desarrollo de algunas superficies compuestas que unen dos orificios situados en planos paralelos



I. UNION DE UN ORIFICIO CIRCULAR CON UN ORIFICIO DE CUATRO LADOS CON DOS ANGULOS REDONDEADOS

Examinando la proyección horizontal (Fig. 1), se ve que el plano tangente a las dos bases a unir engendra:

1. **4 triángulos**, cada uno con un lado constituido por uno de los cuatro segmentos, que constituyen la base inferior.
2. **2 trozos de cono**, cuyos vértices son *A* y *B*.
3. **2 trozos de tronco de cono**, cuyas bases menores son los arcos *DC* y *FE*.

DISEÑO

— **Establecer las proyecciones horizontales de las superficies planas triangulares**, trazando por el centro *o* una perpendicular a cada lado rectilíneo *ab*, *bc*, *de*, *fa* (Fig. 1).

Los cuatro triángulos *agb*, *bhc*, *die*, *fja*, delimitan también los dos trozos de cono oblicuo *ajg* y *bgh* y los dos trozos de tronco de cono oblicuo *chid* y *eijf*.

— **Buscar las proyecciones horizontales y frontales de los vértices de los conos**, *S*₁ y *S*₂, y construir las generatrices, dividiendo los arcos *gh*, *hi*, *ij* y *fg*, cada uno en partes iguales.

— **Buscar las verdaderas magnitudes de las generatrices de los conos y de los troncos de cono.**

En las figuras 2 y 3, se ha empleado el método de los «dibujos aparte», llevando sobre un lado del ángulo recto la proyección horizontal y sobre el otro lado las diferencias de cotas; simplificación de la búsqueda de las verdaderas magnitudes de las rectas hechas frontales.



DESARROLLO

Comenzar por desarrollar un triángulo, por ejemplo AJF , teniendo en cuenta el sentido del curvado: en la figura 4, se ha previsto el trazado exterior.

Desarrollar la parte cónica AJG , llevando a partir de A las verdaderas magnitudes de las generatrices 6 y G (Fig. 3); después llevar los arcos desarrollados $J6$ y $6G$.

Comprobar que la transformada JG tiene una longitud igual a la del arco fg , medida en la figura 1, que ha sido establecida según la fibra neutra.

Desde G , trazar un arco de radio GB , tomado de la figura 3, y desde A , un arco de radio AB , tomado de la figura 1. La intersección de estos dos arcos da el punto B . **Trazar el triángulo AGB** .

Desarrollar el cono GBH : con centro en B , trazar arcos cuyos radios son las generatrices $7, 8, H$, tomadas de la figura 3, y llevar sucesivamente, partiendo de G , los desarrollados de los arcos $g-7, 7-8, 8-h$.

Comprobación: la transformada GH debe tener una longitud igual a la del arco gh (Fig. 1).

Trazar el triángulo BHM , tomando HM de la figura 2 y BM de la figura 1. **Comprobar** que el ángulo M es igual a 90° .

Prolongar la generatriz JF para obtener el vértice S_2 , llevando JS_2 , que se toma de la figura 2.

Desarrollar el cono de vértice S_2 , tomando las verdaderas magnitudes de las generatrices de la figura 2.

Comprobar la longitud de la transformada Jl , que debe ser igual al arco ij (Fig. 1). Trazar las generatrices y suprimir la parte inferior del cono.

Trazar el triángulo EID ; ID tomando de la figura 2, y ED de la figura 1. Prolongar ID , para obtener el vértice S_1 , llevando IS_1 , tomado de la figura 2.

Desarrollar el cono de vértice S_1 ; **comprobar** la longitud de la transformada Ih ; trazar las generatrices y suprimir el cono de base DC .

Trazar el triángulo rectángulo CHM , llevando HM desde H y CM desde C ; **comprobar** el ángulo M (90°).

Comprobación general: la longitud total de cada transformada debe ser igual al desarrollo de cada base, tomado según la fibra neutra.

Las rectas AF y DE son tangentes a la transformada EF , de la misma manera que ED y MC son tangentes a la transformada CD .

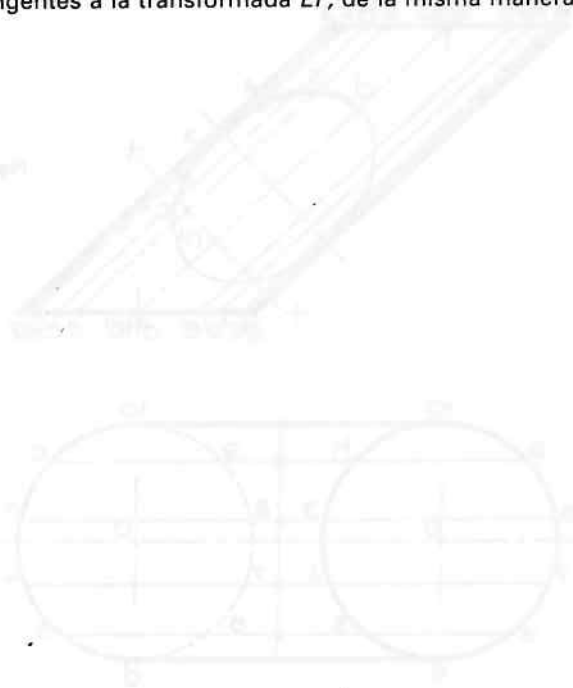


Fig. 1.

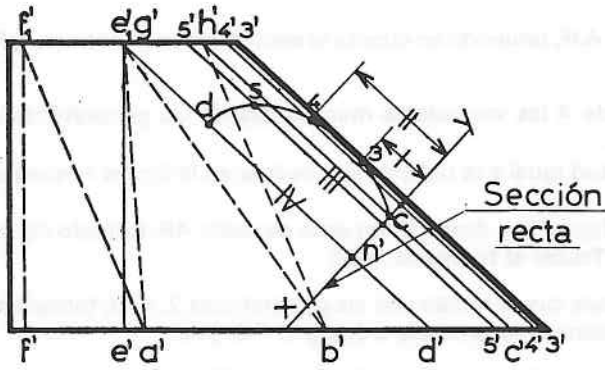


Fig. 2.

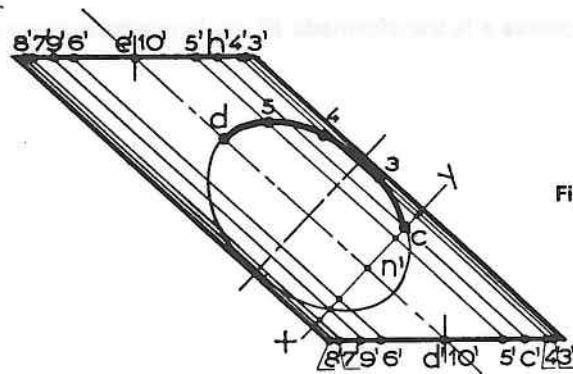
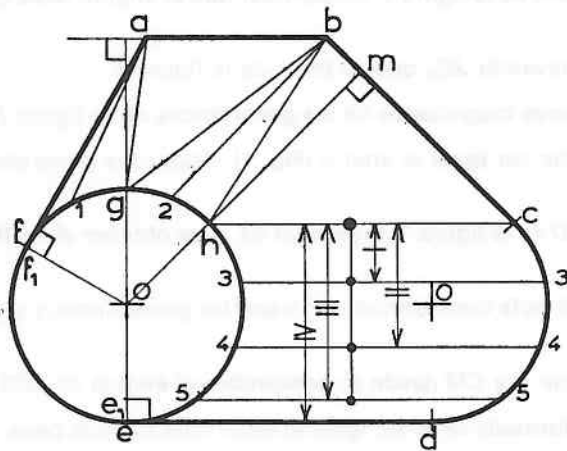
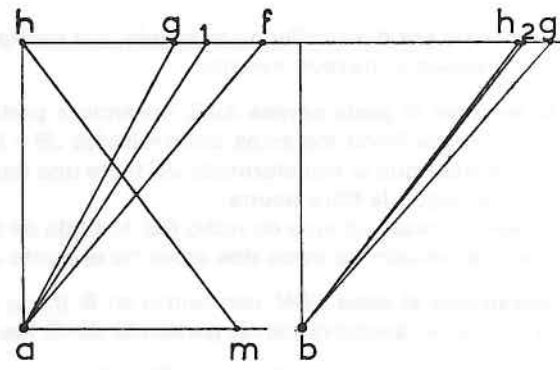
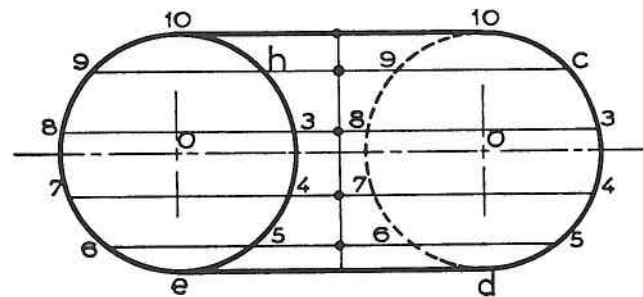


Fig. 4.



II. UNION DE UN ORIFICIO CIRCULAR CON UN ORIFICIO DE CUATRO LADOS QUE TIENE ANGULOS REDONDEADOS MEDIANTE ARCOS DE RADIOS IGUALES AL DEL CIRCULO

DISEÑO (Fig. 1)

Como la base inferior tiene cuatro partes rectas, el plano que rueda sobre las dos bases determina cuatro triángulos. Observar que los planos de los triángulos AFF_1 y DEE_1 son verticales, y puesto que uno de sus lados (FF_1 y EE_1) es vertical, las proyecciones horizontales de los puntos F y F_1 se confunden, al igual que las de E y E_1 .

Hay que añadir a los cuatro triángulos dos partes cónicas de vértice A y B , una parte de cilindro de revolución F_1FEE_1 y una parte de cilindro oblicuo de base circular E_1HCD . Puesto que el eje del cilindro de revolución es vertical y el del cilindro oblicuo, frontal, las generatrices de estos dos cilindros se ven en verdadera magnitud en la proyección frontal.

El desarrollo precisa de la búsqueda de las verdaderas magnitudes de las generatrices de las partes cónicas y de la sección recta del cilindro oblicuo. La búsqueda de la verdadera magnitud de la sección recta es la única que presenta algunas dificultades para los principiantes, que se despistan porque la parte E_1HCD es una porción de cilindro oblicuo y, en consecuencia, la sección recta es una parte de elipse.

Proceder como se indica en la página 112, tomo I, es decir, como en la figura 4, que representa en trazo grueso la parte de elipse correspondiente al diagrama. Recordar que cuando se hace un abatimiento sobre el plano frontal se llevan los alejamientos. Se supone (Figs. 1 y 4) que la línea de tierra pasa por la generatriz CH .

DESARROLLO

En la figura 3 el desarrollo está hecho de acuerdo con el trazado interior y con la unión por HM .

Comenzar por desarrollar la parte de cilindro de revolución, y después, hacia la derecha, el triángulo FF_1A , el cono de vértice A , el triángulo AGB , el cono BGH (comprobar las transformadas tan pronto se las haya obtenido) y el triángulo BHM .

Hacia la izquierda se encuentran el triángulo rectángulo EE_1D y la porción de cilindro oblicuo desarrollada como sigue: referir el emplazamiento de la sección recta con relación a D o a E_1 , por ejemplo Dd (Fig. 3) = $d'n'$ (Fig. 1); desarrollar la sección recta sobre una perpendicular a DE_1 , llevar los puntos de división 5, 4, 3, c. Recordar que estas divisiones no son iguales; trazar las generatrices, llevar sobre ellas, a un lado y a otro de la sección recta rectificada, las magnitudes reales tomadas a partir de xy (Fig. 1); comprobar las transformadas E_1H_1 y CD . Finalmente construir el triángulo rectángulo HCM .

MC y ED son tangentes a la transformada CD . Igualmente, E_1F_1 es tangente a las transformadas F_1H y E_1H que, por otra parte, admiten como tangentes en los dos puntos H las perpendiculares a MH .

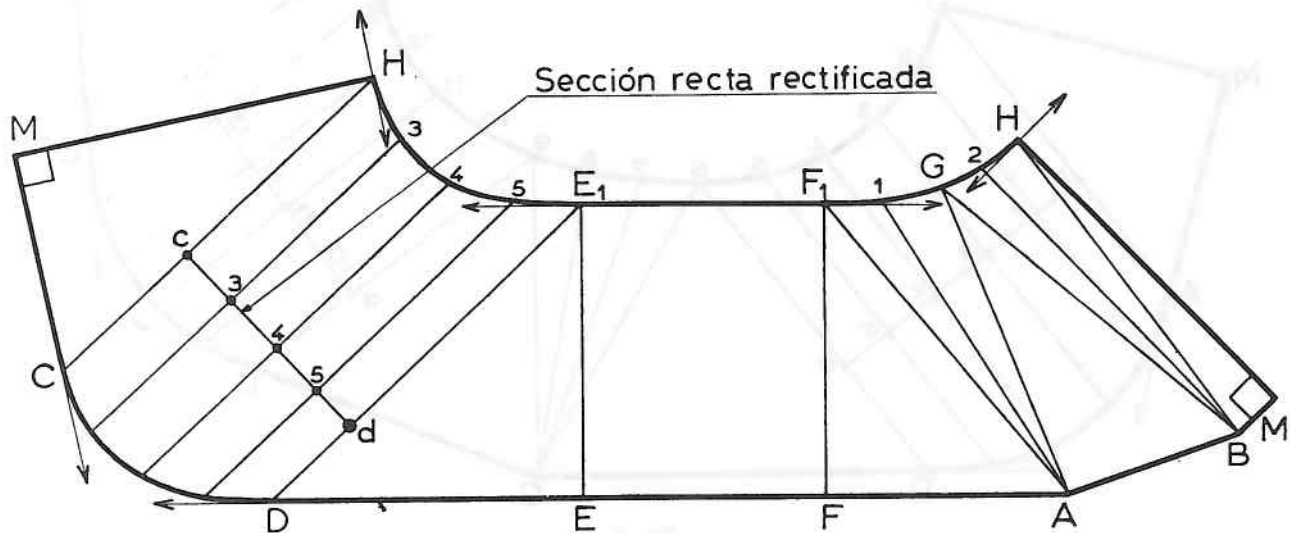


Fig. 3.

Fig. 3.



Fig. 4.



III. UNION DE UN ORIFICIO CIRCULAR CON UN ORIFICIO TRIANGULAR QUE TIENE DOS ANGULOS REDONDEADOS MEDIANTE ARCOS DE RADIO IGUAL AL DEL CIRCULO

DATOS (Fig. 1)

La superficie compuesta comprende: tres triángulos, una porción de cono oblicuo de vértice C y dos posiciones de cilindro oblicuo.

DISEÑO (Fig. 2)

Se ve que las generatrices de los dos cilindros son oblicuas respecto a los dos planos de proyección. Para cada cilindro se reduce el problema al caso precedente, efectuando un cambio de plano frontal; el nuevo plano frontal es paralelo a las generatrices del cilindro (ver páginas 114 y 115, tomo I).

OBSERVACION. Es inútil hacer una proyección frontal de la unión; basta conocer su altura para hacer los cambios de planos, e igualmente para obtener las verdaderas magnitudes de las generatrices del cono.

Búsqueda de las verdaderas magnitudes de las superficies cilíndricas. Cada una de ellas se proyecta sobre un plano frontal paralelo a sus generatrices: L_1, T_1 paralela a bg, af (Fig. 3); $L_2 T_2$ paralela a he, fe (Fig. 4).

Buscar las secciones rectas y abatirlas sobre el plano frontal.

Las verdaderas magnitudes de las generatrices del cono y de la línea de unión vienen dadas por la figura 5.

DESARROLLO

Viene dado por la figura 6 (trazado interior).

No olvidarse de comprobar las transformadas de las bases de los cilindros y de los conos en cuanto se hayan obtenido.

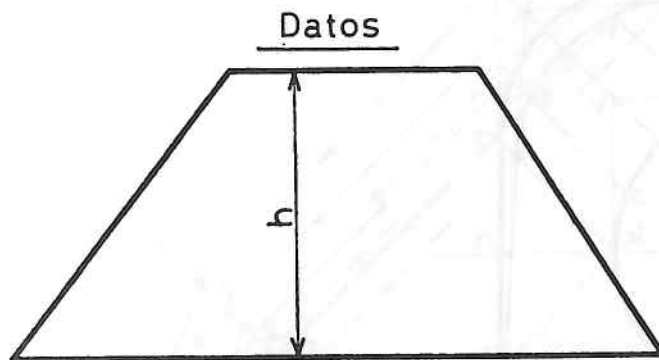
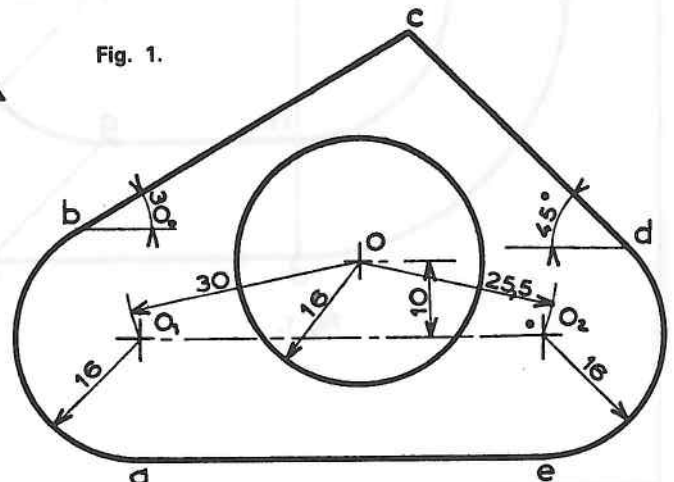
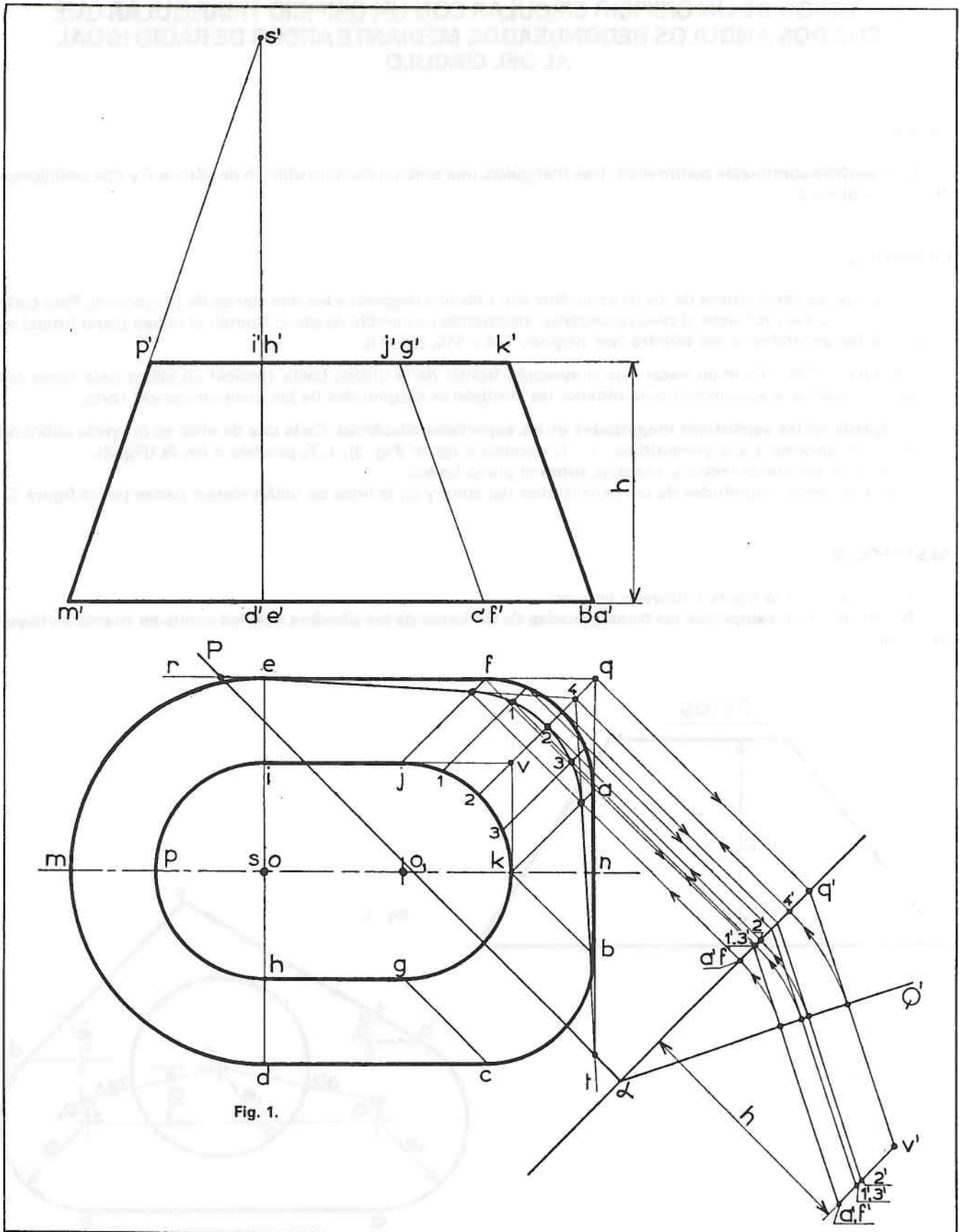


Fig. 1.





IV. UNION DE DOS BASES, CUYO CONTORNO SE COMPONE DE SEGMENTOS DE RECTAS Y DE ARCOS DE CIRCULO

El plano que rueda sobre las dos bases determina: un triángulo ABK , dos partes cilíndricas oblicuas $BKGC$ y $AKJF$ (los arcos a unir tienen el mismo radio), dos trapezios rectángulos $CGHD$ y $FEIJ$, y un semicono de revolución $DMEIPH$ de vértice S , puesto que los dos círculos son concéntricos.

El desarrollo de esta superficie compuesta no ofrece nada nuevo. Puesto que hay un plano de simetría que pasa por mn , es ventajoso realizarla en dos partes, disponiendo dos juntas por dicho plano (Fig. 2).

Para ejecutar un cilindro oblicuo es conveniente disponer de una *plantilla de curvado* (plantilla establecida por una sección recta). En el caso de las superficies compuestas es útil prolongar esta plantilla mediante dos rectas que dan la posición de las dos caras adyacentes.

TRAZADO DE LA PLANTILLA DE CURVADO

Prolongar las dos caras adyacentes hasta su encuentro en la arista vq (vk es paralela a ab). Al igual que anteriormente, o se hace un cambio de plano frontal para el cilindro y también para VQ (se subraya que VQ es paralela a las generatrices del cilindro). Un plano secante PaQ' , perpendicular a las generatrices y a la arista VQ , dará, mediante su abatimiento sobre el plano horizontal, la plantilla buscada.

Comprobación: las rectas $4r$ y $4t$ deben ser tangentes al arco de elipse (Fig. 1).

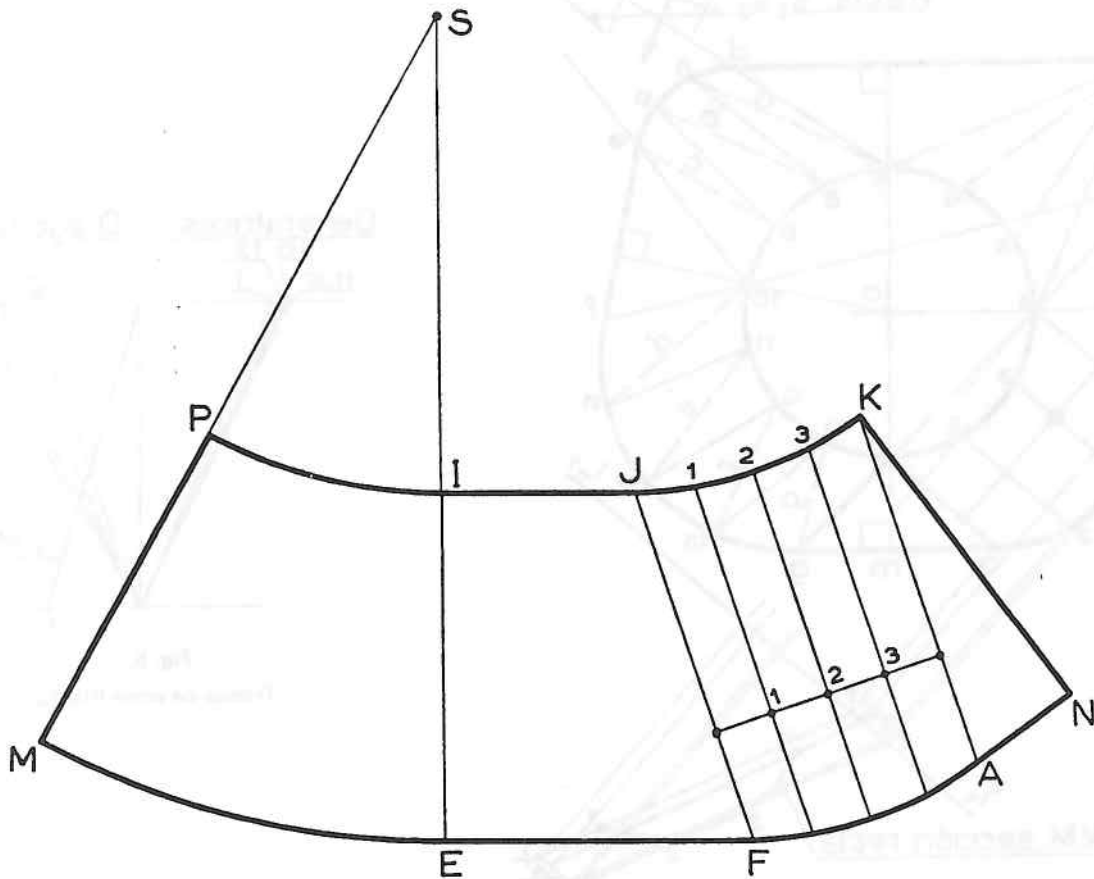


Fig. 2.

1/2 desarrollo (trazado interior). Para una pieza, reproducir una vez (trazado exterior).

Fig. 1.

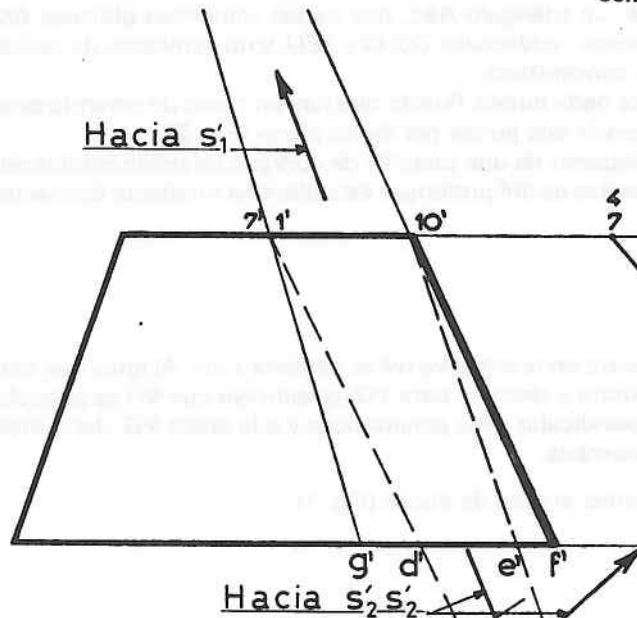


Fig. 3.
Cono C

Generatrices

Diagonales

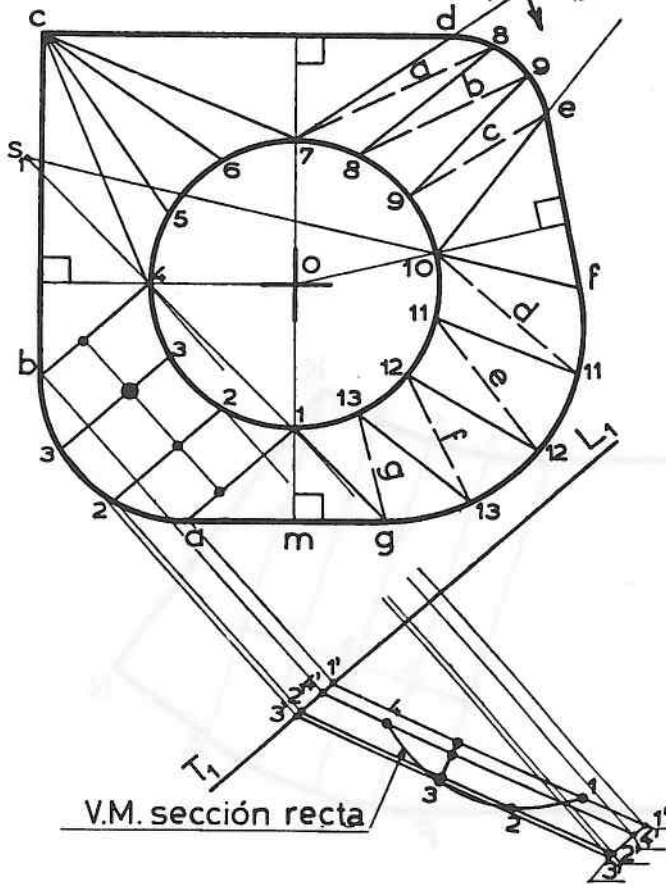
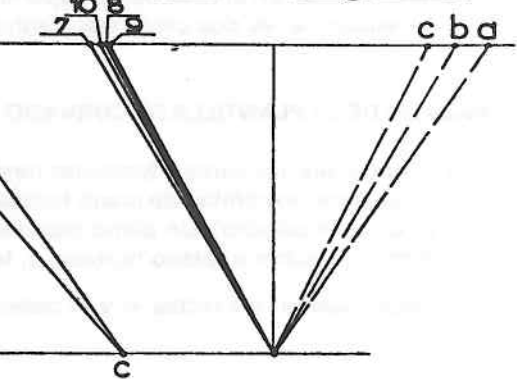


Fig. 2.

Fig. 4.

Tronco de cono D 7 10 E

Generatrices

Diagonales

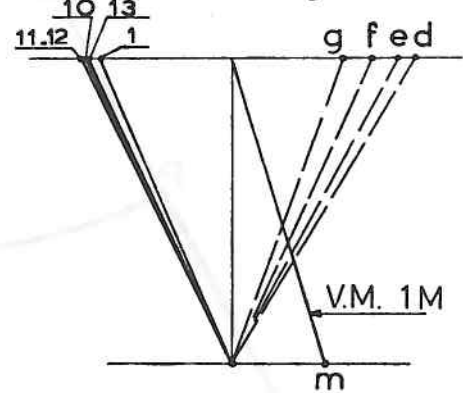


Fig. 5.

Tronco de cono F10 1G

V. UNION DE UN ORIFICIO CIRCULAR CON OTRO ORIFICIO LIMITADO POR SEGMENTOS DE RECTA Y ARCOS DE CIRCULO

DISEÑO (Fig. 1)

La superficie compuesta comprende: cuatro triángulos, una porción de cono oblicuo de vértice C , una porción de cilindro oblicuo B 4 1 A y dos porciones de tronco de cono oblicuos de bases circulares D 7, 10, E y F , 10, 1, G .

OBSERVACION. Se puede obtener la proyección horizontal del vértice S_1 , prolongando las generatrices $10f$ y $1g$, pero la proyección frontal s_1' está situada fuera de los límites del diagrama; el vértice de esta parte troncocónica es inaccesible. Consideraremos también que el vértice de la otra parte troncocónica es inaccesible. Estas dos superficies se desarrollan, pues, por triangulación (ver tomo I, página 123).

Diagrama de las partes troncocónicas: trazar unas generatrices, dividiendo cada base en el mismo número de partes iguales, y unir cada dos generatrices consecutivas mediante una diagonal.

Búsqueda de las magnitudes reales: la figura 2 da la V.M. de la parte cilíndrica. Las generatrices se han convertido en frontales mediante un cambio del plano frontal.

Las V.M. de las generatrices y de las diagonales de las partes cónicas y troncocónicas se obtienen de las figuras 3, 4, y 5.

DESARROLLO

Constituido por la figura 6, se ha realizado según el trazado interior.

No olvidarse de comprobar y de corregir, si es necesario, las transformadas de las bases de cada elemento cónico o cilíndrico, a medida que se van obteniendo.

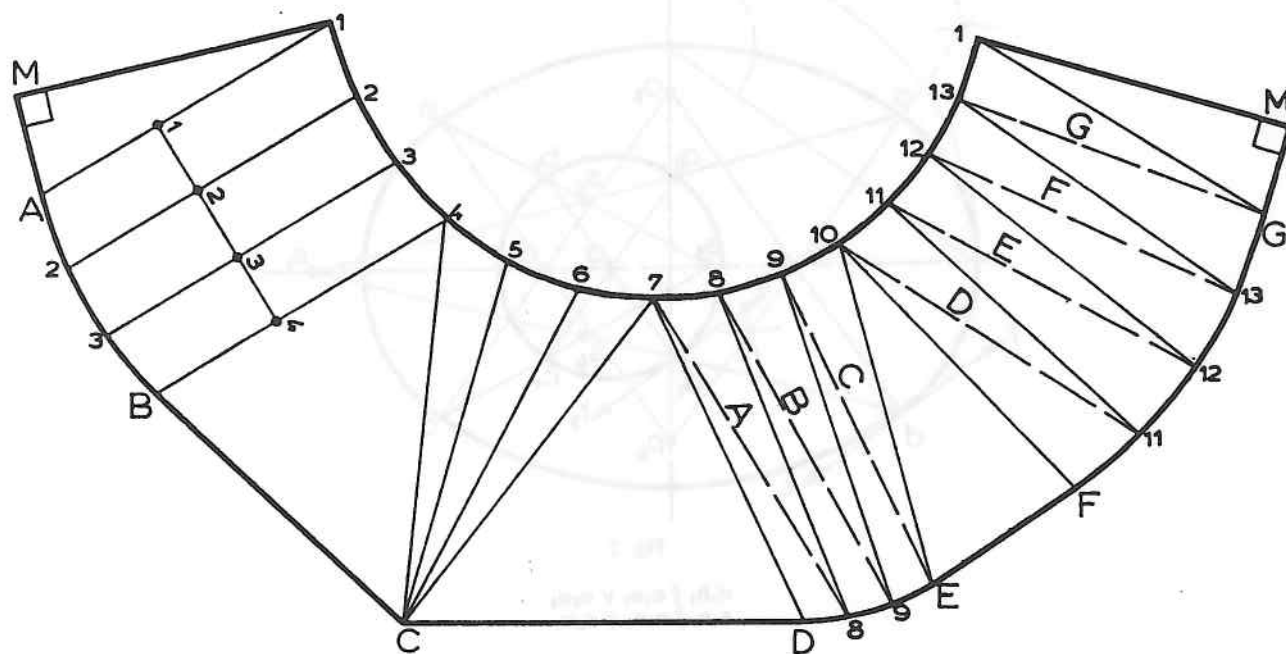
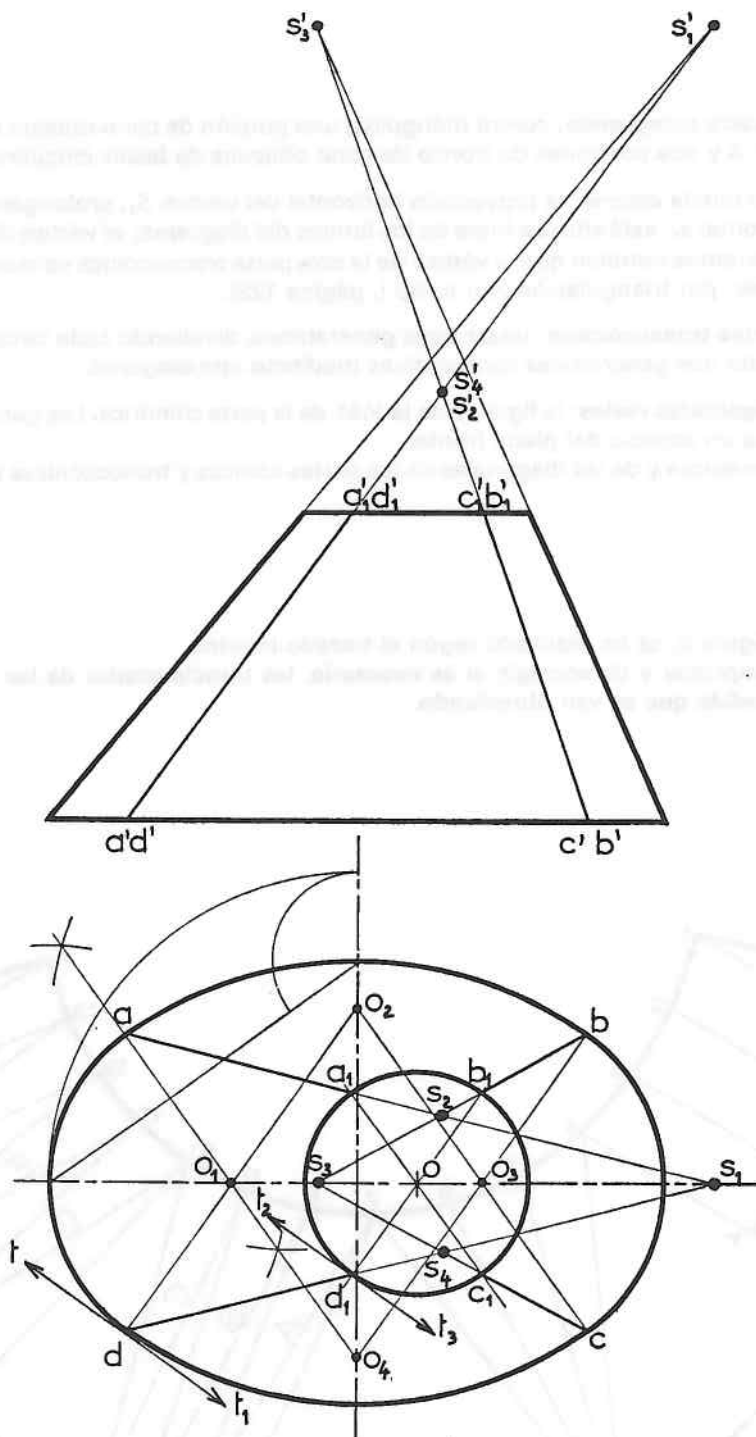


Fig. 6.



VI. UNION DE UNA BASE OVAL CON UN ORIFICIO CIRCULAR

Puesto que las dos bases están constituidas por arcos de círculo, la rodadura de un plano sobre dichas bases engendra trozos de *tronco de cono* en número de cuatro, ya que la base oval se compone de cuatro arcos de círculo.

DETERMINACION DE LAS GENERATRICES COMUNES A DOS TROZOS CONICOS ADYACENTES

Principio: Se obtienen estas generatrices considerando un plano tangente a las dos bases y que pase por los puntos de unión A, B, C, D (Fig. 1). La intersección del plano tangente P_3 y del plano P_1 del óvalo es una tangente TT_1 a éste. La intersección de P_3 y P_2 (plano del círculo) es una tangente T_2T_3 al círculo, paralela a TT_1 .

DISEÑO (Fig. 2)

1.º **Trazado de la tangente tt_1 .** Por ser tangente a la vez al arco de centro O_1 y al arco de centro O_2 , es perpendicular a la línea de centros o_1o_2 de estos arcos.

2.º **Trazado de la tangente al círculo, paralela a tt_1 .** Es preciso, en primer lugar, determinar el punto de contacto, ya trazando una perpendicular desde el centro o a la tangente tt_1 , ya trazando una paralela a la línea de centros o_1o_2 .

OBSERVACION. Estando determinado el punto de contacto d_1 , es inútil trazar la tangente al círculo; la recta dd_1 es la proyección horizontal de la generatriz buscada. Prácticamente, se obtienen los puntos a_1, b_1, c_1, d_1 , trazando por o paralelas a las líneas de centros o_1o_4 (o o_2o_3) y o_1o_2 (o o_4o_3).

Una vez trazadas las proyecciones horizontales y frontales de las generatrices comunes, prolongadas para obtener, si es posible, las proyecciones de los vértices de los conos.

Si son accesibles los vértices de los conos (oblicuos en el caso general), inscribir unas generatrices y buscar sus verdaderas magnitudes.

Si los vértices son inaccesibles, trazar las proyecciones horizontales de las generatrices, y también de las diagonales, con el fin de efectuar el desarrollo por triangulación, después de la búsqueda de las verdaderas magnitudes.

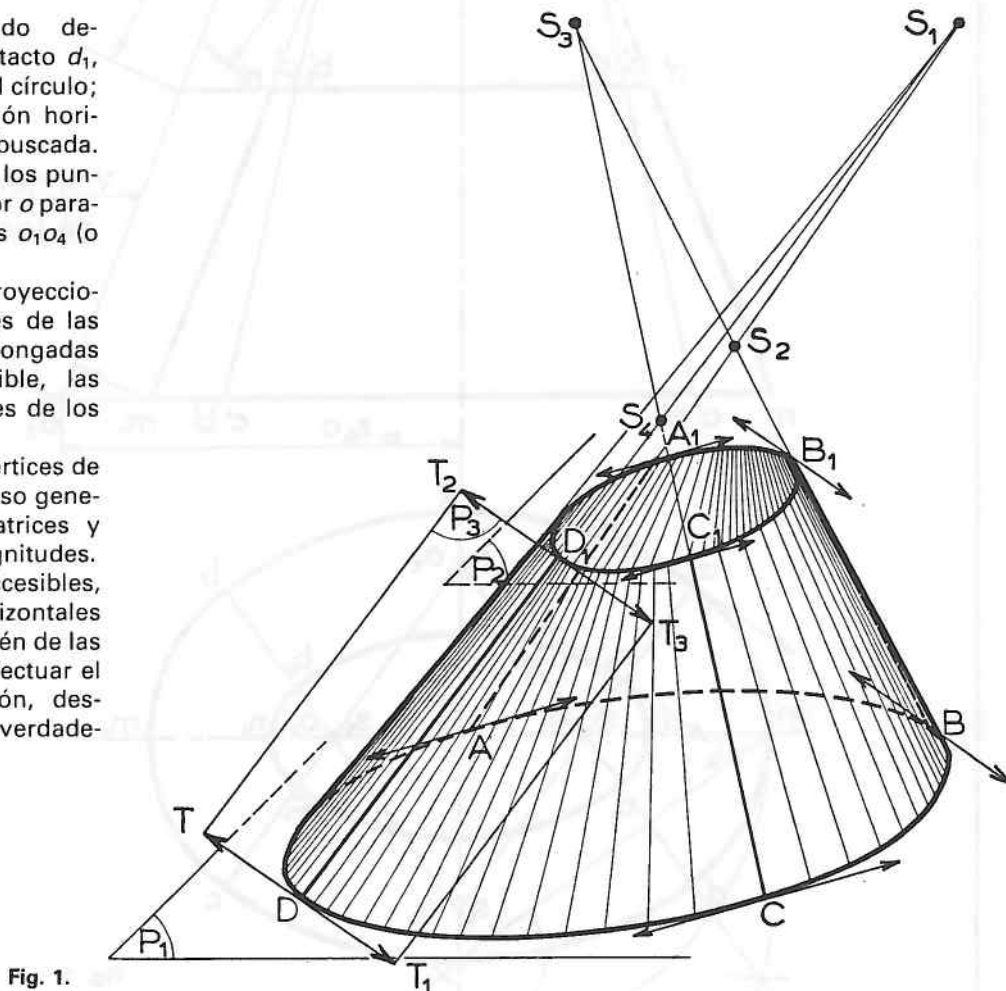


Fig. 1.

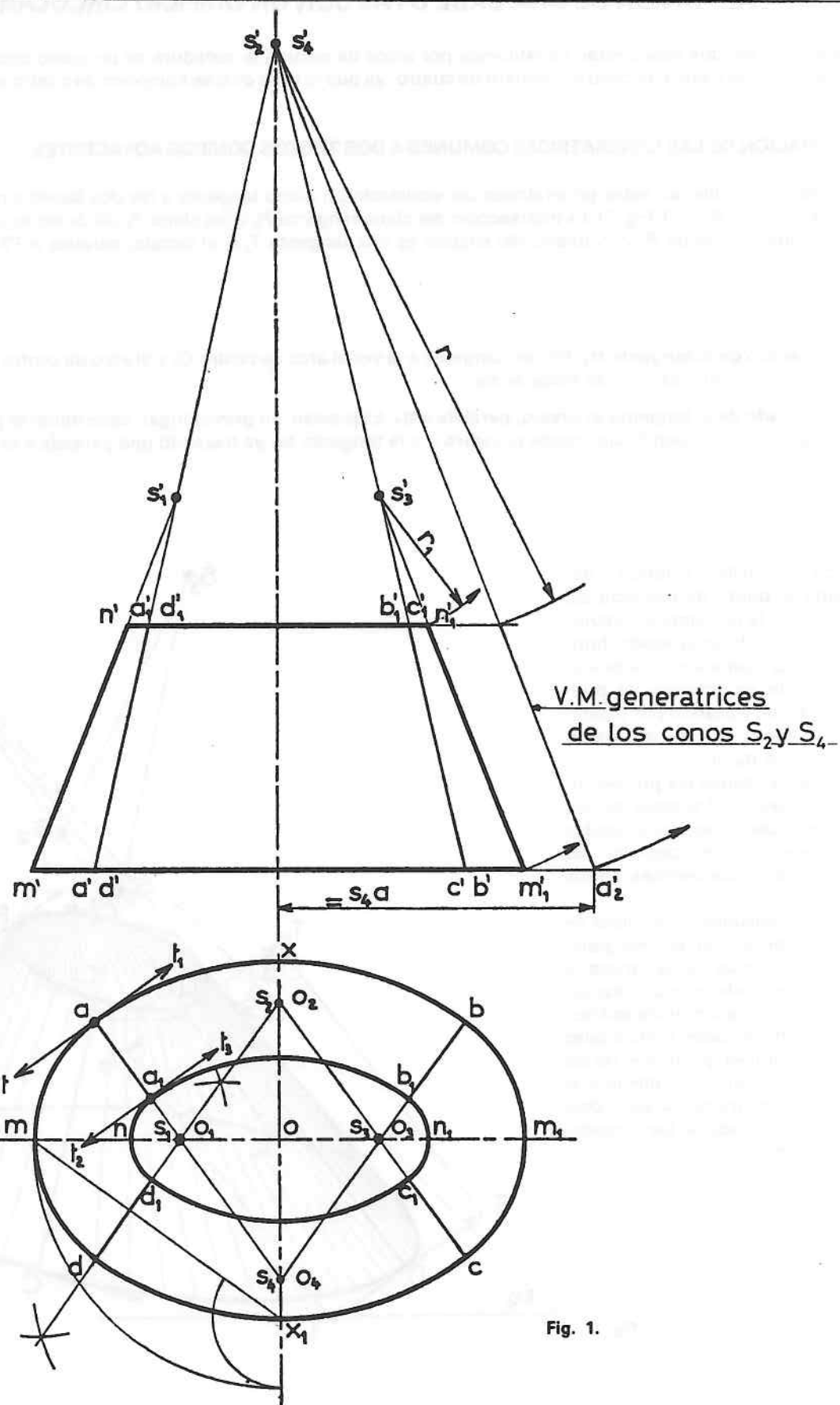


Fig. 1.

VII. UNION DE DOS ORIFICIOS OVALES CONCENTRICOS

Se dice que los dos orificios ovals son concéntricos, porque en proyección horizontal cada uno de los puntos $o_1 o_2 o_3 o_4$ es el centro de dos arcos de círculo, perteneciente uno a la base inferior y el otro a la base superior;

La superficie que une los dos orificios se compone de cuatro trozos de cono.

Como los arcos son concéntricos, el plano tangente a la base mayor, en un punto de unión A por ejemplo (traza tt_1 , Fig. 1), es tangente a la base menor en el punto A_1 , homólogo de A (traza t_2t_3).

La proyección horizontal aa_1 de la generatriz común AA_1 se confunde con la línea de los centros o_1o_4 . De lo que se deduce que las proyecciones de los vértices S_1 y S_4 de los conos que constituyen la superficie se confunden con los centros o_1, o_4 de los arcos de las bases; las partes cónicas son, pues, partes de conos de revolución.

DISEÑO

La construcción de los óvalos determina las proyecciones horizontales de las generatrices comunes y de los vértices de los conos. Hacer las proyecciones frontales de las generatrices comunes para obtener, si es posible, las de los vértices.

Para desarrollar la superficie basta, si los vértices son accesibles, conocer la V.M. de una generatriz de cada cono.

La V.M. de las generatrices de los conos de vértice S_1 y S_3 es igual a $s_3'm_1'$, proyección de una generatriz frontal. La V.M. de las generatrices de los conos S_2 y S_4 , obtenida por «plano al lado», es igual a $s_4's_2'$.

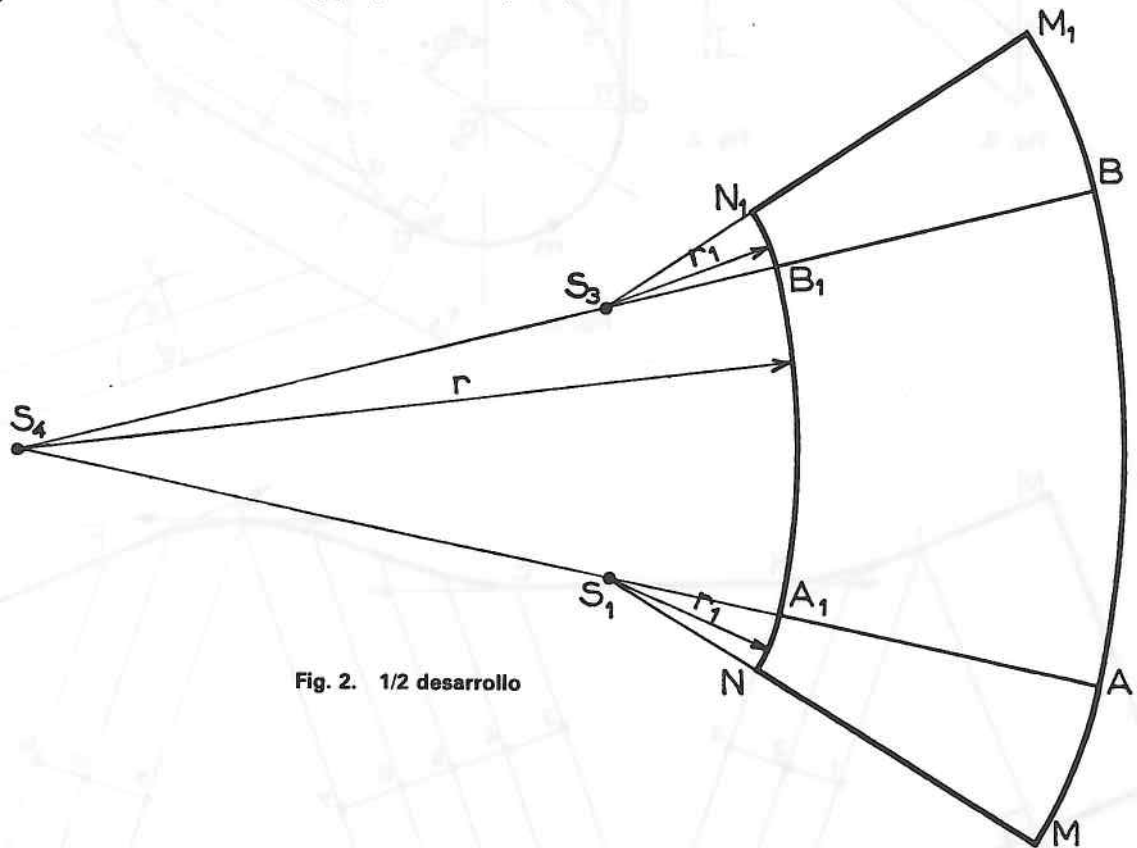


Fig. 2. 1/2 desarrollo

DESARROLLO

La figura 2 da un semidesarrollo. Después del curvado de los dos elementos semejantes, la unión se hará por MN y M_1N_1 .

1. Desarrollar la parte de cono de vértice S_4 : llevar en $\widehat{AB}$ el desarrollo de $\widehat{ab}$ (Fig. 1), estando realizado el diagrama según la fibra neutra.

2. Determinar S_3 y S_1 , llevando desde A y desde B la generatriz $S_3'm_1'$, y desarrollar las partes cónicas de vértice S_3 y S_1 igual que anteriormente.

3. Los arcos de radios r y r_1 dan la transformada de la base superior.

Fig. 3.

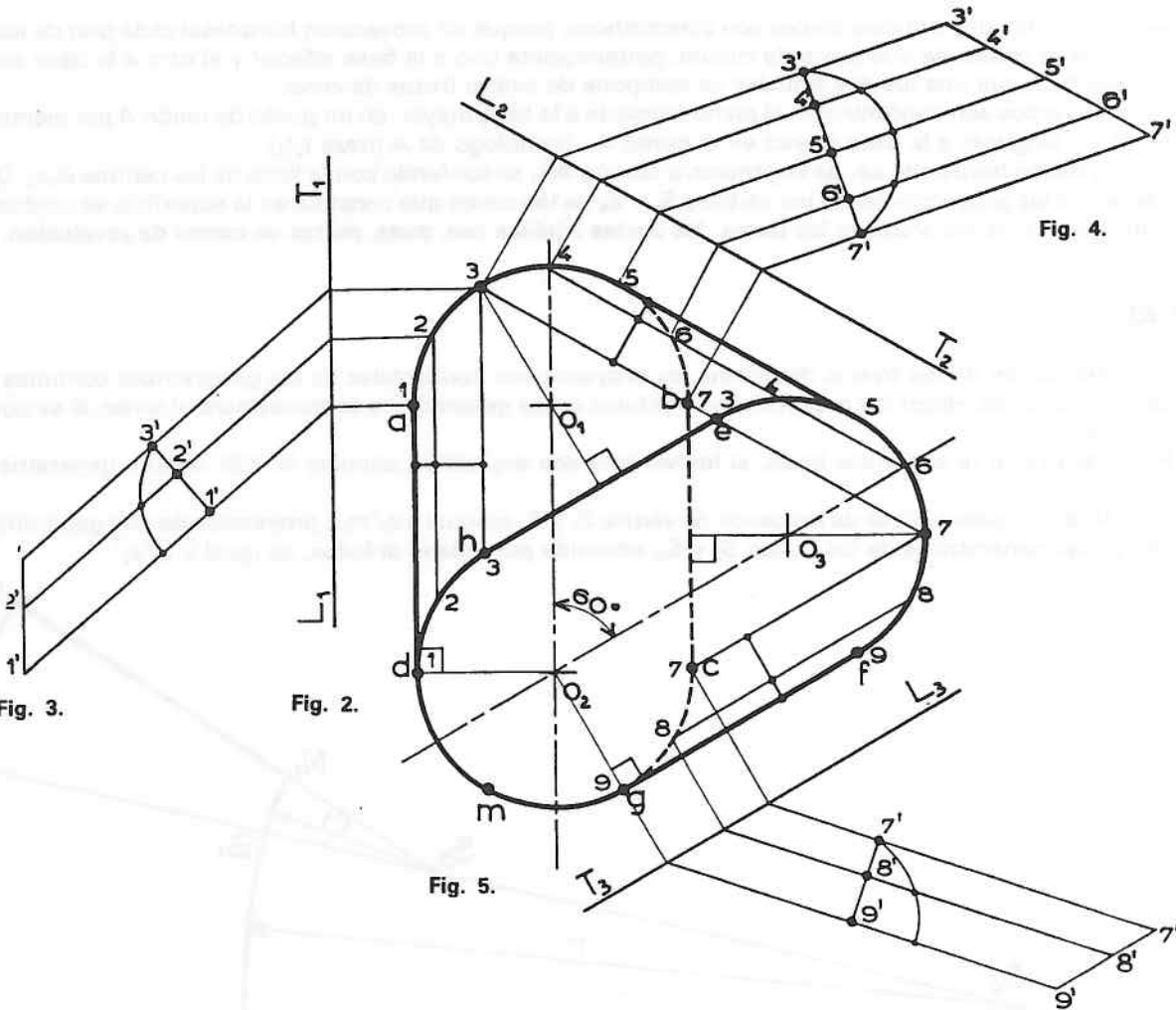


Fig. 2.

Fig. 5.

Fig. 4.

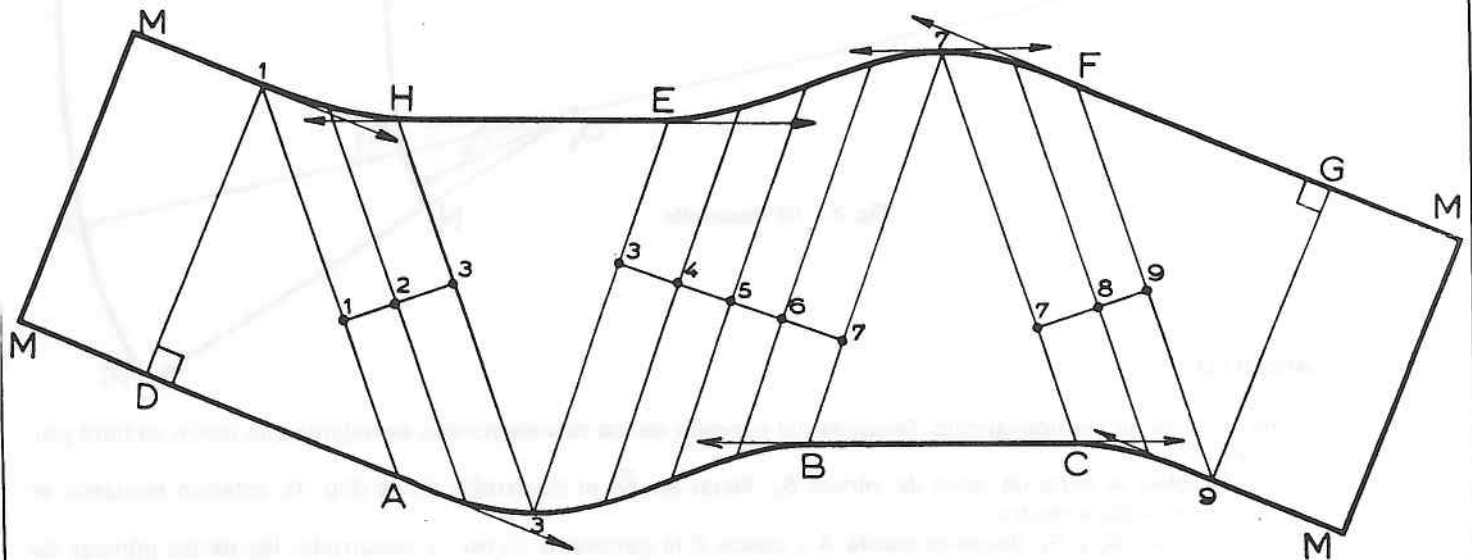


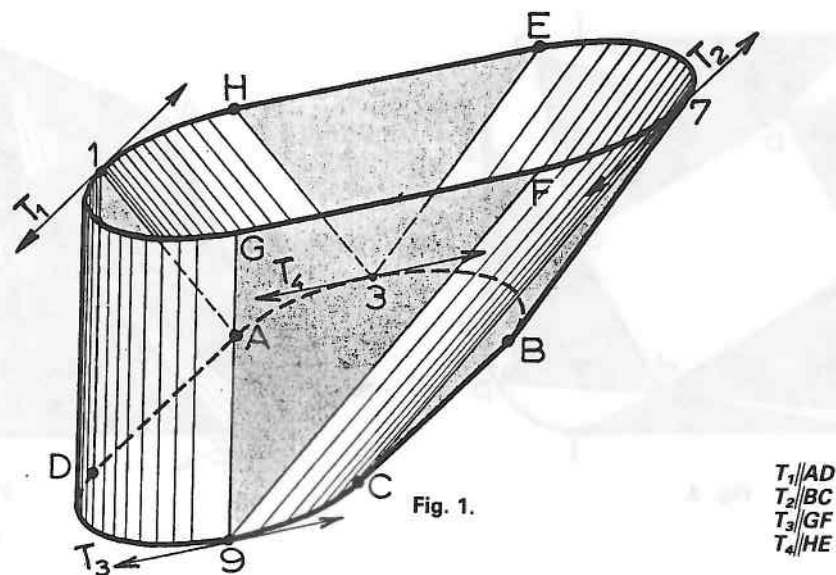
Fig. 6.

VIII. UNION DE DOS ORIFICIOS SEMIPLANOS IGUALES, QUE FORMAN ENTRE SI UN ANGULO DE 60 GRADOS

DISEÑO

1. **Determinación de los elementos geométricos que constituyen la superficie.** El plano que pasa por AD y es tangente al contorno de la base superior corta al plano de esta base según la tangente T_1 , siendo 1 el punto de contacto (Fig. 1). Un plano que pasa por BC y que toca al contorno superior en 7 determina la tangente T_2 . Igualmente, un plano que pase por HE toca a la base inferior en el punto 3, donde la tangente es T_4 . Un plano que pasa por GF da el punto de contacto 9 y la tangente T_3 .

La superficie buscada está constituida, pues, primeramente por cuatro triángulos. Estos triángulos se deben unir después entre sí mediante trozos de superficies cilíndricas: una porción de cilindro de revolución $D9G1$ y tres porciones de cilindros oblicuos de bases circulares $9C7F$, $B3E7$, $3A1H$ (Figs. 1 y 2).



2. **Búsqueda de las magnitudes reales.** Después de la determinación de los diferentes elementos (Fig. 2), inscribir en los trozos de cilindro oblicuo unas generatrices, dividiendo las bases en partes iguales.

La magnitud real de las generatrices se obtiene mediante *cambio de plano de proyección frontal*. Las secciones rectas (trozos de elipse) se abaten sobre los nuevos planos frontales (Figs. 3, 4 y 5).

NOTA. Sabiendo que las dos bases son paralelas, no hace falta hacer una proyección frontal; basta conocer la distancia que las separa (altura de la pieza).

DESARROLLO

No presenta ninguna dificultad nueva. Si se hace un trazado interior como en la figura 6, se puede comenzar por el trazado de un triángulo $B7C$, por ejemplo, y continuar hacia la izquierda por el desarrollo de la parte cilíndrica $B7E3$ y hacia la derecha por el desarrollo de la parte cilíndrica $C7F9$ y así en adelante, recordando que a una parte cilíndrica sigue un triángulo.

Comprobar las dos transformadas que, no solamente tienen la misma longitud, sino que son superponibles.

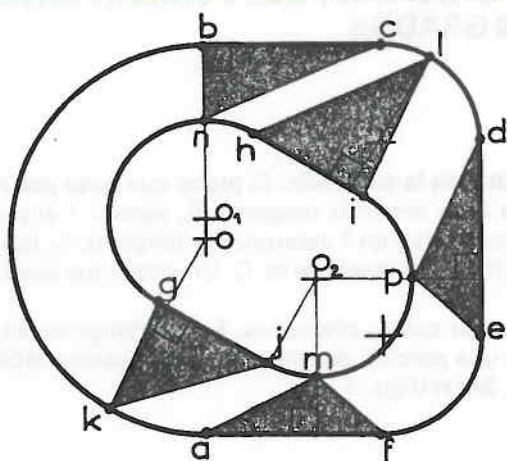


Fig. 1.

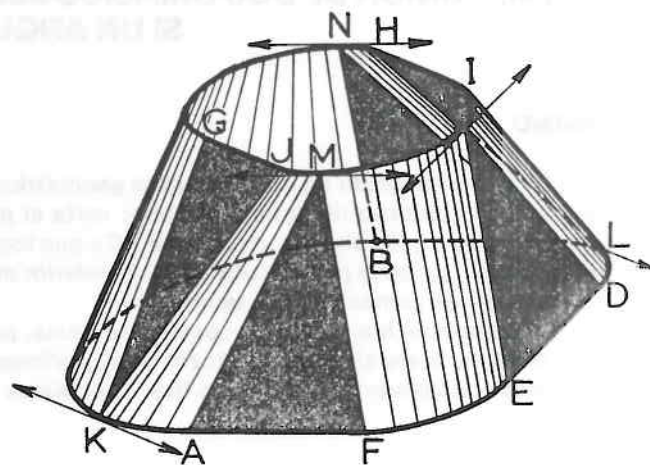


Fig. 2.

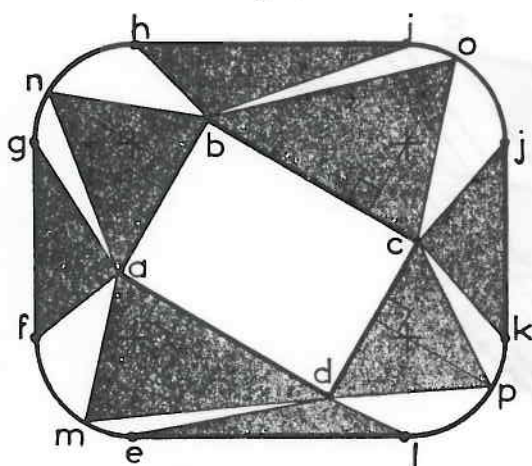


Fig. 3.

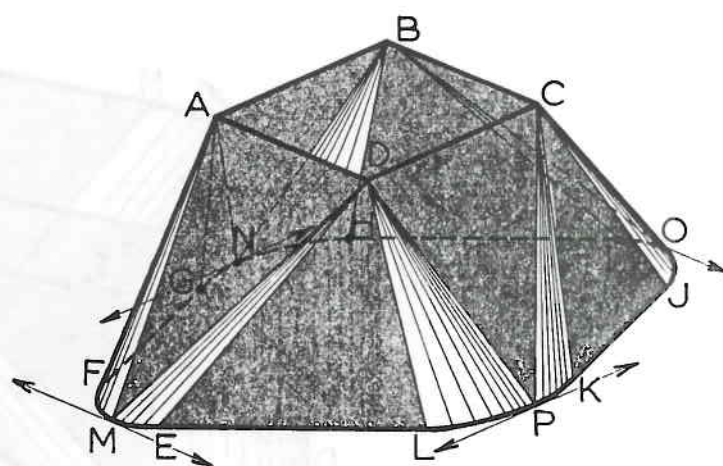


Fig. 4.

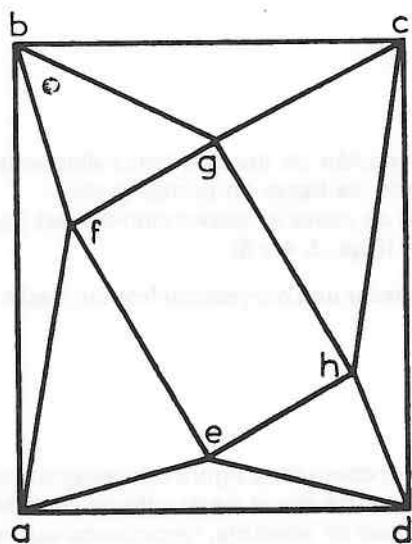


Fig. 5.

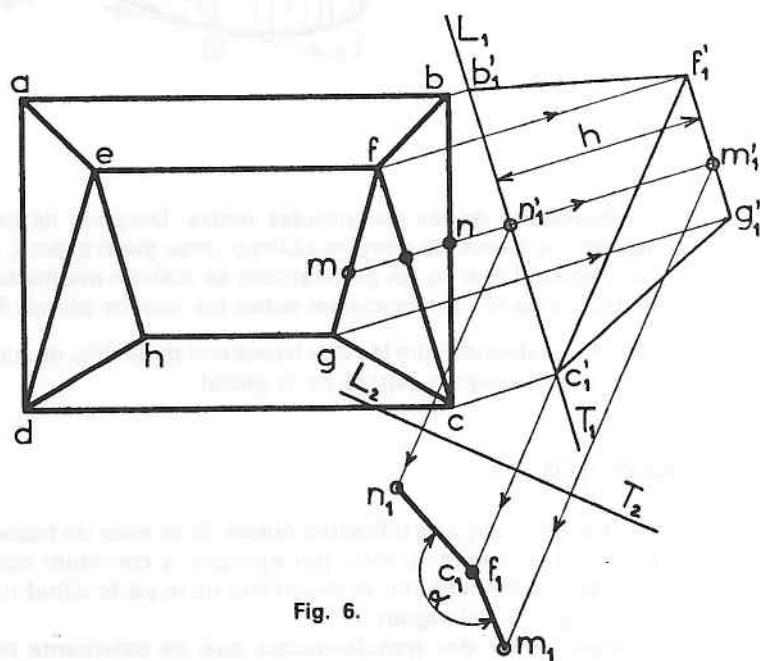


Fig. 6.

IX. UNIONES DE ORIFICIOS DIVERSOS

1. LOS ORIFICIOS A UNIR SE COMPONEN DE SEGMENTOS DE RECTA Y DE ARCOS DE CIRCULO (Fig. 1)

El plano que rueda sobre los dos contornos de las bases determina, al pasar por cada segmento de recta, un número de triángulos igual a la suma de los segmentos de recta encontrados, o sea cinco.

Estas caras triangulares se unen entre sí mediante tres trozos de cilindros oblicuos (*NHLC*, *ILD*, *PEFM*) y dos trozos de troncos de conos (*KJMA*, *KGNB*) (Figs. 1 y 2).

2. UNION DE UN ORIFICIO COMPUESTO DE SEGMENTOS DE RECTA Y DE ARCOS DE CIRCULO CON OTRO ORIFICIO RECTANGULAR, CUYOS LADOS NO SON PARALELOS A LAS RECTAS DEL PRIMER ORIFICIO (Figs. 3 y 4)

Cada uno de los planos que pasa por los segmentos *LE*, *FG*, *HI*, *JK* de la base mayor no puede tocar al rectángulo más que en uno de sus vértices. Los planos que pasan por los cuatro lados del rectángulo engendran otros cuatro triángulos.

Los ocho triángulos se unen entre sí mediante ocho trozos de conos oblicuos, cuyos vértices son los vértices del rectángulo.

3. LAS SUPERFICIES A UNIR SON POLIGONOS AMBAS

A) Unión de dos superficies rectangulares, cuyos lados no son paralelos entre sí (Fig. 5).

El plano que engendra la superficie compuesta no determina más que triángulos. Se tienen tantos triángulos como lados tienen las superficies a unir, o sea ocho.

OBSERVACION. Esta pieza se ejecuta mediante **plegado** y tiene tantas *aristas* como triángulos, mientras que todas las superficies compuestas estudiadas anteriormente se ejecutan mediante *curvado* y no tienen *ninguna arista*; están constituidas ya únicamente por superficies curvas, ya por superficies curvas enlazadas mediante trozos de planos tangentes a dichas superficies.

B) Unión de una superficie rectangular con una superficie trapezoidal, siendo las dos bases del trapecio paralelas a dos lados del rectángulo (Fig. 6).

Los lados paralelos, *AB* y *EF* por una parte y *DC* y *HG* por otra parte, pueden unirse mediante un plano (dos rectas paralelas en el espacio determinan un plano).

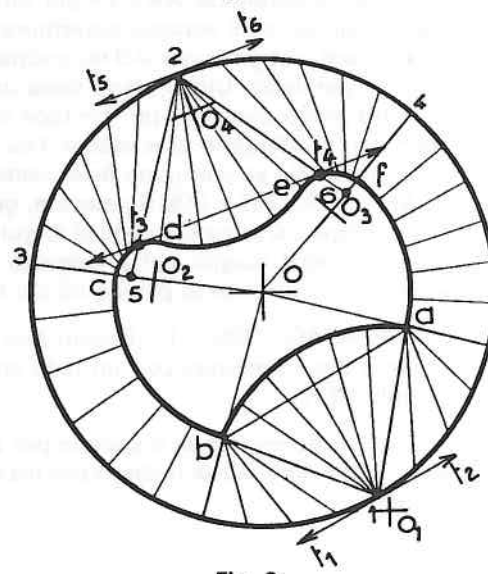
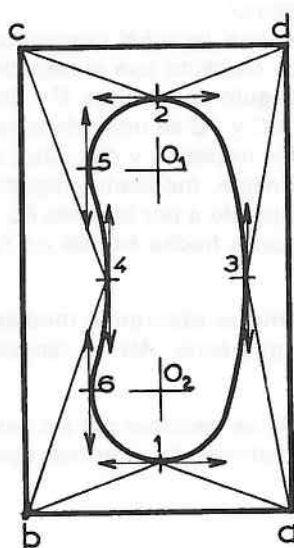
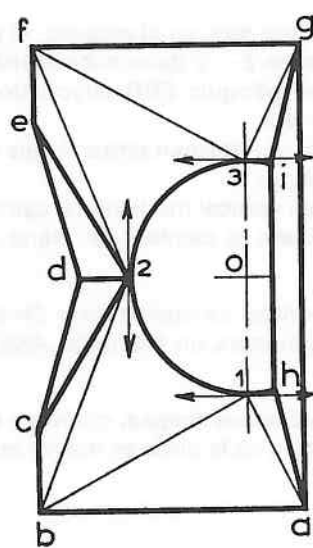
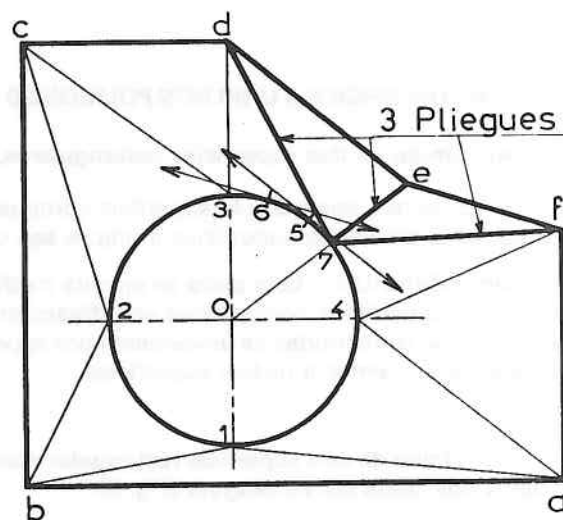
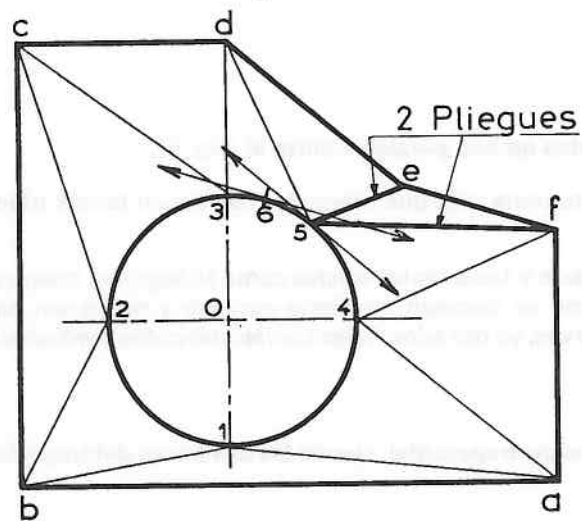
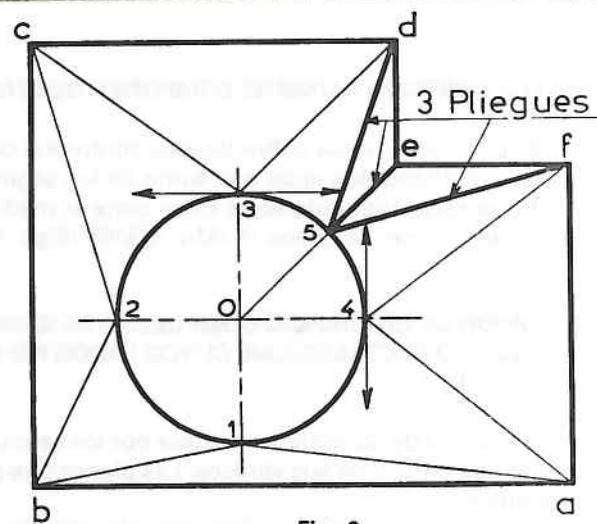
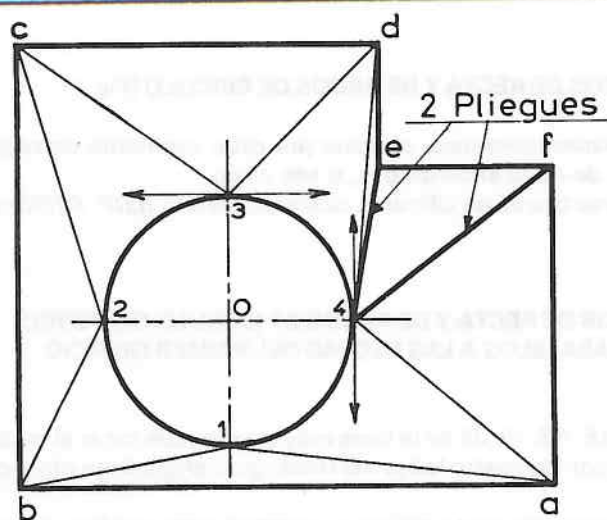
Un plano que pase por *AD* no podría contener el lado *EH*, puesto que *EH* y *AD* no son, en el espacio, ni concurrentes ni paralelas. Dicho plano tiene un único contacto con el trapecio —el vértice *E*— y determina el triángulo *ADE*. Otro plano que pase por *EH* toca al rectángulo en el punto *D* y determina el triángulo *EHD*, cuyo lado *ED* es común con el triángulo precedente. Los lados *BC* y *FG* se unen de la misma manera.

La superficie se compone finalmente de dos trapecios y de cuatro triángulos, que forman entre sí seis aristas (*AE*, *BF*, *FC*, *GC*, *HD* y *ED*). Se ejecuta, generalmente, mediante plegado y soldadura.

En la figura 6 se ha buscado el ángulo de plegado α por la arista *FC*, haciéndola vertical mediante el cambio del plano horizontal (según L_2T_2), después de haberla hecho frontal en $f_1'c_1'$ mediante el cambio del plano frontal (según L_1T_1), como en la página 86 del tomo I.

OBSERVACIONES. 1. Puesto que un plano se determina mediante tres puntos, es posible unir *EH* con *AD* mediante dos triángulos con un lado común, que sería, *AH*; se tendría de esta manera un triángulo *AHE* y otro triángulo *ADH*.

2. Si los pliegues se disponen por *ED* y *FC*, se ejecutan por las caras *internas* de las chapas, mientras que los pliegues por *AH* y *BG* se realizan por las caras *externas*. En el primer caso el volumen de la pieza es mayor que en el segundo.



X. UNION DE ORIFICIOS, UNO DE LOS CUALES TIENE UNA PARTE CONCAVA

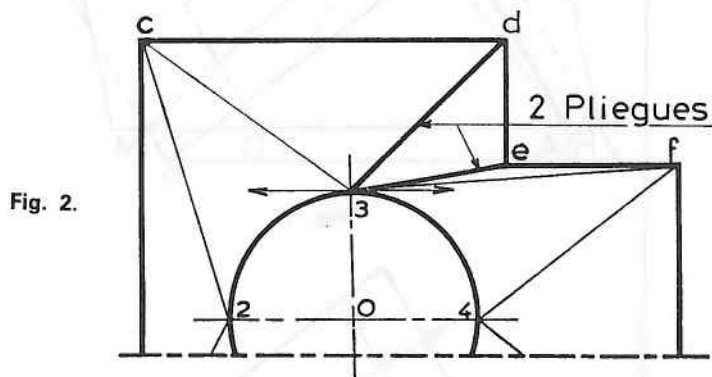
FIGURAS 1, 2, 3

Puesto que los lados EF y CD son paralelos, los planos que pasan por estos dos segmentos de recta determinan en el círculo *un solo punto de tangencia*: 3. Igualmente, siendo DE paralelo a FA , los dos planos correspondientes determinan *un único punto de tangencia*: 4.

Se pueden utilizar dos construcciones para determinar la superficie.

1. Utilizando al máximo el plano que rueda sobre las dos bases. Se obtiene ya el triángulo $d4e$ (Fig. 1), ya el triángulo $e3f$ (Fig. 2). La superficie tiene *dos aristas* en cada caso.

2. Uniendo el centro o al vértice e (Fig. 3). De esta manera la superficie contiene *tres pliegues*; por esta razón se prefiere la primera construcción.



FIGURAS 4 y 5

Al igual que anteriormente, los planos que pasan por DE y EF determinan dos triángulos de proyección $d-5-e$ y $e-6-f$, que se cortan. Se traza solamente uno de ellos; por ejemplo, $d-5-e$ (Fig. 4). Uniendo $5f$, se obtiene el segundo triángulo. La pieza contiene *dos pliegues*: $5e$ y $5f$, porque el plano del triángulo $f-5-e$ no es tangente al cono $f-5-4$.

Uniendo o con e (Fig. 5), como en la figura 3, ninguno de los triángulos $de7$ y $e7f$ es tangente al círculo, y la pieza presenta *tres pliegues*. Sigue siendo preferible la primera construcción.

FIGURA 6

El plano que pasa por BF es tangente al círculo en el punto 2. Determina de esta manera dos triángulos $BC2$ y $FE2$. Uniendo d con 2 se obtienen las proyecciones de los otros triángulos que unen la línea quebrada $BCDEF$ con el círculo. La pieza presenta *cinco aristas* (en trazo grueso en la figura 6).

FIGURA 7

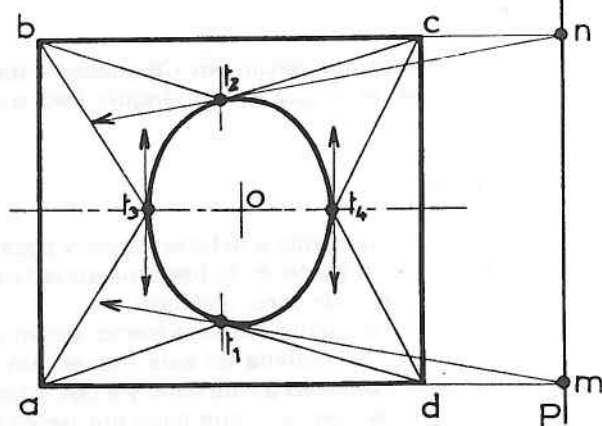
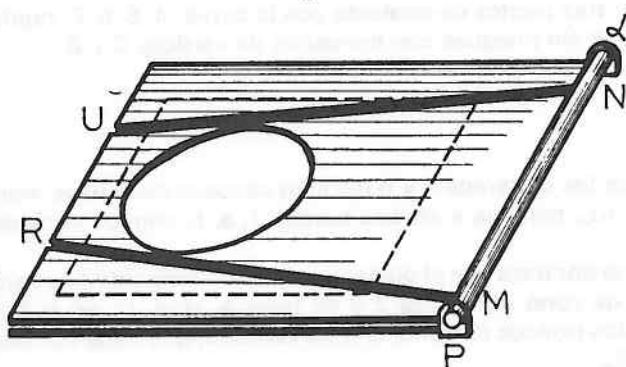
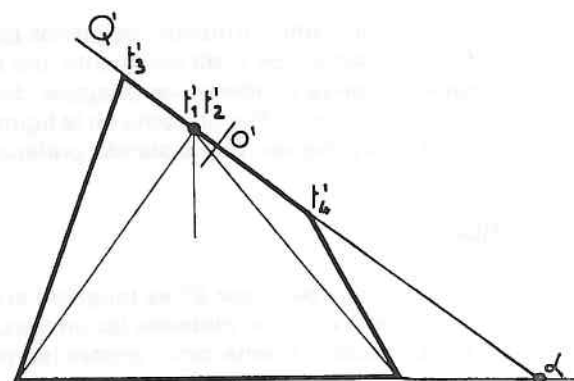
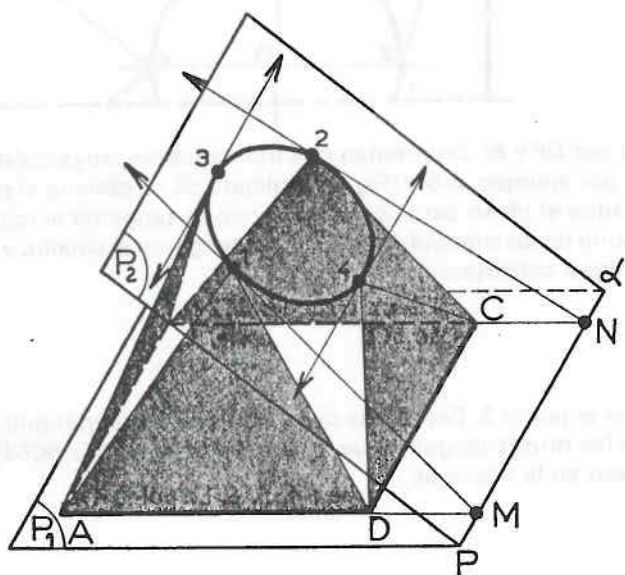
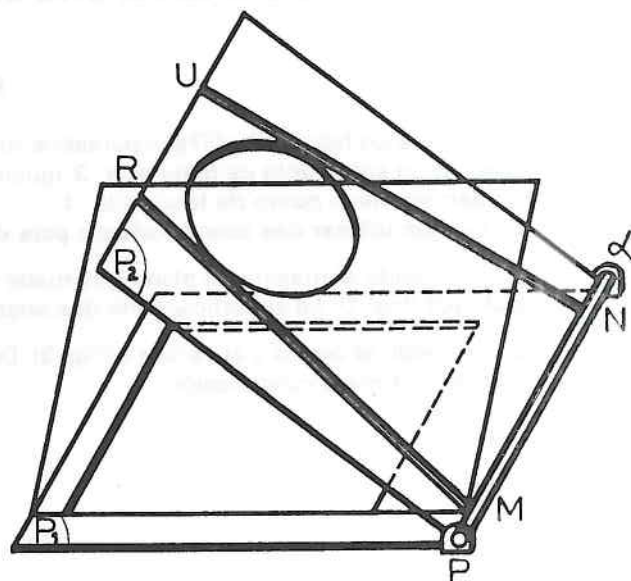
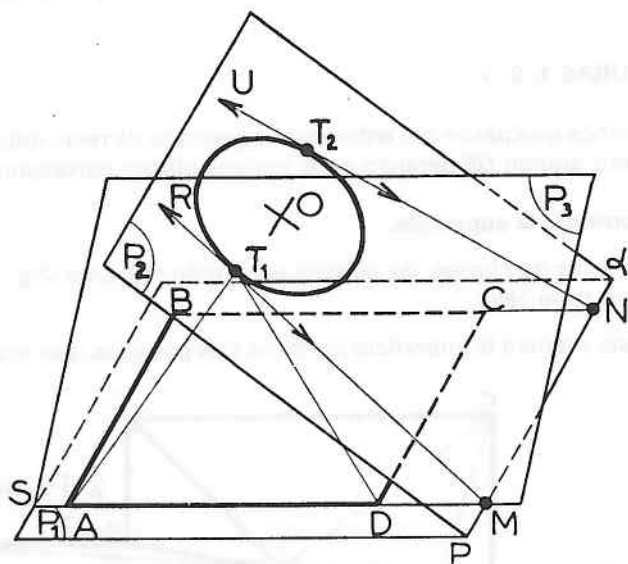
Los planos que pasan por CB pueden determinar tres puntos de contacto con la curva: 4, 5, 6. El punto 4 es el conveniente; es el que da el triángulo $B4C$, que se une sin pliegues con los conos de vértices C y B .

FIGURA 8

Un plano tangente a la base mayor y pasando por los extremos A y B del arco cóncavo de la base menor tiene por traza con el plano de la base mayor la tangente t_1t_2 , paralela a ab . Los puntos 1, a , b , son los vértices de tres trozos de tronco de cono oblicuos.

Un plano tangente a la base menor según t_3t_4 tiene por traza con el plano del círculo la tangente t_5t_6 , paralela a la tangente t_3t_4 . Se obtiene de esta manera un trozo de cono de vértice 2 y de base t_3 , d , e , t_4 ; $ót_3$ y $2t_4$ son las generatrices comunes a este cono y a dos trozos de dos troncos de cono, uno de vértice 5, que tiene por bases 2-3 y ct_3 y el otro de vértice 6, que tiene por bases 2-4 y ft_4 .

El resto de la superficie está constituido por partes de troncos de cono de revolución de vértice O (centro común a las dos bases).



3

Las superficies compuestas. Las bases a unir están situadas en planos concurrentes

I. DETERMINACION DE LOS ELEMENTOS QUE COMPONEN LA SUPERFICIE

Sea la unión de un orificio rectangular situado en un plano horizontal P_1 con un orificio circular situado en un plano de canto P_2 (Fig. 1).

Hagamos pasar por AD un plano P_3 tangente al círculo. Dicho plano determina el punto de contacto T_1 . La intersección de P_2 y P_3 es la tangente MR .

Puesto que los dos planos P_1 y P_2 son concurrentes, sus trazas con el plano P_3 , o sea MR y MS , son también concurrentes y su punto de intersección M , punto común a la vez a P_3 , P_2 y P_1 , tiene que estar situado sobre la intersección $P\alpha$ de estos dos últimos.

La porción triangular ADT_1 del plano tangente es un elemento de la superficie buscada.

Igualmente, un plano tangente al círculo que pasa por BC tiene sus dos trazas, NU y NB , concurrentes en el punto N , situado sobre $P\alpha$.

Se materializará esta demostración construyendo un aparato semejante al representado en la figura 2, en el que los planos P_1 y P_2 se materializan mediante dos chapas, que llevan las aberturas a unir y que están articuladas por $P\alpha$. La chapa P_2 lleva dos hendiduras, por MR y NU , a través de las cuales pasa el plano P_3 , representado por una chapa de plástico.

En el ejemplo elegido, los lados AB y DC son paralelos a la traza $P\alpha$; por tanto, no cortan nunca a ésta, por mucho que se les prolongue. Los planos tangentes al círculo, que pasan por AB y DC , cortan al plano P_2 según dos tangentes paralelas a $P\alpha$ (Fig. 3). Estos dos planos proporcionan los otros dos triángulos de la superficie, que se compone de cuatro triángulos y de cuatro trozos de cono oblicuo.

DISEÑO

Datos: proyecciones horizontal y frontal del rectángulo; traza $P\alpha Q'$ del plano de canto que contiene el círculo; proyección frontal del círculo y proyección horizontal de su centro (Fig. 4).

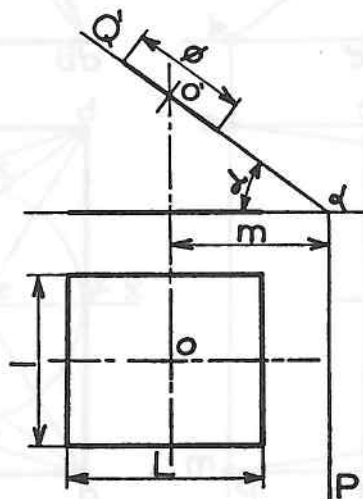


Fig. 4.

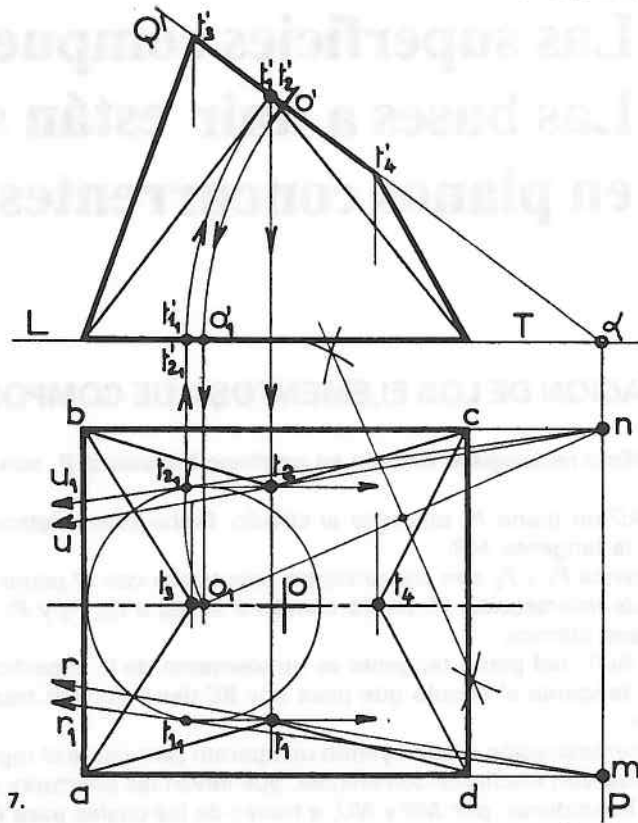


Fig. 7.

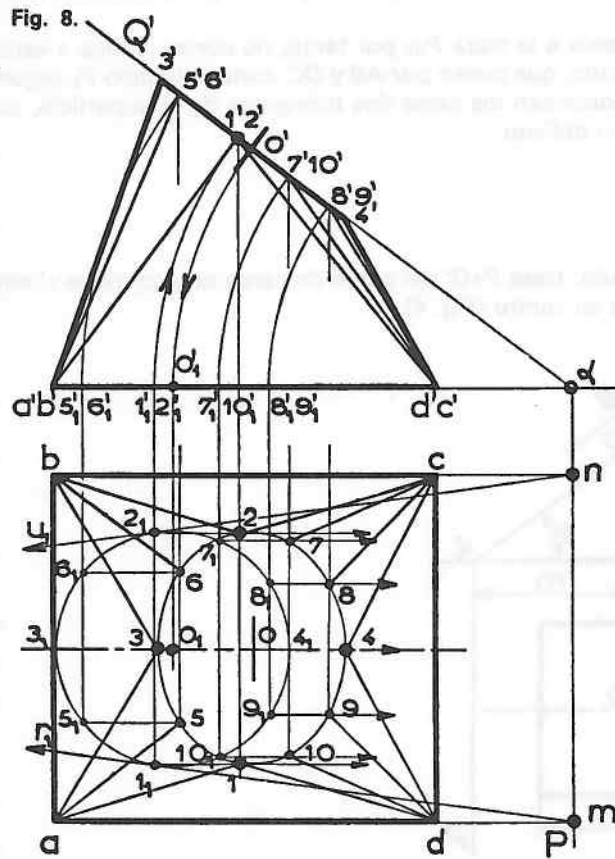


Fig. 8.

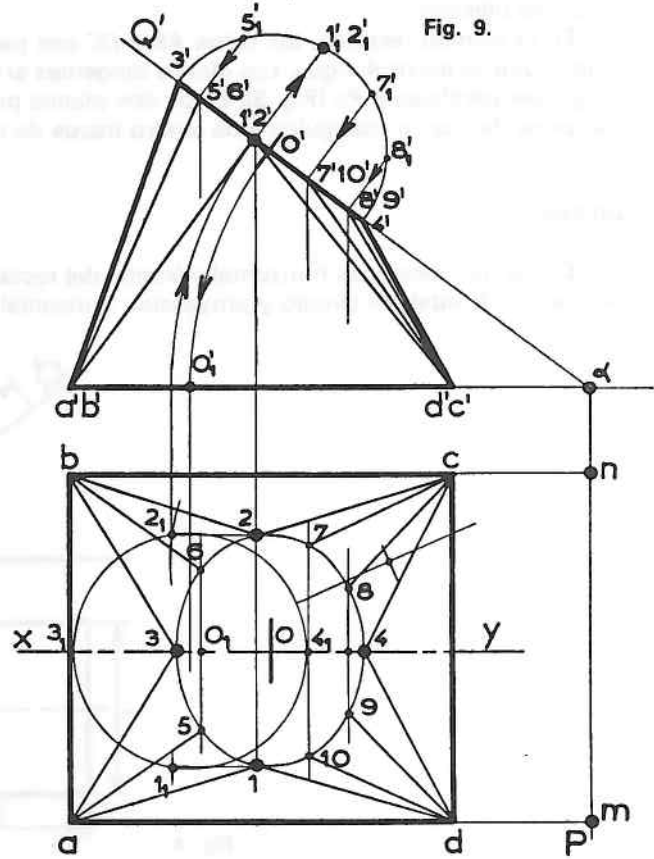


Fig. 9.

1. Determinación de los cuatro triángulos que constituyen las superficies planas.

Para encontrar las proyecciones de los vértices de los triángulos situados sobre el círculo, parece lógico hacer primeramente la proyección horizontal del círculo que, puesto que se proyecta en escorzo parcial, da una *elipse*. Se determinarán los puntos de origen m y n de las tangentes, prolongando los lados ad y bc hasta su intersección con la traza horizontal $P\alpha$ del plano de canto. Después será preciso trazar las *tangentes a la elipse* desde los puntos exteriores m y n (Fig. 5).

Es evidente que la exactitud de los puntos de contacto t_1 y t_2 dependerá de la precisión con la que se haya trazado la elipse, precisión que no es nunca rigurosa.

Método para determinar fácilmente y con exactitud los vértices T1 y T2 de los triángulos. Tomando de nuevo el aparato de la figura 2, abatir el plano P_2 sobre el plano P_1 , haciéndolo girar alrededor de $P\alpha$. El círculo se hace horizontal y sus tangentes MR y NU también (Fig. 6). Las dos chapas superpuestas representan la nueva proyección horizontal que se va a construir sobre el diagrama (Fig. 7).

La proyección o' del centro O describe un arco de círculo de centro α y de radio $\alpha o'$ y viene a o_1' , mientras que o viene a o_1 , centro del círculo visto en magnitud real y que trazamos. Por m y n se llevan las tangentes mr_1 y nu_1 . Estas dos tangentes dan los puntos $t'1_1$ y $t'2_1$, cuyas proyecciones frontales se confunden en $t'1_1$ y $t'2_1$. Al volver el plano P_2 a su posición inicial, todos los puntos del círculo describen, de nuevo y en sentido contrario, arcos de centros situados sobre $P\alpha$. Las proyecciones frontales $t'1_1$ y $t'2_1$ vienen, pues, a $t'1$ y $t'2$, sobre $\alpha Q'$. La proyección horizontal de cada uno de los puntos está situada en la intersección de las perpendiculares a LT , trazadas desde $t'2_1$ y $t'1_1$, puesto que durante la rotación de P_2 cambian las cotas, pero los alejamientos no se modifican.

Cada uno de los puntos t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , está en proyección horizontal, el tercer vértice de cada uno de los cuatro triángulos. mt_1 y nt_2 son las proyecciones horizontales de las tangentes MR y NU (Fig. 1); son, pues, las tangentes a la elipse.

2. Determinación de los trozos de cono oblicuo y de sus generatrices.

Se pueden utilizar dos construcciones para obtener las proyecciones de puntos de la elipse con precisión: a) utilizar el círculo hecho horizontal- b) abatir el círculo sobre el plano frontal, lo que da más claridad a la proyección horizontal.

En el primer caso (Fig. 8), dividir cada uno de los arcos 1_1-3_1 , 3_1-2_1 , 2_1-4_1 , 4_1-1_1 , que representan las bases de los trozos de conos, en partes iguales. Buscar las proyecciones frontales, y después las horizontales, de estos puntos, de la misma manera que los puntos t_1 y t_2 .

En el segundo caso (Fig. 9), llevar sobre el círculo hecho frontal los puntos $1'-2'-3'-4'$ a $1'_1-2'_1-3'_1-4'_1$; dividir cada arco en partes iguales. Trazar desde todos estos puntos perpendiculares a $\alpha Q'$ para obtener los alejamientos, que se llevan en proyección horizontal a un lado y a otro de xy .

Al unir los puntos 5, 6, 7, 8, 9, 10 con su vértice respectivo, se trazan las proyecciones de las generatrices. Uniendo entre sí todos los puntos, se obtiene la proyección horizontal del círculo, proyección que no es indispensable, pero que permite comprobar, por su forma (*elipse*), la exactitud del trazado.

3. Búsqueda de las verdaderas magnitudes de las generatrices.

Son aplicables varios métodos; por ejemplo, después de haber construido dos líneas perpendiculares, se puede:

a) Llevar sobre una la proyección horizontal y sobre la otra la diferencia de las cotas;

b) Llevar sobre una la proyección frontal y sobre la otra la diferencia de los alejamientos, diferencia que se encuentra en el círculo abatido. Es, pues, innecesario trazar la elipse e incluso las proyecciones horizontales de las generatrices.

OBSERVACIONES. 1. Cuando las dos bases a unir son un polígono y un círculo, éste situado sobre un plano de canto, se puede, en lugar de abatir el círculo sobre el plano horizontal, cambiar el plano horizontal de proyección de manera que sea paralelo al plano del círculo (ver lámina siguiente).

2. El método del abatimiento del plano de una superficie sobre el de la otra superficie es el único que, en la práctica, permite realizar un diagrama exacto, cuando las superficies a unir son dos círculos o cuando ambas contienen arcos de círculo; es, pues, necesaria la perfecta comprensión de este método.

II. UNION DE UN RECTANGULO HORIZONTAL CON UN CIRCULO DE CANTO

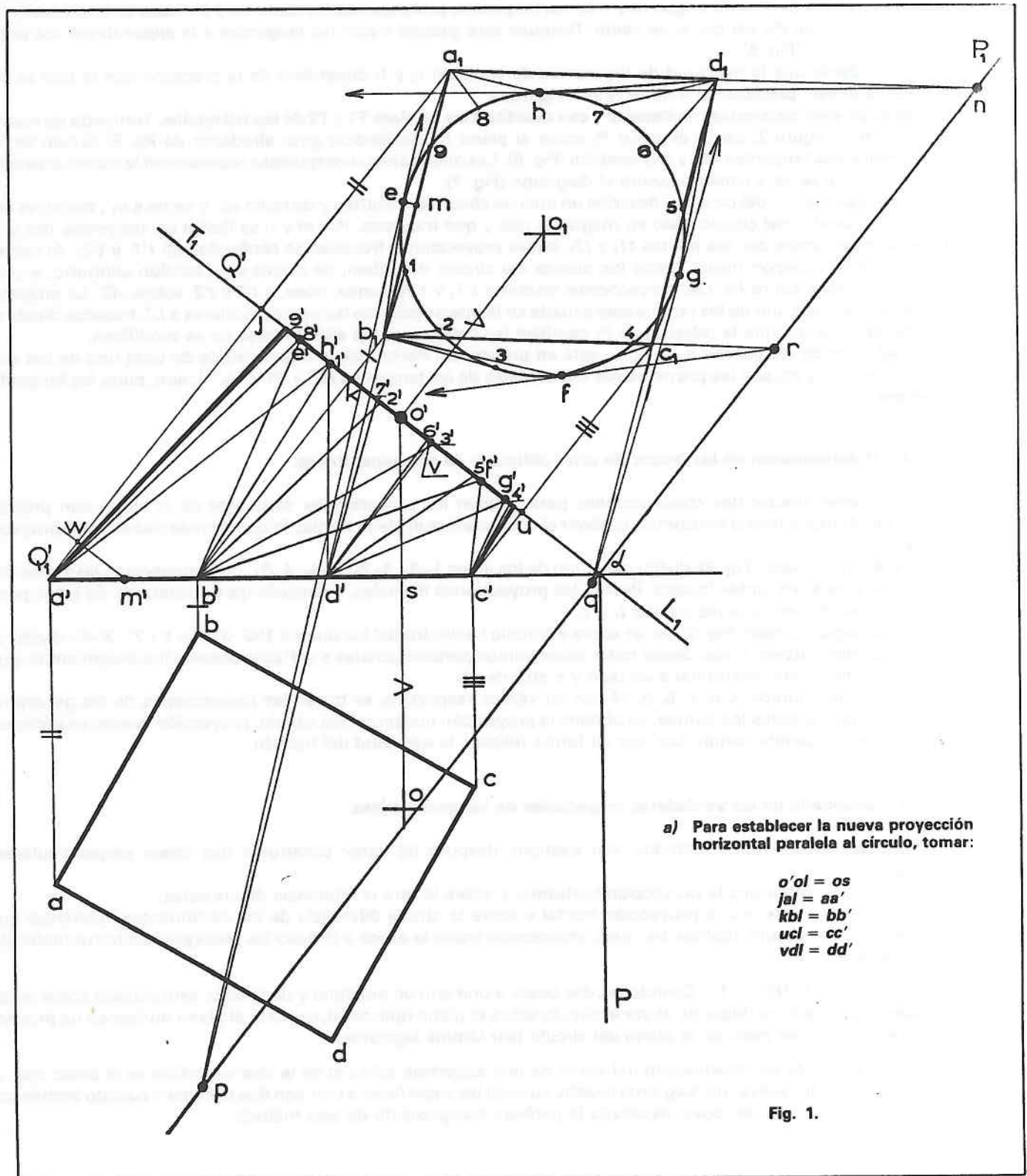
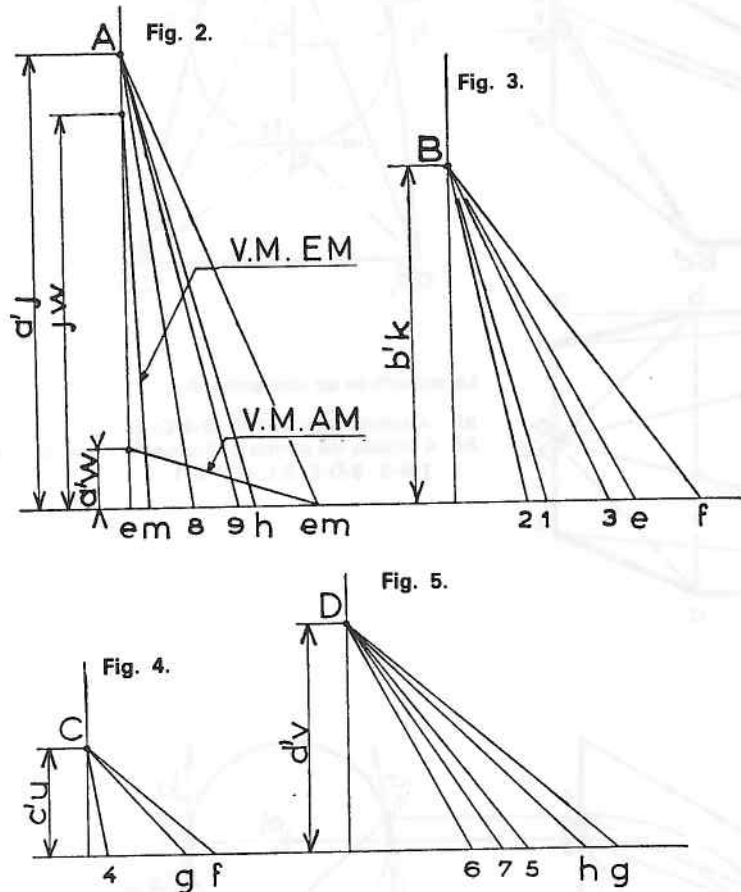


Fig. 1.

DISEÑO

Tomando un nuevo plano horizontal de proyección paralelo al plano que contiene el círculo, éste se proyecta en *verdadera magnitud* sobre este nuevo plano, mientras que el rectángulo se proyecta en *escorzo parcial* (Fig. 1).

En el nuevo sistema de proyección, la traza horizontal del plano que contiene el rectángulo es $P_1\alpha$, perpendicular a la nueva línea de tierra L_1T_1 , y su traza frontal es $\alpha Q'_1$, sobre la que se encuentra la proyección frontal del rectángulo, que está *de canto*.



Después de la determinación de los puntos p, r, q, n , puntos de origen de las tangentes en $P_1\alpha$, se trazan desde estos puntos tangentes al círculo para obtener las proyecciones horizontales e, f, g, h de los vértices de los triángulos. Se divide después cada uno de los arcos ef, fg, gh, he en partes iguales y se pueden trazar de esta manera generatrices en los conos.

Las figuras 2, 3, 4, 5 dan las verdaderas magnitudes de las generatrices: hipotenusas de triángulos rectángulos, que tienen por lados del ángulo recto, por una parte la proyección horizontal, por otra parte la diferencia de las cotas de los puntos extremos.

DESARROLLO

Si la unión está prevista por EM , comenzar por el desarrollo del triángulo opuesto CDG , colocando correctamente las letras C y D , a fin de que el trazado sea por el interior (Fig. 6) o por el exterior, o según se quiera.

Comprobar las transformadas de los trozos de círculo GF, FE, GH, HE a medida que se van desarrollando. Los ángulos α y β son suplementarios.

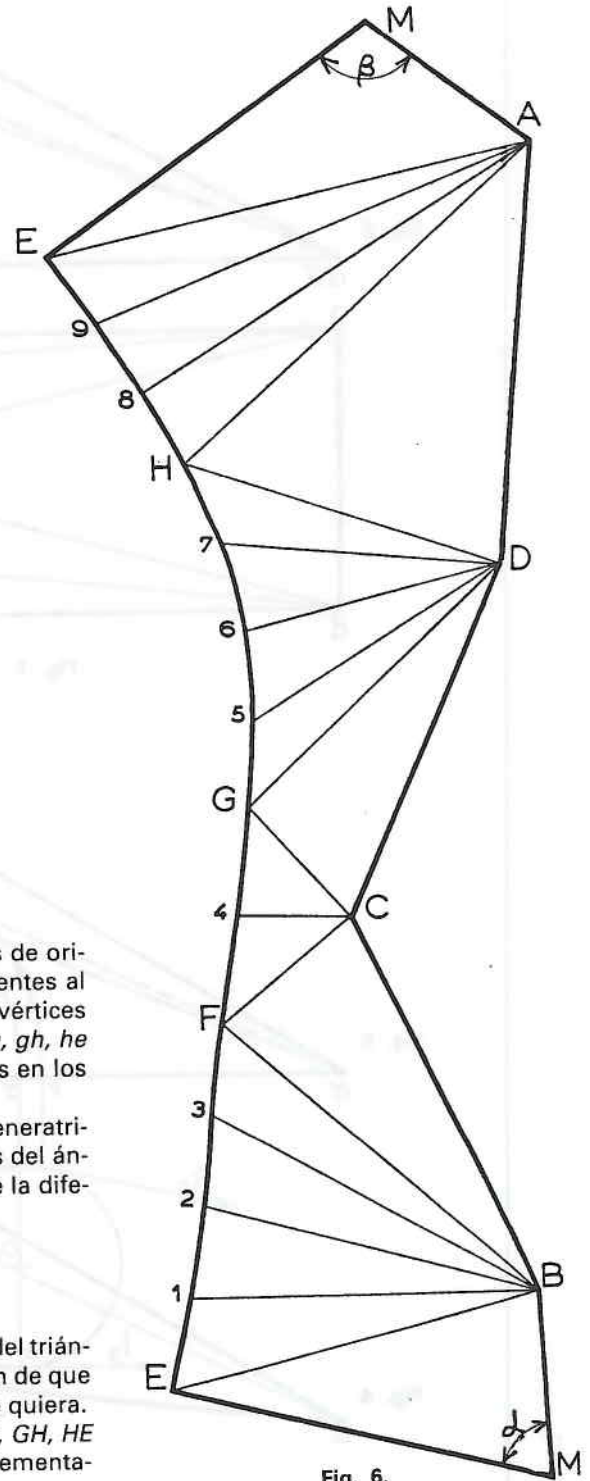


Fig. 6.

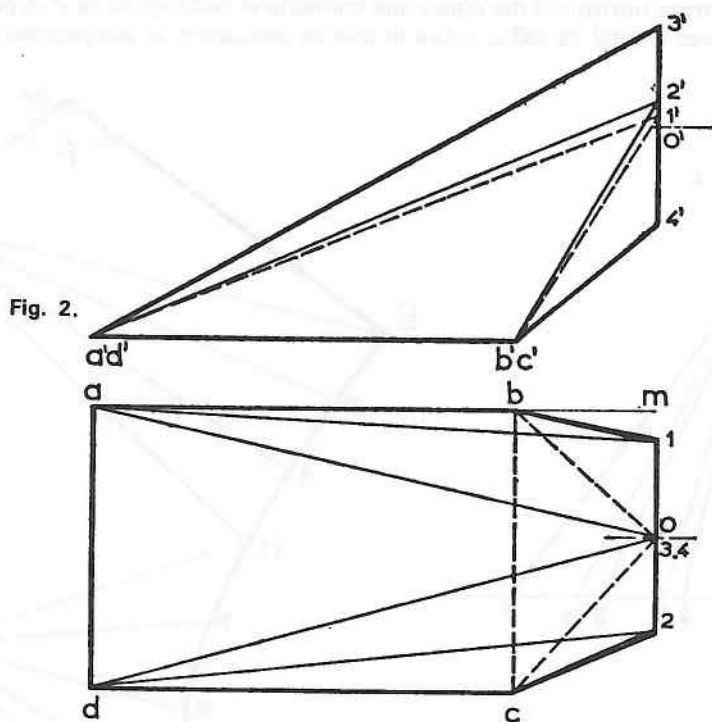


Fig. 1.

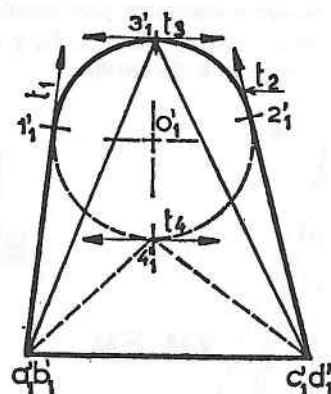


Fig. 3.

La superficie se compone de:

- a) 4 triángulos: A-1-B; B-4-C; C-2-D; D-3-A.
- b) 4 trozos de conos oblicuos de base circular: 1-A-3; 3-D-2; 2-C-4; 4-B-1.

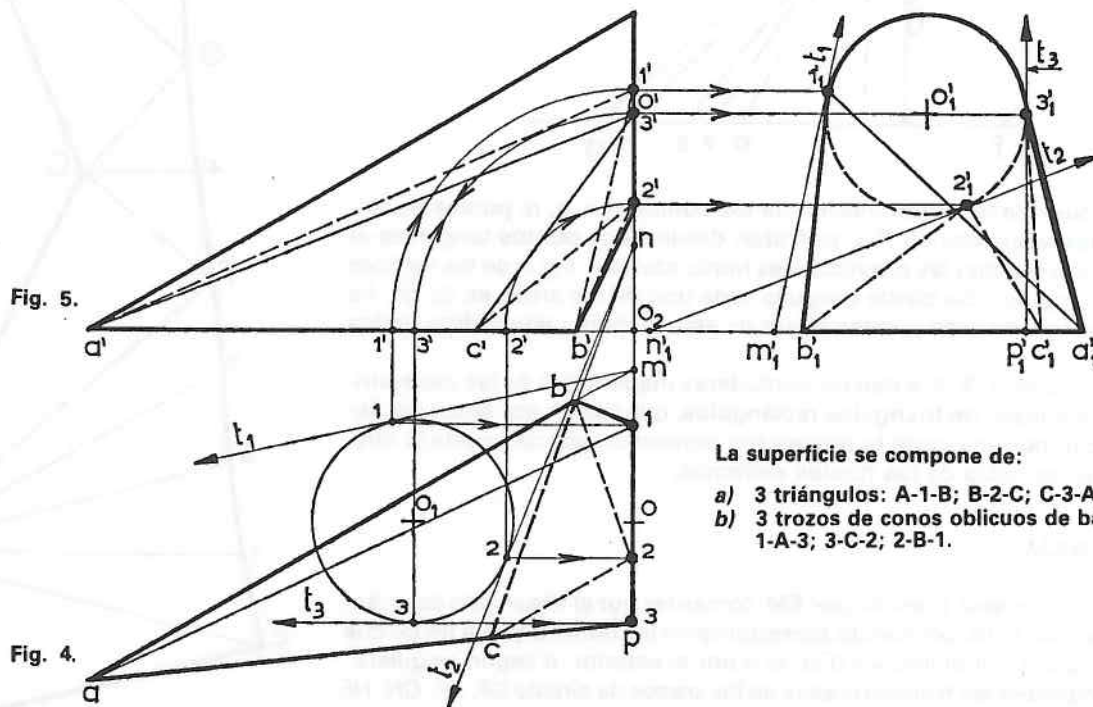


Fig. 6.

La superficie se compone de:

- a) 3 triángulos: A-1-B; B-2-C; C-3-A.
- b) 3 trozos de conos oblicuos de base circular: 1-A-3; 3-C-2; 2-B-1.

III. UNION DE UN POLIGONO CON UN CIRCULO, SITUADOS EN PLANOS PERPENDICULARES ENTRE SI

A. La base horizontal es un rectángulo, que tiene dos lados horizontales-frontales y dos lados de perfil

La traza horizontal am (Fig. 1) del plano tangente al círculo, y que pasa por AB , es horizontal-frontal y se proyecta en $a'_1b'_1$ en escorzo total en la vista de perfil (Fig. 3). Este plano tangente a las dos bases es, pues, perpendicular al plano de perfil y se proyecta sobre este plano en escorzo total, es decir, según una recta t_1 , tangente al círculo. El punto de contacto $1'_1$ es la proyección del tercer vértice del triángulo, que tiene a AB por base.

$2'_1$, determinado por la tangente t_2 , es la proyección del vértice del triángulo que tiene a CD por base (Fig. 3).

La intersección del plano tangente al círculo, y que pasa por AD , con el plano que contiene el círculo es una recta de punta, proyectada según la tangente t_3 (Fig. 3).

De igual modo, el plano tangente que pasa por BC corta al plano del círculo según una tangente t_4 .

Los puntos de contacto $3'_1$ y $4'_1$ son las proyecciones de perfil de los vértices de los otros dos triángulos.

Después de haber construido las proyecciones frontales y de perfil de generatrices inscritas en los cuatro trozos de cono oblicuo, se tendrán todos los elementos necesarios para la búsqueda de las verdaderas magnitudes, que permiten hacer el desarrollo. La vista de arriba no es, pues, indispensable.

B. Los lados del polígono de la base son oblicuos a todos los planos de proyección

Siendo oblicuos al plano de perfil los lados del polígono, ninguno de ellos se proyecta en escorzo total sobre este plano. No se puede, pues, determinar los vértices de los triángulos de la superficie compuesta trazando tangentes al círculo, igual que anteriormente. Para obtener las proyecciones de los vértices:

a) Abatir el círculo sobre el plano horizontal, haciéndole girar alrededor de un eje de punta que pase por O_2 (Figs. 4 y 5);

b) Trazar las tangentes t_1, t_2, t_3 desde los puntos m, n, p , puntos de intersección de las trazas horizontales de los planos tagentes con la traza de los planos que contienen, uno al círculo, el otro al triángulo de la base (Fig. 4);

c) Referir los puntos de contacto de las tangentes sobre la proyección horizontal del círculo: puntos 1, 2, 3 (Fig. 4);

d) Referir estos mismos puntos sobre la proyección frontal del círculo, primero abatido sobre el plano horizontal y después en su posición inicial, mediante una rotación de 90° alrededor del eje O_2 (Fig. 5).

Otra construcción

La intersección del plano tangente que pasa por AB con el plano vertical que contiene el círculo es una tangente al círculo, que tiene por origen el punto m . Es una recta de perfil, cuya proyección horizontal es $m-1$ (Fig. 4).

En la proyección de perfil se puede construir el punto de contacto $1'_1$, determinado por el plano tangente que pasa por AB , trazando una tangente al círculo por el punto m'_1 , deducido de m .

Referir $1'_1$ en $1'$ para obtener la proyección frontal de este punto.

El mismo razonamiento nos conduce a construir el punto de contacto $2'_1$ trazando una tangente al círculo por el punto n'_1 (Fig. 6), deducido de n (Fig. 4). El punto N es la intersección de la traza horizontal del plano tangente que pasa por BC con la del plano vertical que contiene el círculo.

Hay que destacar que el plano tangente que pasa por BC es tangente al círculo en su parte inferior.

La tangente trazada por p'_1 (Fig. 6), deducido de p (Fig. 4), determina el punto $3'_1$ que, referido en $3'$, se confunde en el caso del diseño con O' .

OBSERVACION. Este método ahorra el abatimiento del círculo sobre el plano horizontal, pero se necesita la proyección horizontal para determinar los puntos m, n y p .

Se puede evitar hacer la proyección frontal abatiendo la proyección de perfil sobre el plano horizontal (ver Figs. 7 y 8, página siguiente).

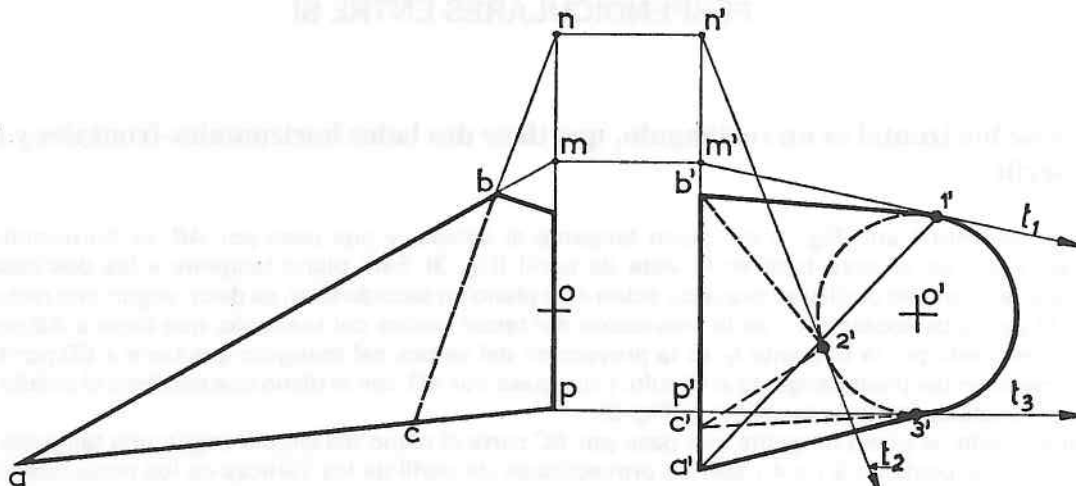


Fig. 7.

Fig. 8.

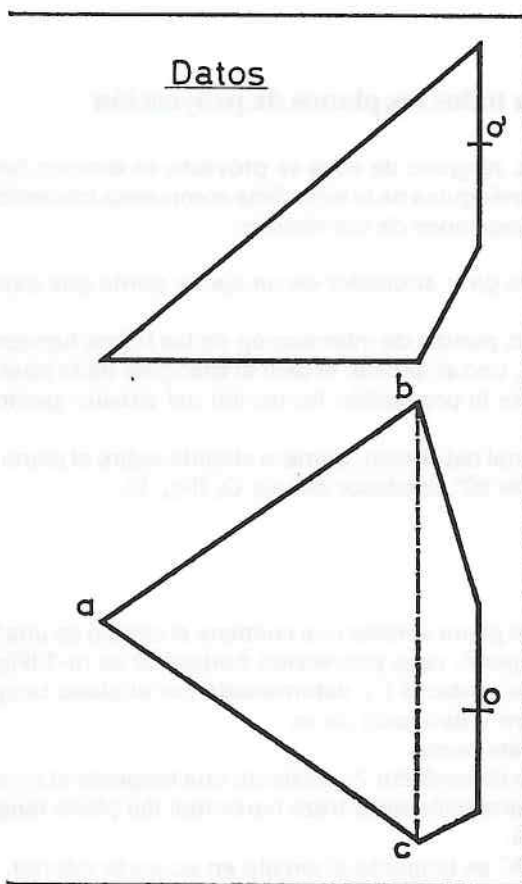


Fig. 9.

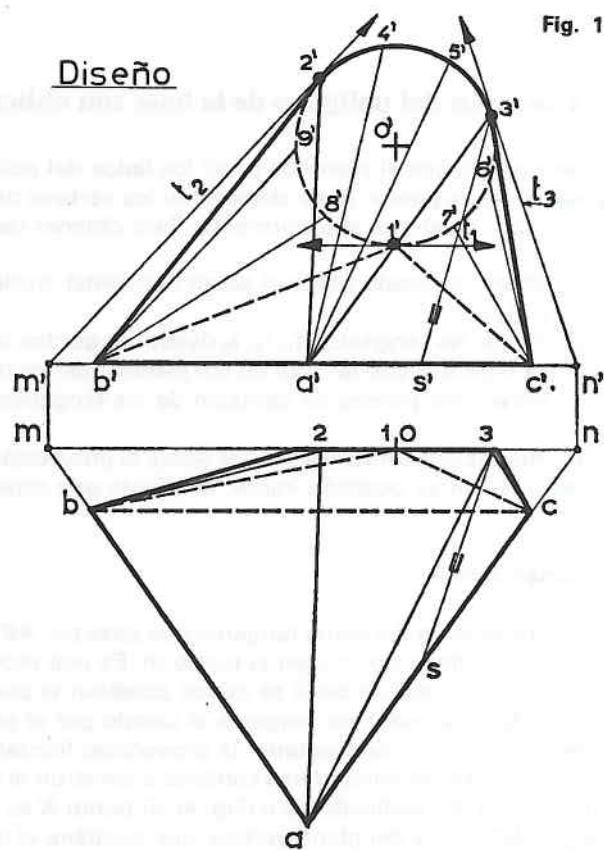


Fig. 11.

Fig. 10.

La superficie se compone de:

- a) 3 triángulos: A-2-B; B-1-C; C-3-A.
- b) 3 trozos de conos oblicuos de base circular:
2-A-3; 3-C-1; 1-B-2.

El diseño de la unión precedente puede establecerse según las dos figuras 7 (proyección horizontal) y 8 (proyección de perfil).

También se puede, de acuerdo con los datos de la figura 9, construir el diseño disponiendo las proyecciones como en las figuras 10 (proyección horizontal) y 11 (proyección frontal).

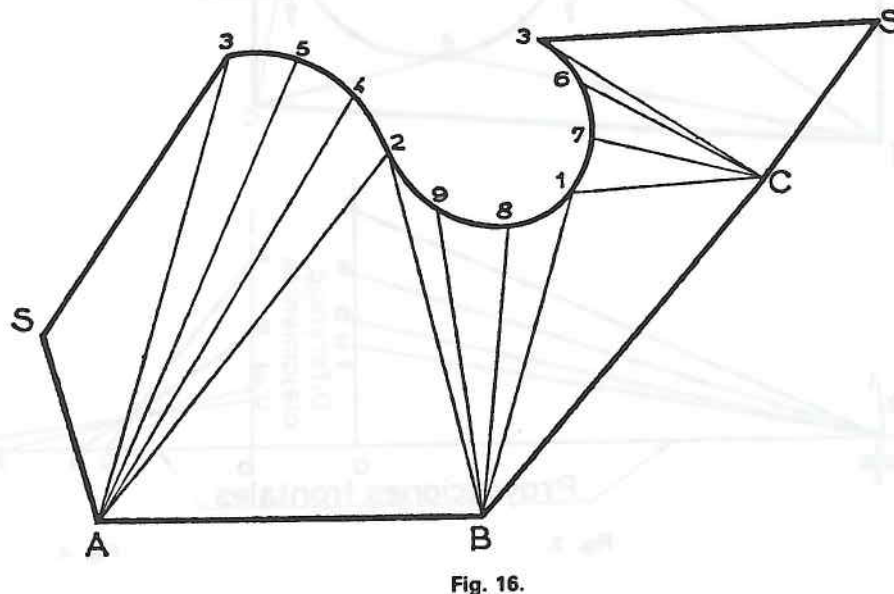
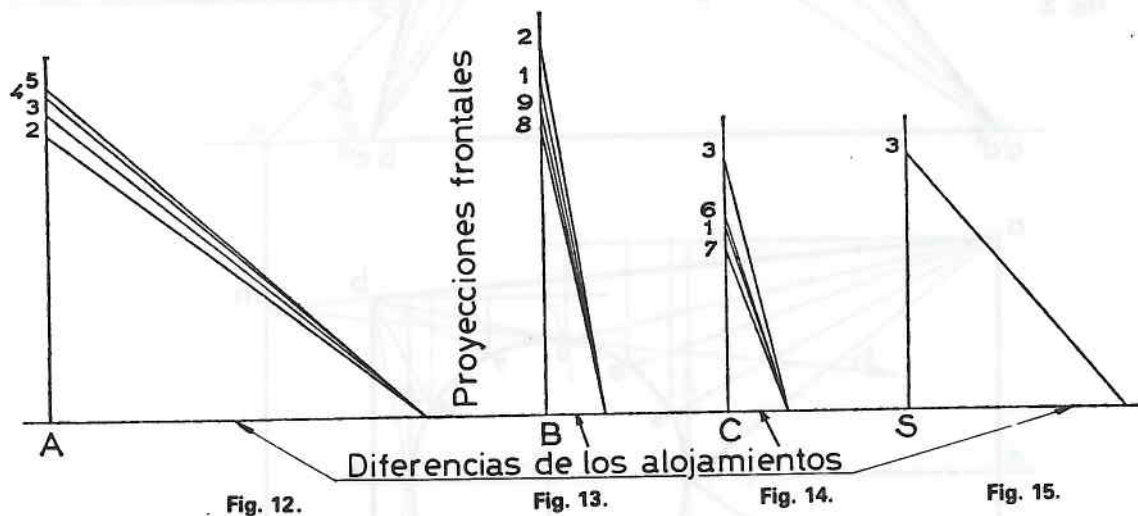
El plano tangente al círculo, y que pasa por el lado BC , determina una tangente t_1 horizontal (Fig. 11), cuyo punto de contacto $1'$ es el tercer vértice del triángulo $B-C-1$.

El punto m' (Fig. 11), deducido de m (Fig. 10) y origen de la tangente t_2 , y el punto n' (Fig. 11), deducido de n (Fig. 10) y origen de la tangente t_3 , son las proyecciones frontales de los puntos M y N , intersecciones de las trazas de los planos que contienen las dos bases y de los planos tangentes que pasan, uno por AB y el otro por AC . Estas tangentes determinan los otros dos vértices 2 y 3 de los triángulos.

Las figuras 12, 13 y 14 dan las verdaderas magnitudes reales de las generatrices de los trozos de cono oblicuo de base circular.

La figura 15 da la verdadera magnitud de la línea de unión S_3 .

Durante la construcción del desarrollo (Fig. 16), comprobar y corregir, si es necesario, las longitudes de las transformadas de cada trozo cónico.



Desarrollo (trazado interior)

Fig. 2.

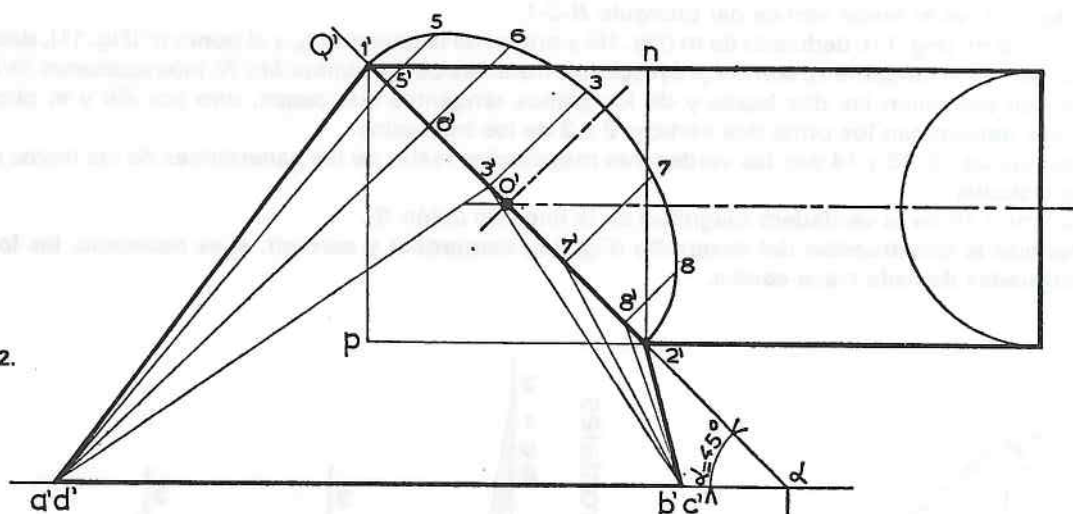


Fig. 1.

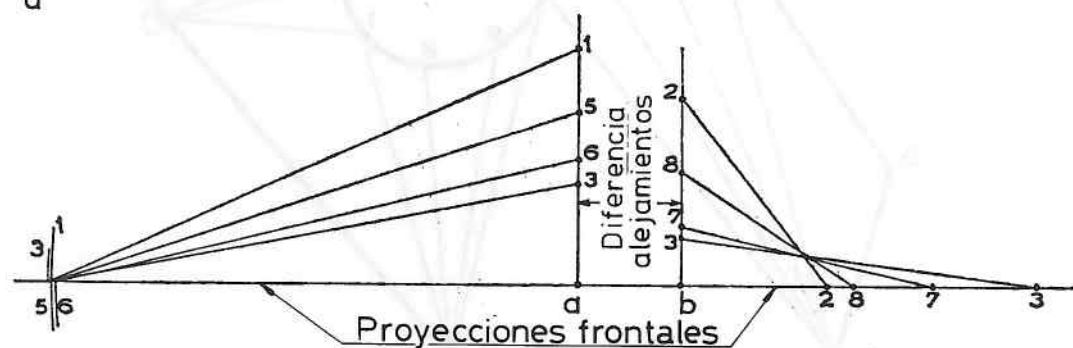
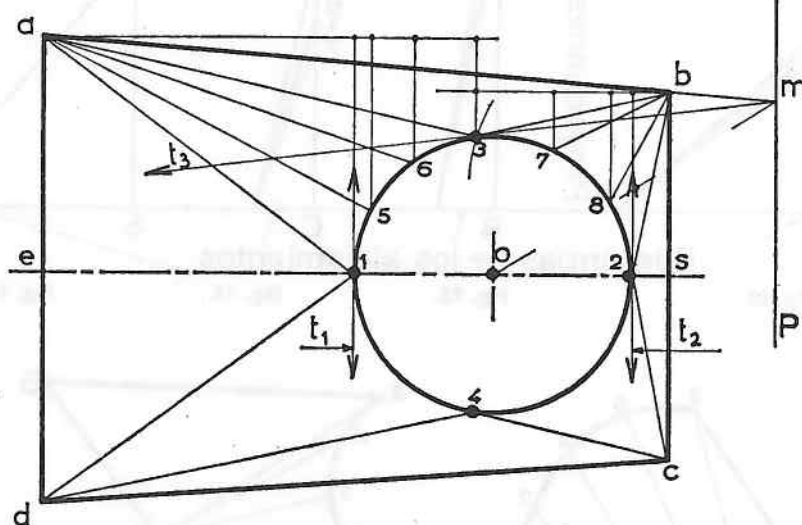


Fig. 3.

Fig. 4.

IV. CASO PARTICULAR: UNION DE UN POLIGONO CON UNA ELIPSE QUE SE PROYECTA EN UN CIRCULO

Ejemplo: Pieza de dos elementos: un cilindro de revolución y una superficie compuesta (Figs. 1 y 2)

LA SUPERFICIE COMPUESTA UNE UN TRAPECIO ISOSCELES CON UNA ELIPSE

Si el ángulo $\alpha = 45^\circ$ (Fig. 2). La elipse se proyecta en escorzo parcial sobre el plano horizontal según un círculo. En efecto, la proyección $1'-2'$ de la intersección de los dos elementos es la diagonal de un cuadrado $1'n2'p$, que tiene por lado el diámetro del cilindro. El eje mayor de la elipse se proyecta horizontalmente en un lado de este cuadrado, y el eje menor, proyectado en verdadera magnitud (es horizontal), es igual al diámetro del cilindro.

En ese caso, no presenta ningún interés abatir la elipse sobre el plano horizontal, porque es más fácil trazar una tangente a un círculo que a una elipse; además, la construcción de la elipse, obtenida por puntos, no es nunca rigurosamente exacta.

CONSTRUCCION DEL DISEÑO

Las dos tangentes t_1 y t_2 dan los vértices 1 y 2 de dos triángulos de la superficie compuesta. La tangente t_3 da el vértice 3 de otro triángulo.

Es suficiente la mitad de la vista horizontal, puesto que la pieza tiene un plano de simetría frontal.

Para desarrollar los trozos de cono oblicuo de base elíptica de vértice A (y D) y de vértice B (y C), es preciso:

- construir unas generatrices en estos conos y encontrar sus verdaderas magnitudes;
- conocer las verdaderas magnitudes de los arcos de elipse que separan cada dos generatrices consecutivas; es preciso, pues, buscar la verdadera magnitud de la elipse.

Búsqueda de la verdadera magnitud de la elipse y de las verdaderas magnitudes de las generatrices de los conos

Para construir las generatrices de los conos se puede, ya dividir el arco de elipse correspondiente a cada cono en partes iguales, lo que obliga a trazar en primer lugar la elipse, y a comenzar por el trazado de las proyecciones horizontales y frontales de las generatrices, dividiendo en partes iguales los arcos de círculo que corresponden a cada cono. Se construye después la elipse por abatimiento sobre el plano frontal, utilizando los alejamientos de cada punto de división; es el método aplicado en las figuras 1 y 2. Los arcos de elipse no son iguales entre sí para cada cono, pero los puntos de división que provienen de la construcción de la elipse se determinan con más precisión.

Las figuras 3 y 4 dan las verdaderas magnitudes de las generatrices por el sistema de «dibujo aparte», simplificación de un cambio de plano horizontal.

La figura 5 da el desarrollo de la superficie compuesta.
 No olvidarse de comprobar y corregir, si es necesario, las transformadas de cada trozo de cono.

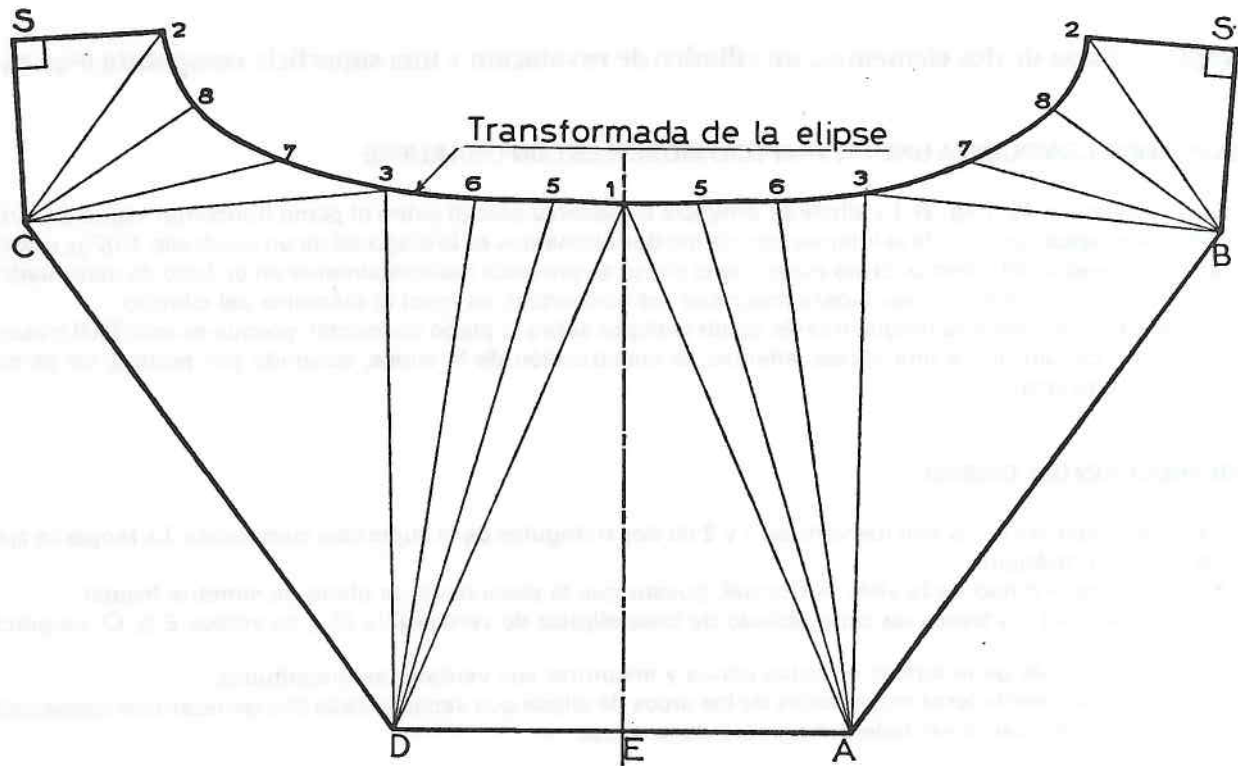


Fig. 5.

4

Las superficies desarrollables cualesquiera

DEFINICION

Se ha visto en el capítulo precedente, que las superficies llamadas compuestas están constituidas por elementos de superficies geométricas. Existen otras *superficies desarrollables* que, no estando compuestas de elementos de superficies geométricas, se llaman **desarrollables cualesquiera**.

Las superficies desarrollables cualesquiera son superficies que unen dos orificios que, si están situados en planos paralelos, no se componen de curvas semejantes, o, si las curvas son semejantes, están situados en planos no paralelos (ver excepciones: cilindros oblicuos y conos oblicuos de secciones antiparalelas, tomo I).

Estas superficies son *regladas* y, condición esencial para ser desarrollables, cumplen la regla que se ha dado en el capítulo 1, es decir, que toda recta (*generatriz*) de esta superficies está *contenida en un plano tangente a las dos bases*.

Generación de la superficie

Las generatrices de las superficies desarrollables se determinan de la misma manera que las de las superficies compuestas: considerando un plano que rueda sobre las dos bases.

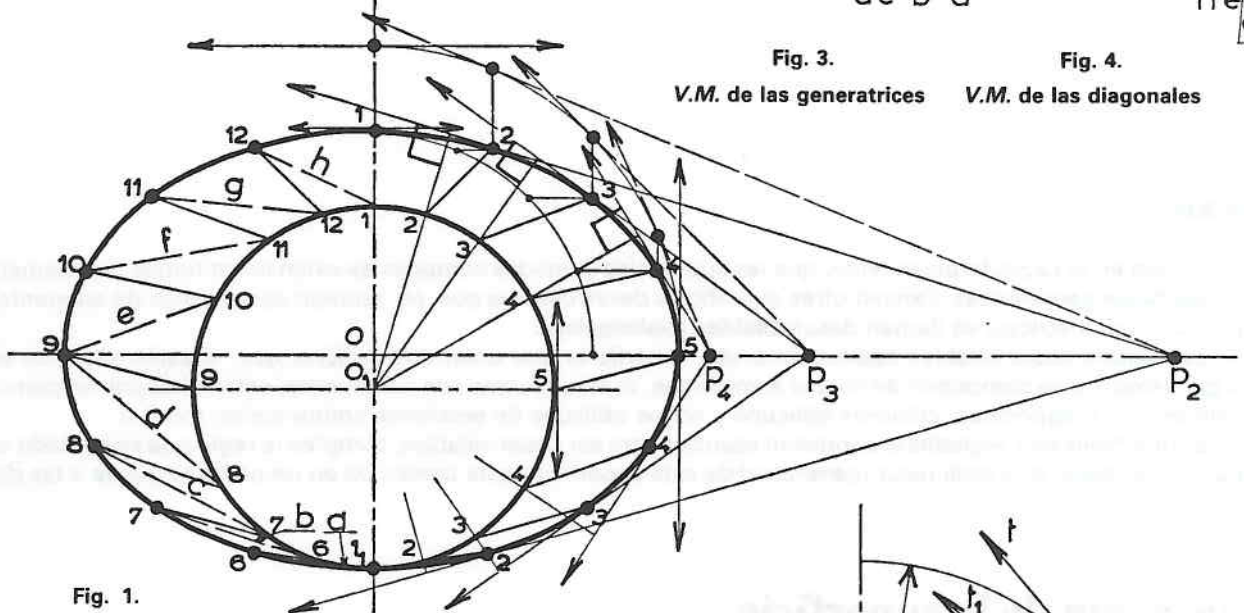
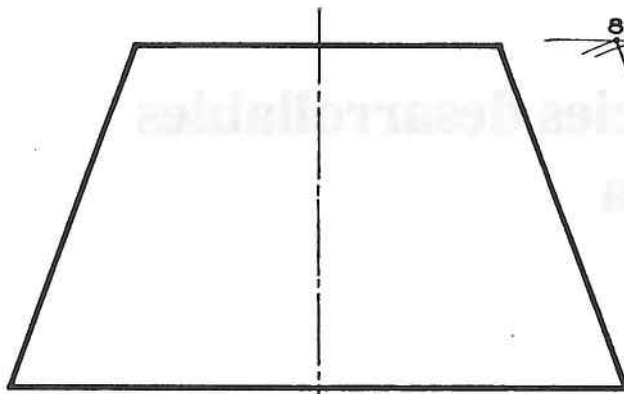


Fig. 1.

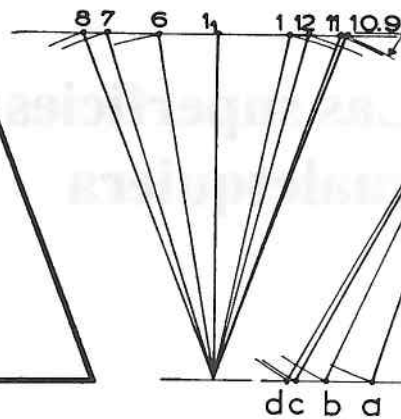


Fig. 3.

V.M. de las generatrices

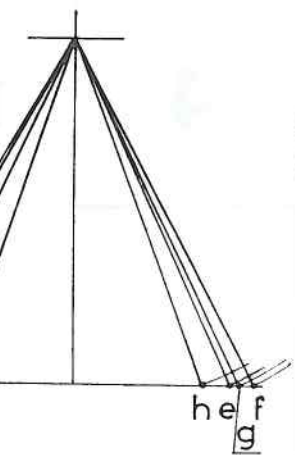


Fig. 4.

V.M. de las diagonales

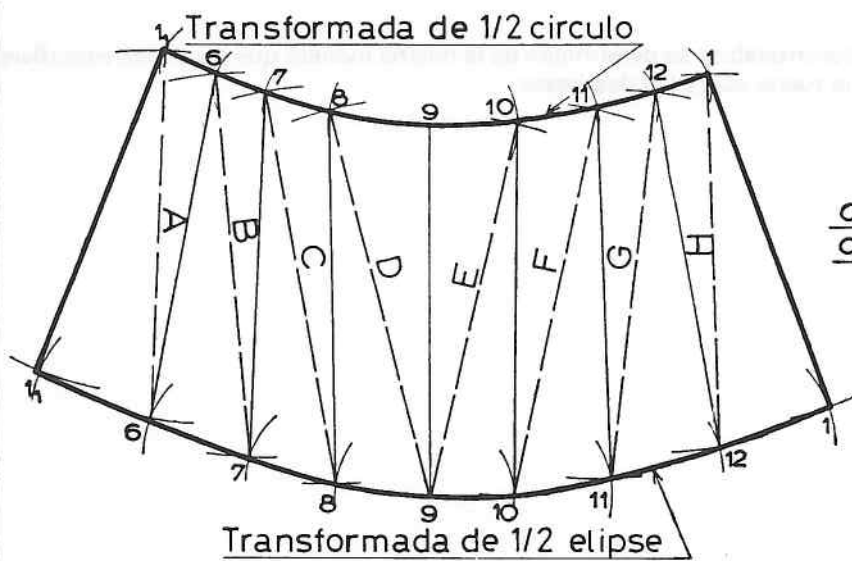


Fig. 5.

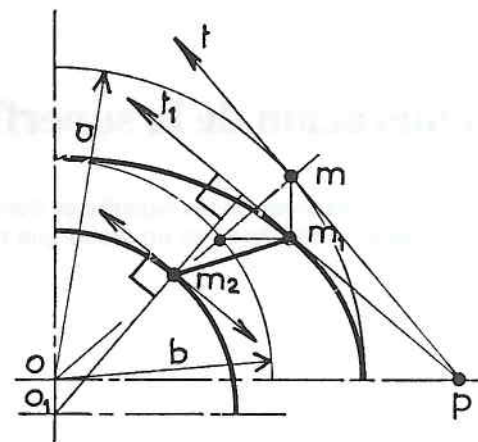


Fig. 2.

I. Las dos bases a unir están situadas en planos paralelos

La intersección del plano generador de la superficie con uno de los planos que contiene una base es una tangente a la base. Como las dos bases son paralelas entre sí, las tangentes determinadas por una cierta posición del plano tangente lo son también. El segmento de recta que une dos puntos de contacto es una *generatriz* de la superficie.

UNION DE UN ORIFICIO ELIPTICO CON UN ORIFICIO CIRCULAR

DISEÑO (Fig. 1)

Se podría empezar el diseño dividiendo ya el círculo, ya la elipse en partes iguales, y trazando después las tangentes. La exactitud del trazado depende, en los dos casos, de la precisión con la que se haya trazado la elipse. Es preferible hacer pasar las tangentes por puntos de la elipse determinados geoméricamente. Se trazarán estas tangentes aplicando la propiedad geométrica siguiente: *si se describe un círculo que tenga por diámetro el eje mayor de la elipse, la tangente en un punto de este círculo y la tangente en el punto de la elipse situados en la misma perpendicular al eje mayor, se cortan en un punto situado sobre la prolongación del eje mayor.*

Para trazar la elipse se emplea, pues, el método de los círculos que tienen por radio a y b .

EJEMPLO (Fig. 2). Al punto m del círculo corresponde el punto m_1 de la elipse. La tangente al círculo tp da el punto p , que permite trazar la tangente pt_1 al punto m_1 de la elipse.

Para obtener el punto m_2 , punto de tangencia al círculo de una paralela a pt_1 , basta trazar por o_1 una perpendicular a pt_1 .

OBSERVACION. Por este procedimiento, ni las divisiones de la elipse, ni las divisiones del círculo son iguales; pero las tangentes, trazadas antes que la elipse, ayudan a la construcción de ésta.

DESARROLLO

No siendo la superficie obtenida ni cónica ni cilíndrica, las generatrices no son ni paralelas entre sí, ni concurrentes en un mismo punto, y es preciso emplear la *triangulación* (ver las observaciones hechas sobre la triangulación en el tomo I, página 123).

Comprobar las transformadas de las bases inmediatamente después de la construcción de cada uno de sus trozos (un cuarto de desarrollo aproximadamente).

Reproducir el semidesarrollo (Fig. 5), pero invertido, si se quiere que el trazado sea enteramente por el interior.

Para confeccionar la pieza, curvar por las generatrices.

Fig. 1.

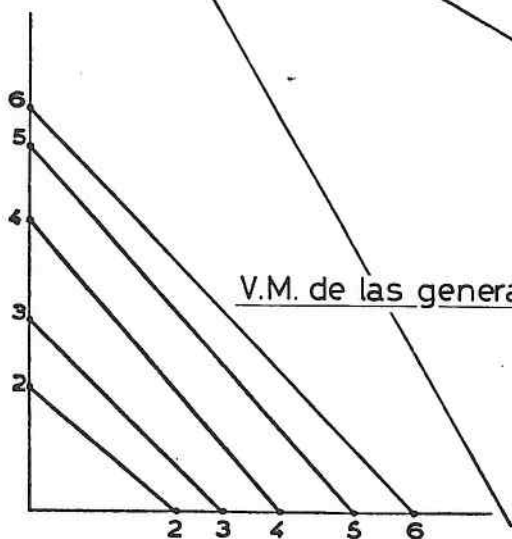
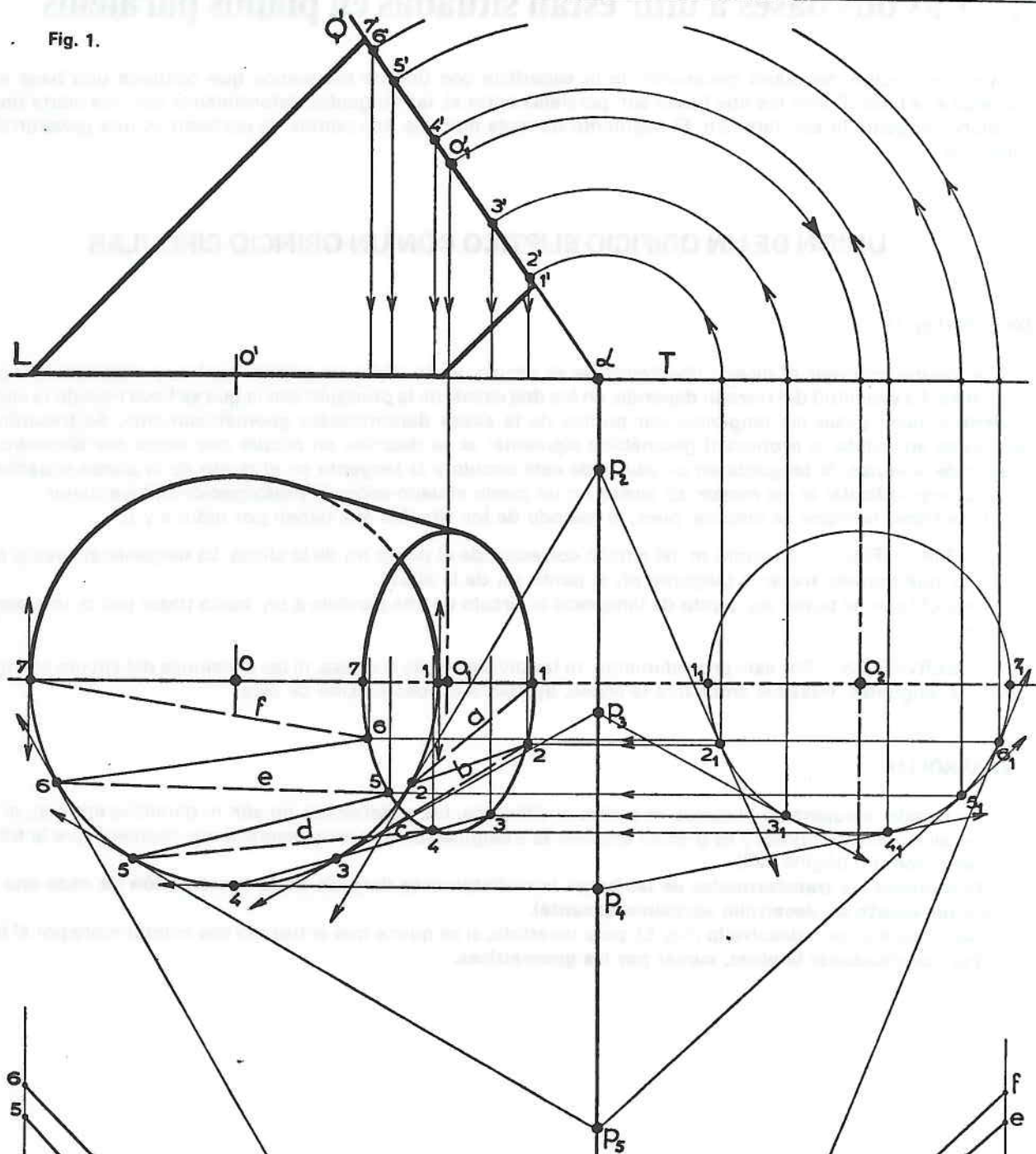


Fig. 2.

V.M. de las generatrices

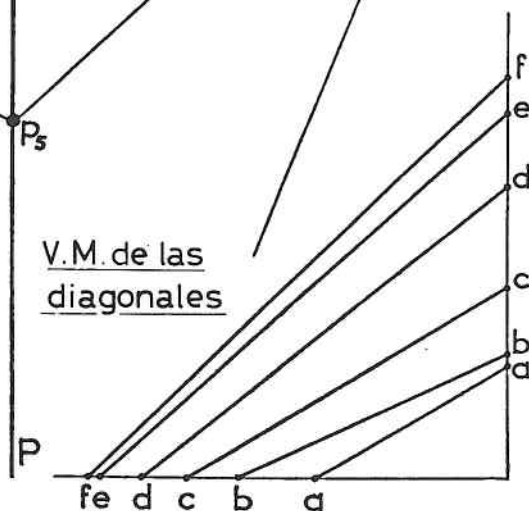


Fig. 3.

V.M. de las diagonales

II. Las dos bases a unir están situadas en planos concurrentes

A. UNION DE DOS ORIFICIOS CIRCULARES

Comprobar primeramente que el sólido no es un cilindro o un tronco de cono de *secciones antiparalelas* (ver tomo I, páginas 111 y 105).

Si la superficie lateral del sólido es una superficie desarrollable cualquiera, proceder como en el caso de una superficie compuesta: abatir el círculo de canto sobre el plano horizontal.

DISEÑO

Para dar más claridad a la proyección horizontal se puede abatir el círculo de canto como en la figura 1 (1).

Dividir el círculo horizontal en partes iguales. Trazar por los puntos de división tangentes al círculo, que representen las trazas horizontales de los planos tangentes; prolongarlas hasta su intersección con la traza $P\alpha$ (puntos p_2, p_3, p_4, p_5, p_6). Las tangentes en los puntos 1 y 7 son paralelas a la traza $P\alpha$.

Desde los puntos p_1, p_2 , etc. trazar las tangentes al círculo de centro o_2 (trazas del plano tangente con el plano de canto, abatidas sobre el plano horizontal).

Subir los puntos $2_1, 3_1$, etc., al círculo de canto en $2', 3'$, etc. Hacer la proyección horizontal de estos puntos: encuentro de una perpendicular a LT salida de la proyección frontal y de una paralela a LT salida del abatimiento. Uniendo los puntos 1, 2, etc., se obtiene la proyección horizontal del círculo de canto.

Trazar las proyecciones horizontales de las generatrices y de las diagonales (2). Buscar las verdaderas magnitudes (Figs. 2 y 3).

DESARROLLO (Fig. 4)

Observar atentamente el sentido de las diagonales. Numerar cada generatriz y cada diagonal inmediatamente después de su construcción. **Comprobar cada transformada a lo largo de la construcción.**

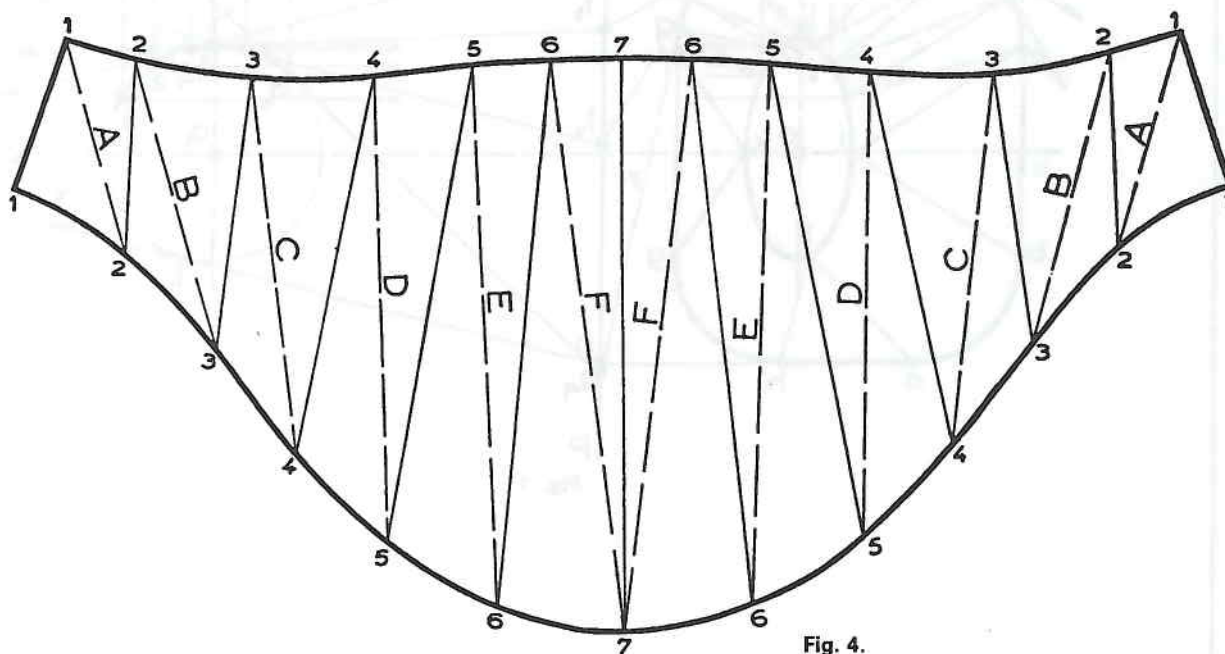


Fig. 4.

(1) Esta construcción se aplica también a las superficies compuestas.

(2) En la figura 1, la diagonal C, que une el punto 4 del círculo horizontal con el punto 3 del círculo de canto, se confunde con las generatrices 4 y 3.

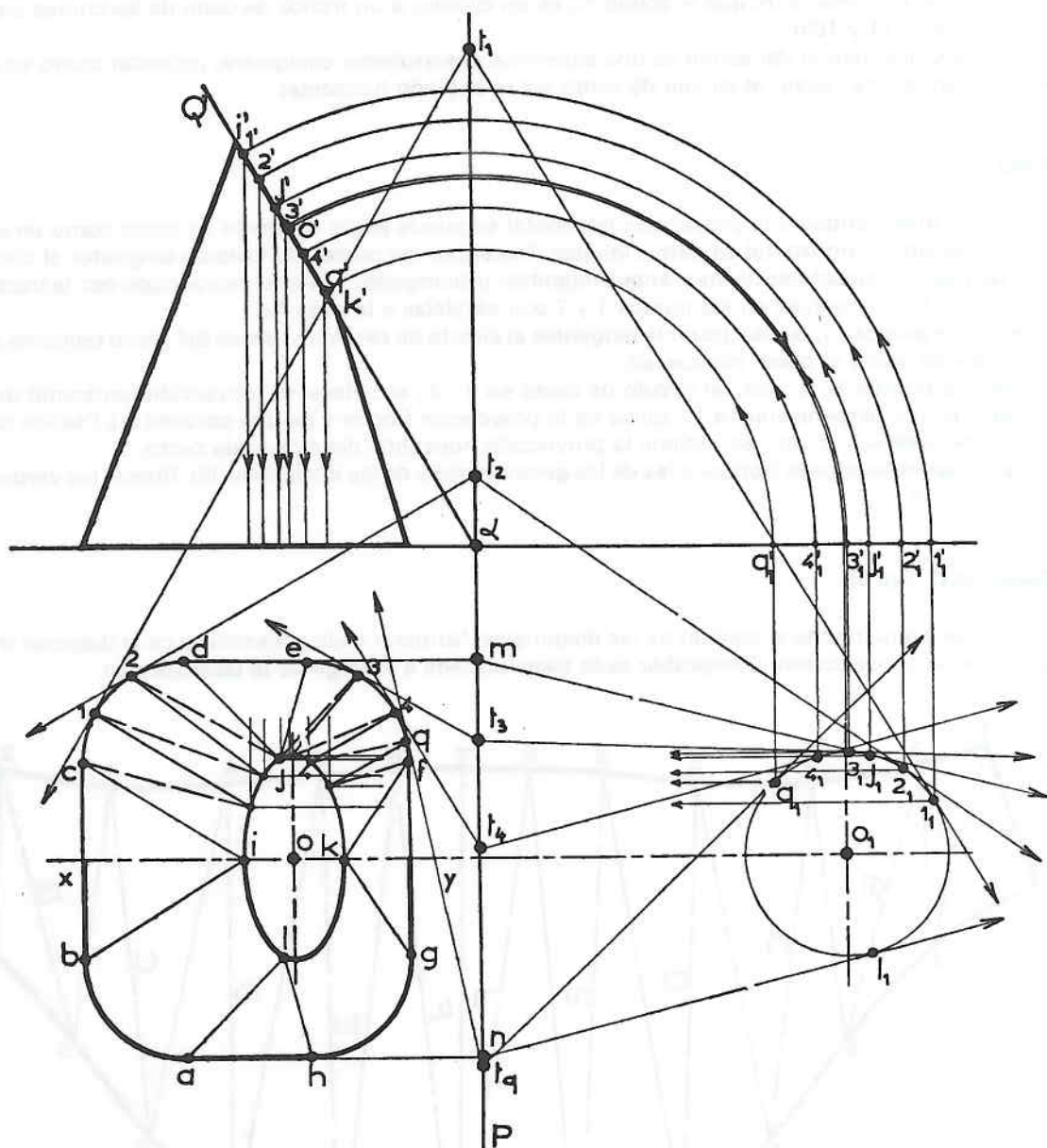


Fig. 1.

B. UNION DE UN ORIFICIO RECTANGULAR DE ANGULOS REDONDEADOS CON UN ORIFICIO CIRCULAR

La superficie se compone de cuatro superficies planas triangulares y cuatro trozos de superficies *desarrollables cualesquiera*.

DISEÑO

1.º Determinación de las superficies planas.

Abatir el círculo sobre el plano del rectángulo, haciéndolo girar alrededor de la traza $P\alpha$ (Fig. 1). Prolongar de hasta su encuentro con $p\alpha$ en m : proyección horizontal del punto de intersección del plano tangente a las dos bases con la traza $P\alpha$. Desde m , trazar la tangente al círculo abatido. Llevar el punto de tangencia J_1 a J'_1 , después J' y J . dje es la proyección horizontal de un triángulo.

El vértice l del triángulo alh es simétrico de j' , puede obtenerse mediante la misma construcción. Siendo bc y fg paralelas a $P\alpha$, las intersecciones de los planos que pasan por estos segmentos de recta y tangentes al círculo, con el plano que contiene el círculo, son paralelas a $P\alpha$ y determinan los vértices i y k de los triángulos cib y $fk g$.

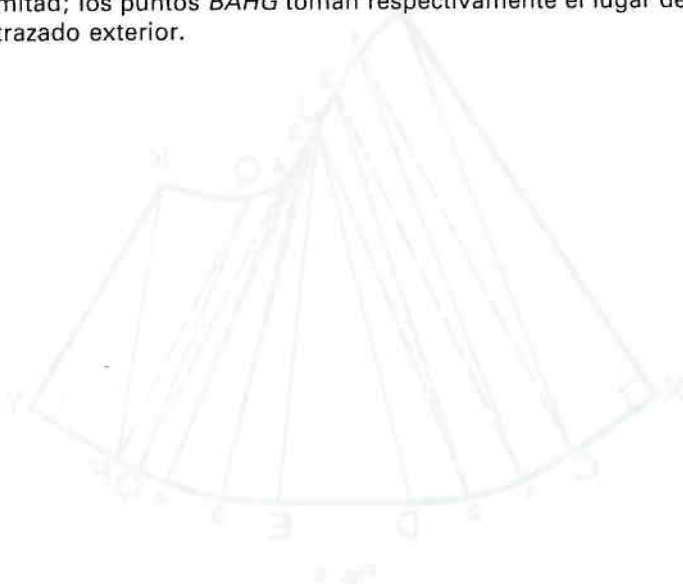
2.º Determinación de las generatrices de las desarrollables cualesquiera.

Dividir los arcos cd y ef en partes iguales (se ha tomado un punto suplementario, q). Por cada punto de división trazar una tangente, que corta a $P\alpha$ o su prolongación en t_1, t_2, t_3, t_4, tq , que son los puntos de origen de las tangentes al círculo. Estas determinan los puntos $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, q_1$, cuyas proyecciones frontales son $1'_1, 2'_1, \dots, q'_1$. Llevar al círculo a su posición primitiva para obtener las proyecciones frontales y horizontales de todos estos puntos. Trazar las proyecciones horizontales de las generatrices y, a continuación, de las diagonales.

DESARROLLO

No ofrece nada de particular. Buscar las verdaderas magnitudes de las generatrices (Fig. 2 y 4) y de las diagonales (Fig. 3 y 5). Observar que los arcos de la base horizontal son iguales entre cada generatriz (la generatriz suplementaria q está justificada por la magnitud del arco $4k$), mientras que los del círculo son desiguales y proyectados en verdadera magnitud en el abatimiento.

La figura 6 da el semidesarrollo $XCDEFY$, que se curvará, siendo el trazado interior. Reproducir un elemento para obtener la otra mitad; los puntos $BAHG$ toman respectivamente el lugar de los puntos $CDEF$. Se curvará este elemento, siendo el trazado exterior.



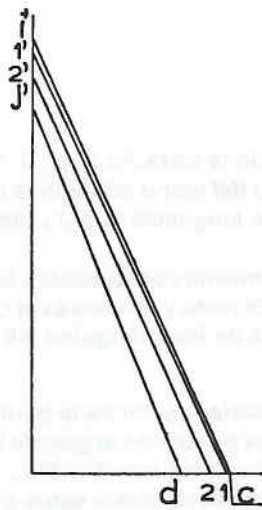


Fig. 2.

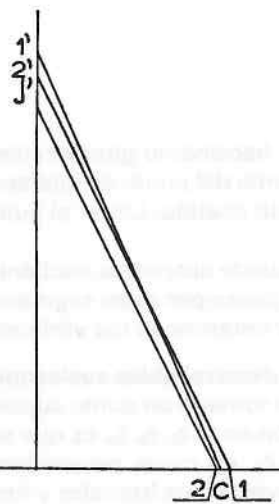


Fig. 3.

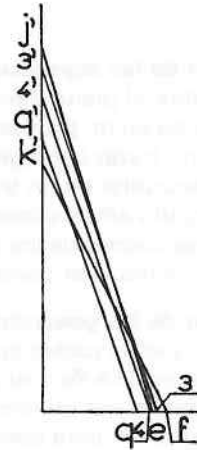


Fig. 4.

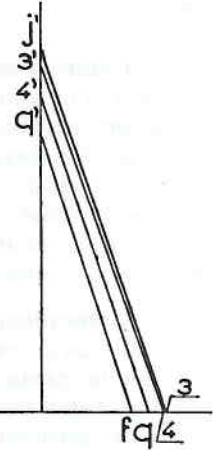


Fig. 5.

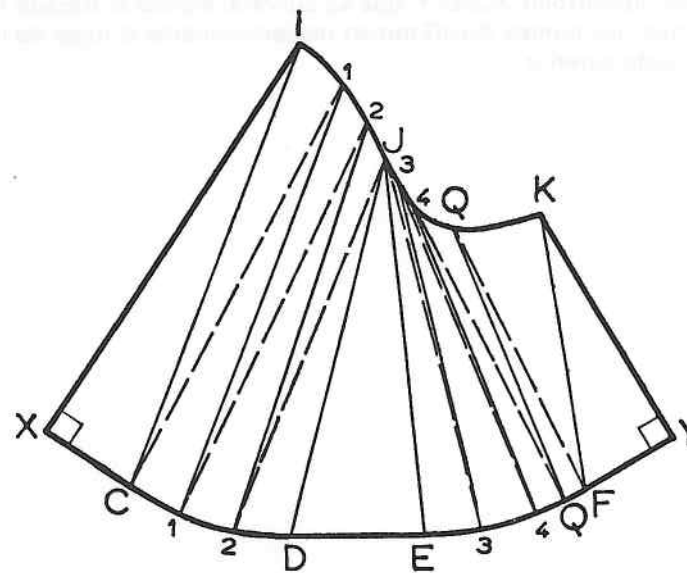


Fig. 6.

Construcción para determinar el punto de tangencia al círculo abatido, cuando el punto de origen de la tangente está situado fuera del diseño.

Sea MN el límite del diagrama (Fig. 7) y m un punto de división del círculo R .

Trazar la tangente en m . Trazar a_1b_1 paralela a ab , de manera que (por ejemplo) $\frac{a_1b_1}{ab} = \frac{1}{2}$. En a_1b_1 tomar o_3 de manera que: $\frac{o_3b_1}{o_1b} = \frac{1}{2}$. Con centro en o_3 , trazar un círculo de radio $r_3 = \frac{R_1}{2}$. La tangente común a los dos círculos de centro o_1 y o_3 da el punto buscado m_1 .

Justificación. Si $\frac{a_1b_1}{ab} = \frac{1}{2}$ se tiene también $\frac{b_1t_m}{bt_m} = \frac{1}{2} = K$, relación de homotecia, siendo t_m el centro de homotecia. La tangente $t_m m_1$ es tangente a dos círculos homotéticos de radio R_1 y r_3 , de igual manera que $t_m a_1$ es tangente a los dos círculos homotéticos R y r_2 , si $o_2b_1 = \frac{ob}{2}$.

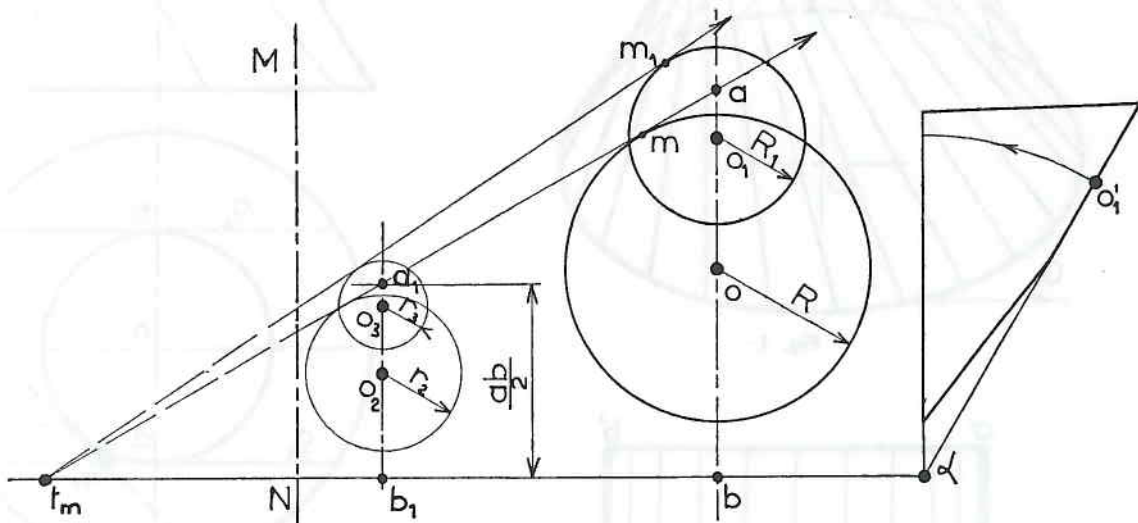


Fig. 7.

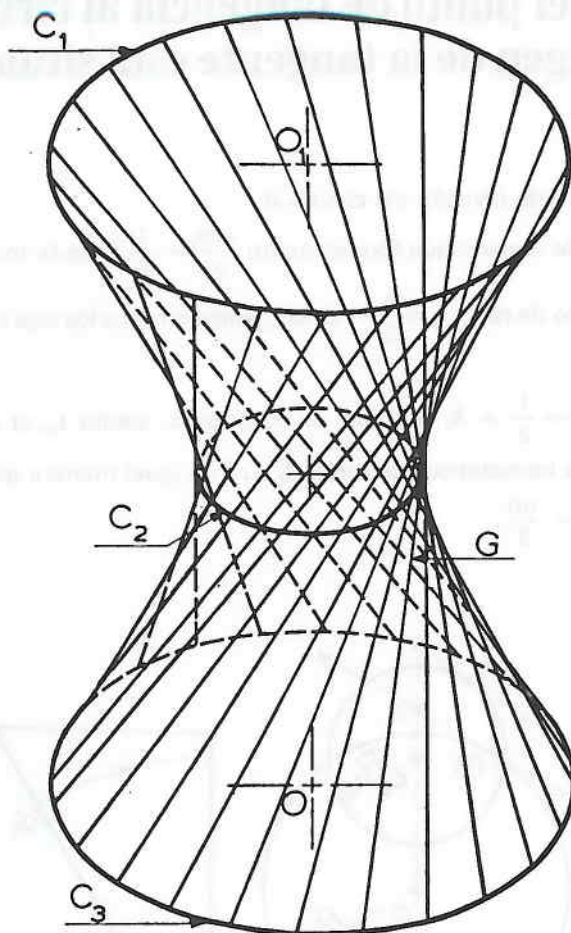


Fig. 1.

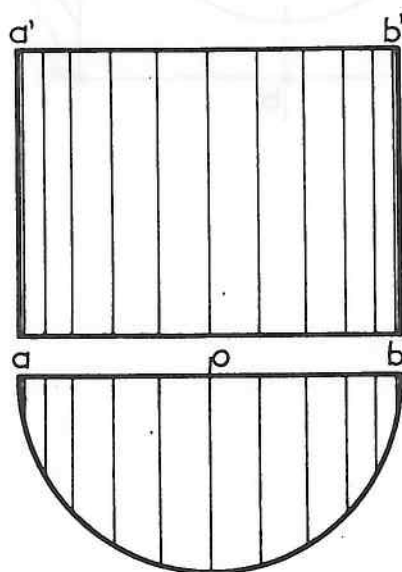


Fig. 4.

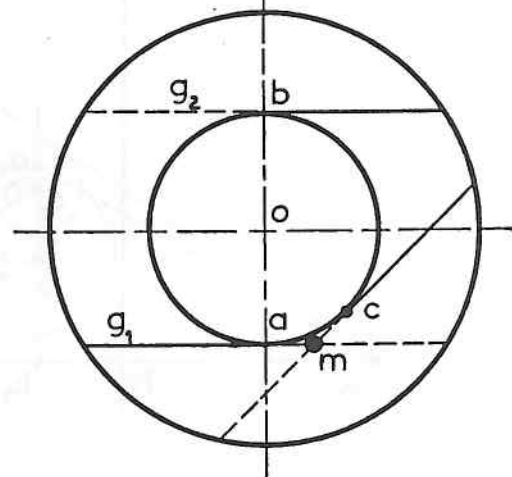
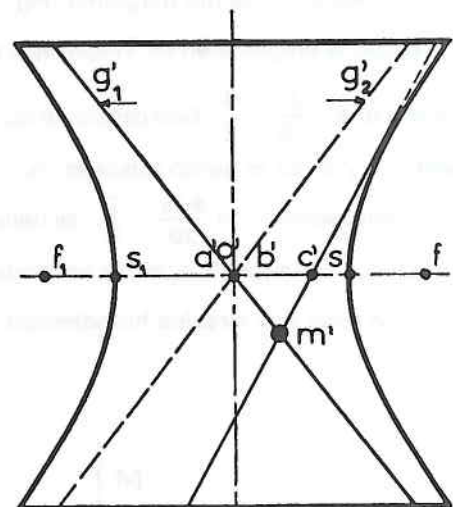


Fig. 2.

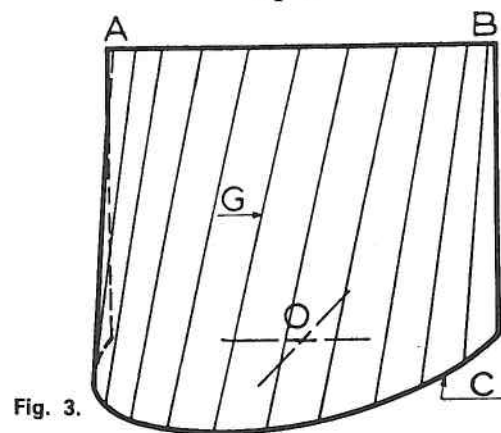


Fig. 3.

Superficies regladas y superficies desarrollables

Después del estudio de las superficies compuestas y de las superficies desarrollables cualesquiera, se puede dar la definición general siguiente de las superficies desarrollables.

UNA SUPERFICIE ES DESARROLLABLE

- 1.º cuando se compone de **superficies planas**;
- 2.º cuando está engendrada por un **plano tangente a las dos bases** del sólido, del cual constituye su superficie lateral.

Todas las superficies desarrollables son superficies **regladas**, pero todas las superficies regladas no son desarrollables.

EJEMPLOS. I. El hiperboloide de revolución de una capa (Fig. 1), obtenido haciendo girar una hipérbola alrededor de su eje ilimitado, es una superficie *reglada* pero no es una superficie *desarrollable*.

Se puede también definir esta superficie como engendrada por una recta G , que se desplaza sobre tres círculos $C_1C_2C_3$ situados en planos paralelos, tales que los dos extremos C_1 y C_3 sean iguales, simétricos respecto a C_2 y de radio mayor. C_2 , el círculo más pequeño, se llama círculo de garganta. El ángulo formado por la generatriz y los planos que contienen los círculos es constante e igual al ángulo formado por las *asíntotas* con estos mismos planos.

OBSERVACION. El hiperboloide de revolución está engendrado ya por una generatriz G_1 , ya por una generatriz G_2 (Fig. 2), cuyas proyecciones frontales se confunden con las de las asíntotas, cuando éstas son frontales. De ello se deduce que por un punto cualquiera M del hiperboloide pasa una generatriz de cada sistema G_1 y G_2 .

II. Un conoide es una superficie engendrada por una recta que se desplaza paralelamente a un plano fijo (*plano director*), apoyándose constantemente sobre dos directrices, una de las cuales es rectilínea.

Así, la figura 4 representa las proyecciones de un conoide (Fig. 3), engendrado por una recta G que se desplaza paralelamente a un plano de perfil, apoyándose constantemente sobre una recta AB y sobre un semicírculo C .

Este conoide no es una pieza desarrollable; es una **pieza de forma** ejecutada ya por martilleo alargando ciertas partes, ya por caldeos de encogimiento disminuyendo ciertas dimensiones, ya por la combinación de los dos métodos. Este trabajo es largo y difícil, y necesita también la confección de una maqueta de control.

Si se quiere unir la recta y el semicírculo de la figura 4 mediante una *superficie desarrollable*, es preciso aplicar la teoría de los *planos tangentes*; se obtendrá entonces una *superficie compuesta* constituida por una superficie plana triangular y por dos trozos de cono oblicuo (Fig. 5). La ejecución de esta pieza es mucho más rápida que la de la anterior.

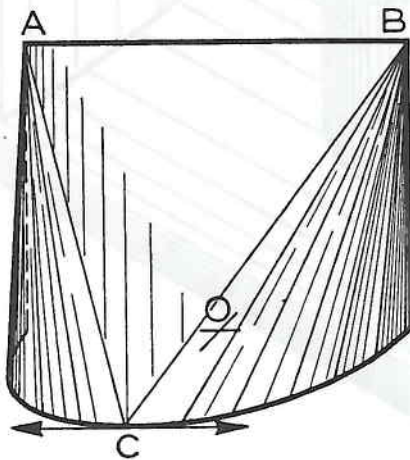
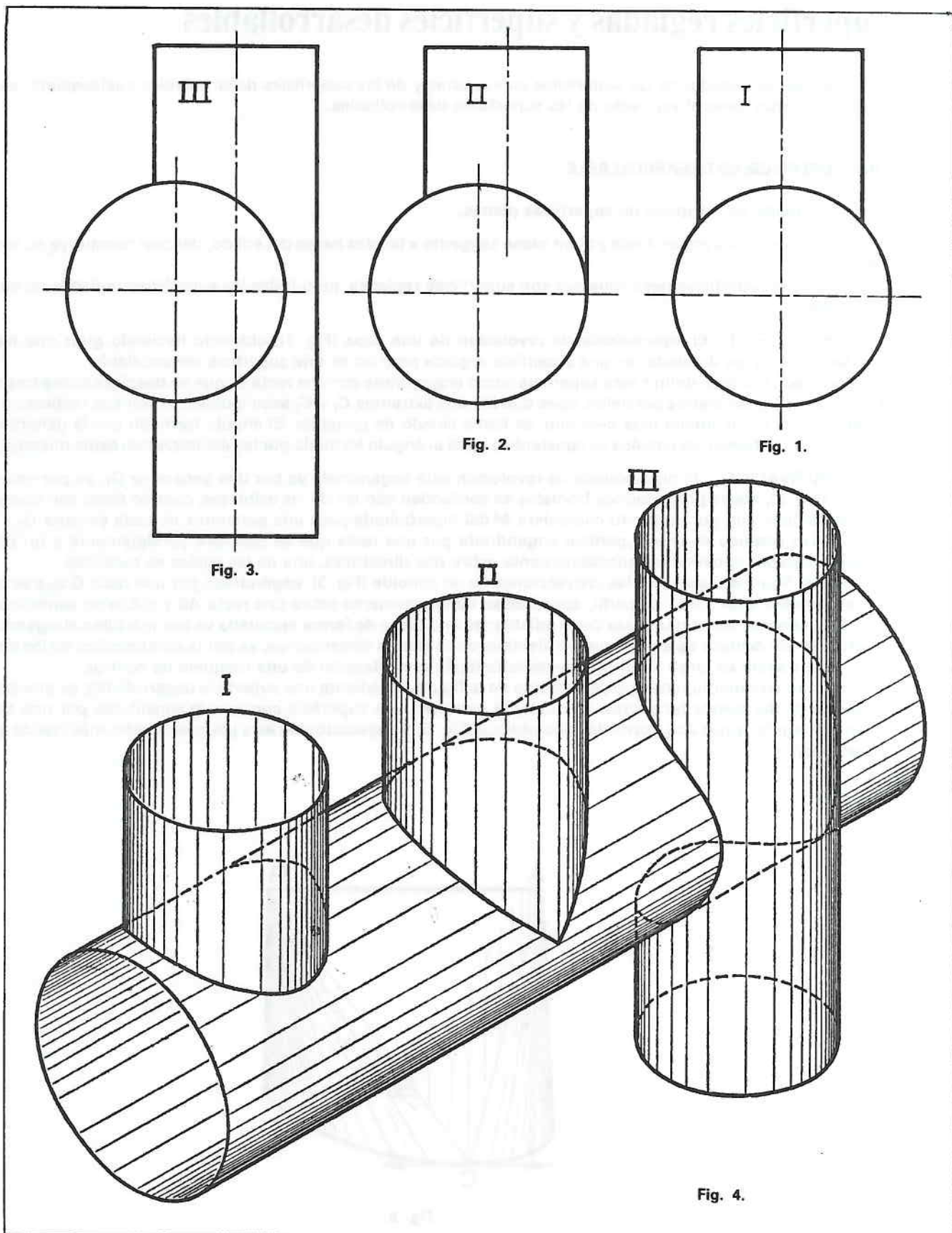


Fig. 5.



5

Las intersecciones

GENERALIDADES

Existen en calderería numerosas piezas que contienen varias superficies que se encuentran, se cortan entre sí. El lugar geométrico de los puntos donde se encuentran dos superficies forma una **línea de intersección** (plana o alabeada).

Cuando un sólido está cortado enteramente por otro, la línea de intersección se llama **penetración** (Fig. 1). Cuando los dos sólidos tienen un plano tangente común, la intersección determina una **penetración límite** (Fig. 2). Cuando ninguno de los sólidos de la intersección está cortado enteramente, la intersección es una **mordedura** (Fig. 3).

DETERMINACION DE LAS INTERSECCIONES

1.º METODO GENERAL

Para determinar la intersección de dos sólidos, se les corta mediante *planos auxiliares* con el fin de obtener en cada uno de ellos secciones planas fáciles de trazar (triángulos, rectángulos, círculos) (1). Estas secciones están limitadas mediante rectas o círculos, cuyos puntos de intersección pertenecen a la vez a las superficies de los dos sólidos a unir; estos puntos están, pues, situados en la intersección buscada (Figs. 5, 6, 7, 8, páginas siguientes).

2.º METODOS PARTICULARES

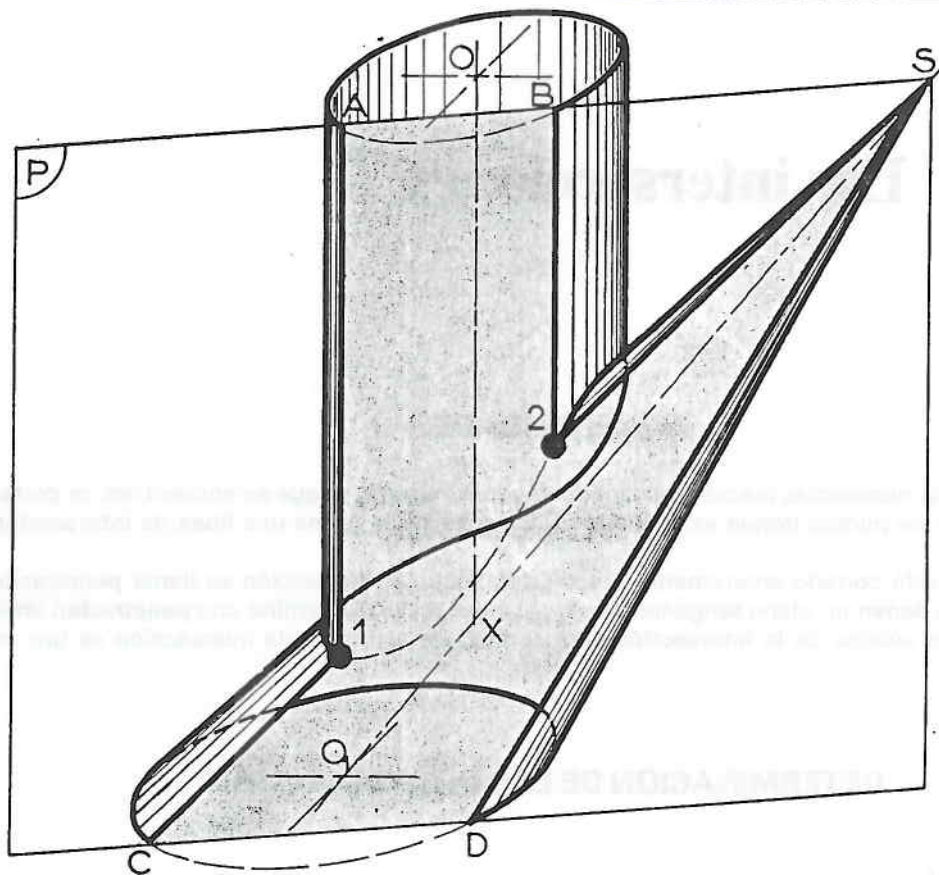
El método de los planos secantes, si éstos se eligen convenientemente, puede resolver todos los problemas de intersecciones. Sin embargo, en ciertos casos puede ser interesante utilizar el método de las **esferas auxiliares secantes**; pero este método se aplica solamente en ciertas condiciones (ver capítulo 10).

El método de las **esferas tangentes**, del que se ha visto una aplicación en el trazado de los codos cilíndricos y cónicos (tomo I), se puede emplear solamente en las intersecciones de cilindros y de conos de revolución, cuyos ejes sean concurrentes.

Con frecuencia, la curva de intersección se puede obtener mediante varios métodos. El trazador elegirá o bien el más sencillo, o bien el que proporcione con más precisión los puntos útiles para el desarrollo del sólido.

OBSERVACION. Desde el punto de vista pedagógico es interesante empezar por el estudio de las intersecciones más sencillas, que son también las que se presentan con más frecuencia en la industria; de ahí la progresión siguiente, que de todos modos no es inamovible.

(1) Es el método que se ha empleado en el tomo I, para obtener las proyecciones de las secciones planas del cono.



Método de los planos secantes que pasan por generatrices de los sólidos.

Fig. 5.

El plano P pasa por el vértice S del cono y por las generatrices A y B del cilindro, en el cual determina una *sección rectangular*.

El plano P determina una *sección triangular* SCD en el cono.

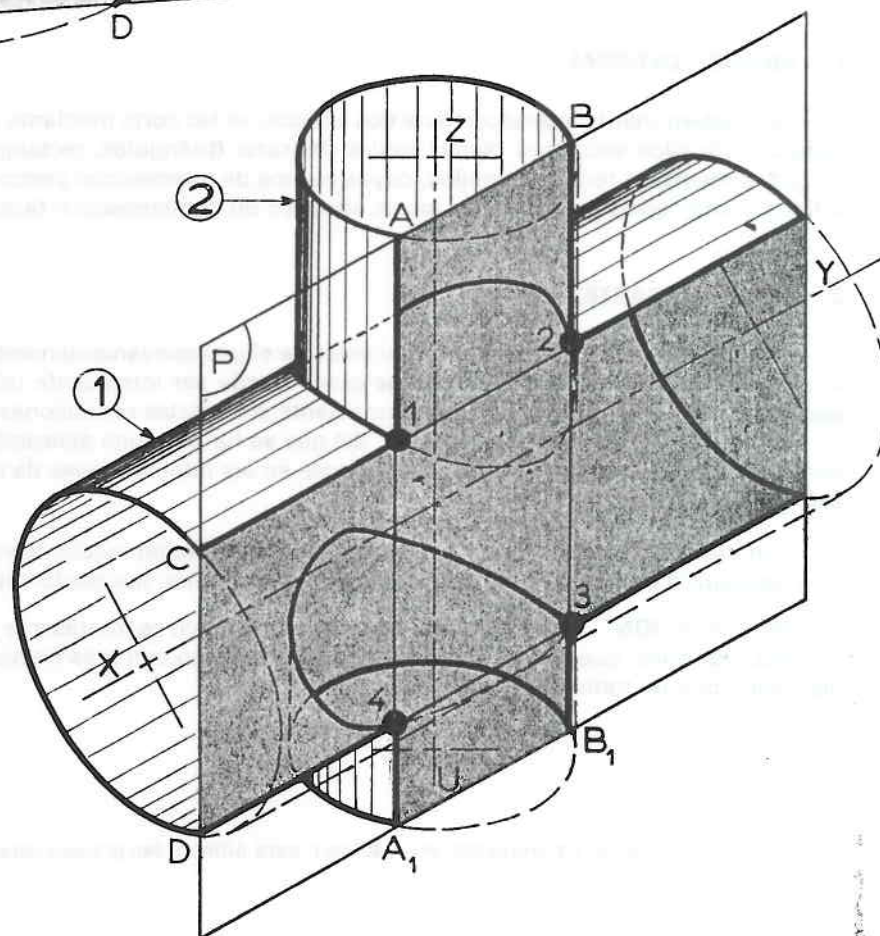
Las intersecciones de las generatrices A y B con la generatriz C dan dos puntos 1 y 2 de la curva de intersección.

Fig. 6.

El plano P es paralelo a XY y a ZU , y determina una *sección rectangular* en cada cilindro.

Las intersecciones de las generatrices C y D con la generatriz A dan dos puntos de intersección: 1 y 4.

Las intersecciones de las generatrices C y D con la generatriz B dan otros dos puntos; 2 y 3, de la intersección.



Método de los planos horizontales
(así llamado porque se supone que las bases o los ejes son horizontales)

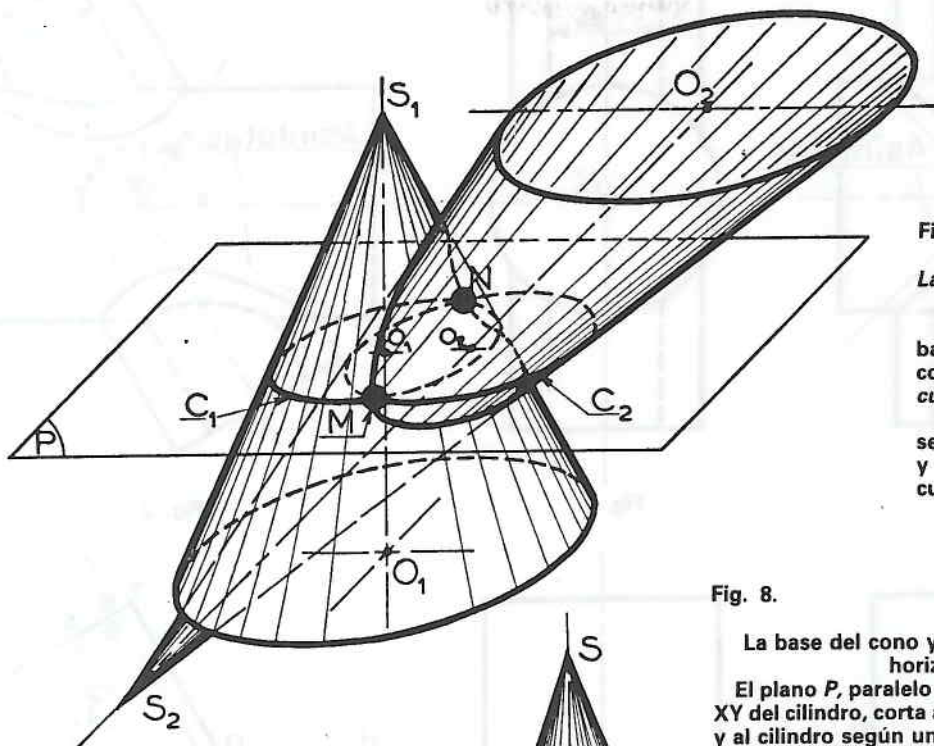


Fig. 7.

La base de cada sólido es horizontal.

El plano P , paralelo a las bases de los dos conos, corta a éstos según dos círculos C_1 y C_2 .

Los puntos M y N , intersecciones de los círculos C_1 y C_2 , son dos puntos de la curva de intersección.

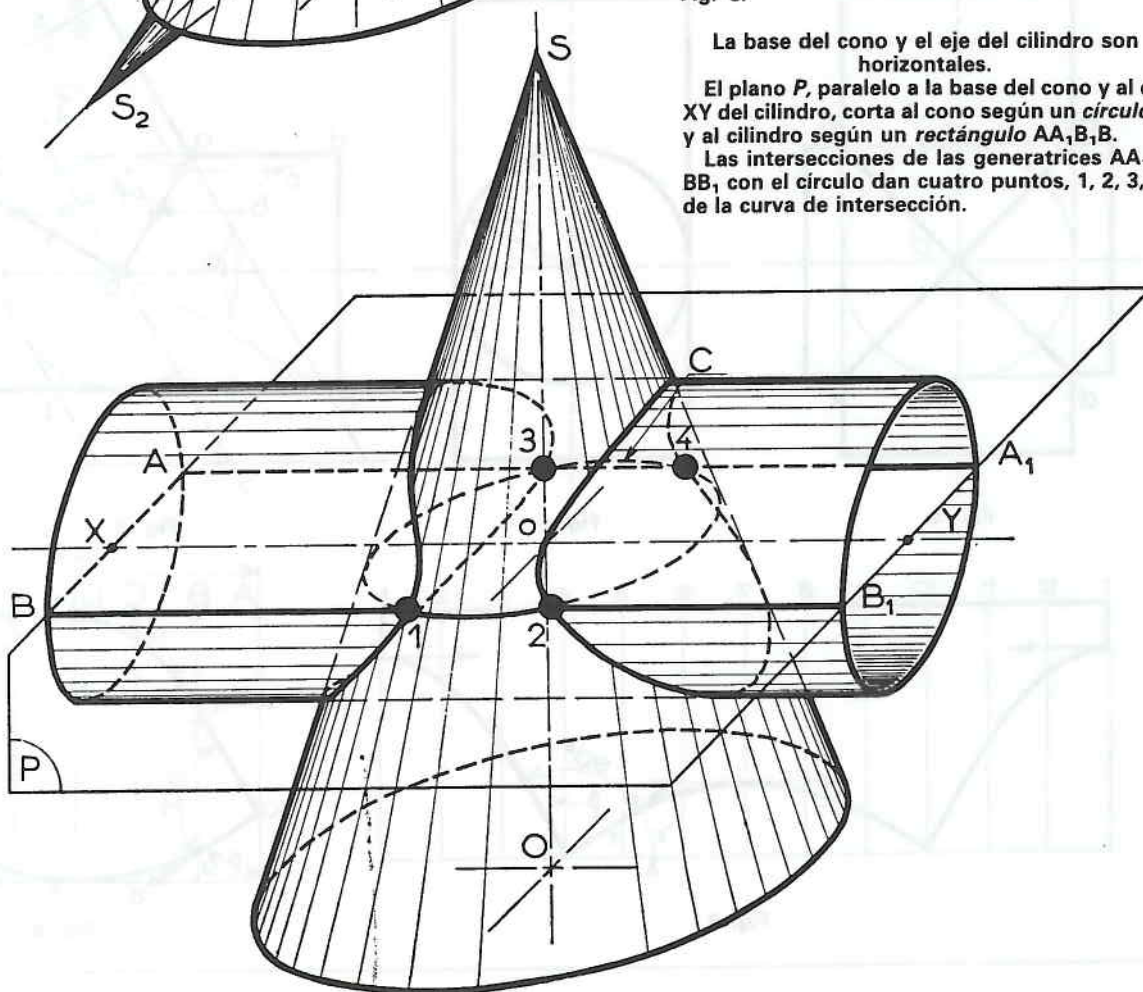


Fig. 8.

La base del cono y el eje del cilindro son horizontales.

El plano P , paralelo a la base del cono y al eje XY del cilindro, corta al cono según un círculo C y al cilindro según un rectángulo AA_1B_1B .

Las intersecciones de las generatrices AA_1 y BB_1 con el círculo dan cuatro puntos, 1, 2, 3, 4, de la curva de intersección.

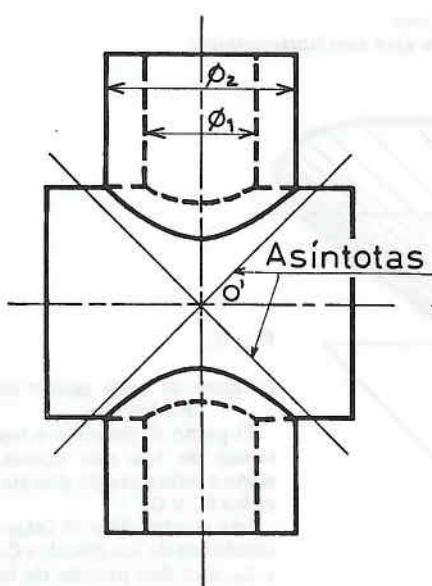


Fig. 1.

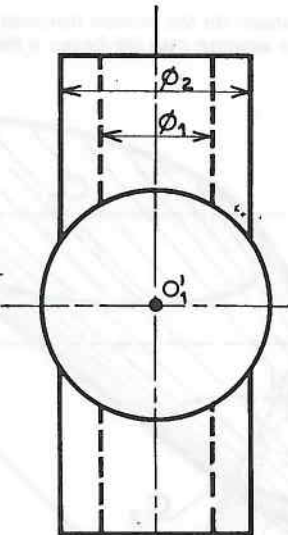


Fig. 2.

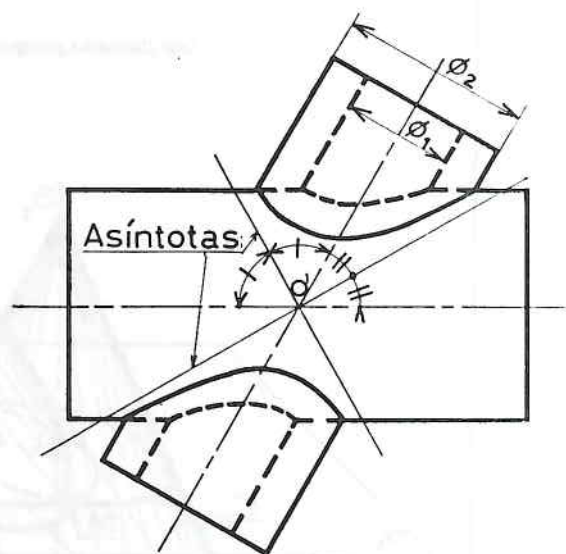


Fig. 3.

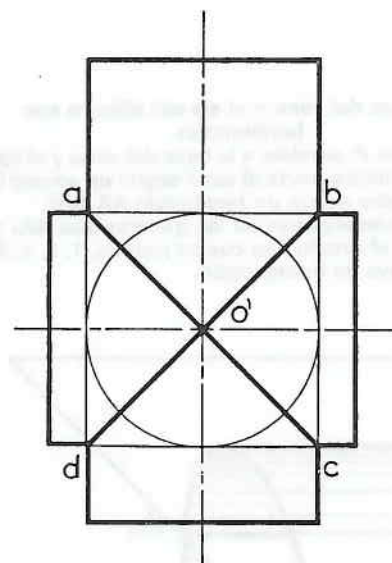


Fig. 4.

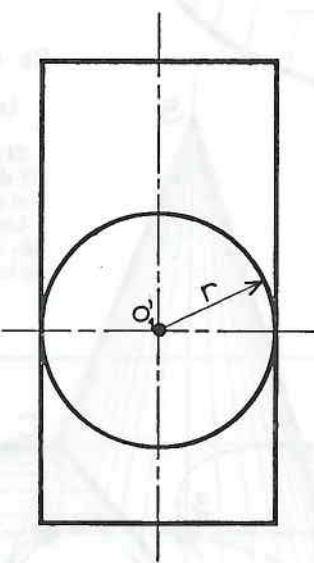


Fig. 5.

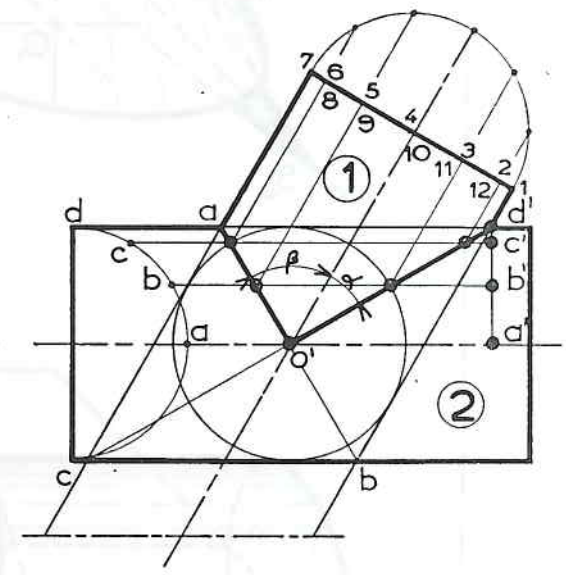


Fig. 6.

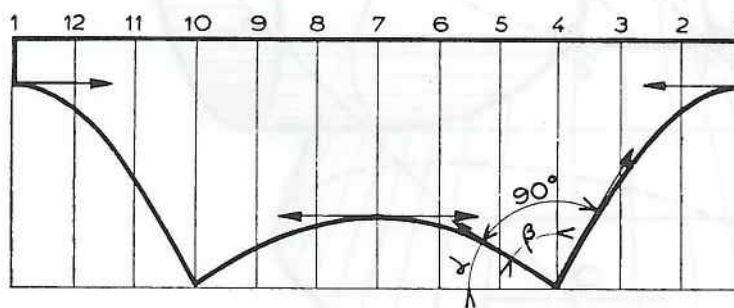


Fig. 7.

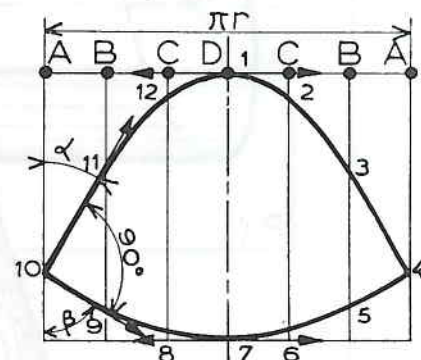


Fig. 8.

6

Intersecciones sencillas de cilindros de revolución

Caso particular

Los ejes de los cilindros son concurrentes

En este caso, la intersección se proyecta sobre un plano paralelo al plano de los ejes según **dos arcos de hipérbola equilátera**, cuyas *asíntotas* (bisectrices de los ángulos formados por los ejes de los cilindros) se cortan en el punto de intersección de los dos ejes (Figs. 1 y 2).

Cuando el diámetro del cilindro penetrante aumenta, la flecha del arco de hipérbola aumenta también (Figs. 1 y 3), la curva se aproxima a sus asíntotas y, cuando los dos diámetros son iguales, la hipérbola se confunde con sus asíntotas (Figs. 4, 5, y 6). En ese caso se puede decir que los dos cilindros son *tangentes a la misma esfera* de centro *O* (es el caso de los codos cilíndricos estudiados en el tomo I). La intersección está constituida por dos elipses situadas en planos perpendiculares al de los ejes de los cilindros; estas elipses son iguales si los ejes de los cilindros son perpendiculares, o desiguales si los ejes son oblicuos entre sí.

Generalmente, el cilindro penetrante está limitado a una parte de la intersección, que está, pues, constituida por dos mitades de elipse limitadas a su eje menor, que le es común e igual al diámetro de los cilindros.

DISEÑO Y DESARROLLO DE UNA INTERSECCION DE DOS CILINDROS DEL MISMO DIAMETRO

El diseño (Fig. 6) se simplifica; la vista de perfil no hace falta. Para trazar la intersección en alzado basta unir los puntos de intersección *a, b, c, d'*, de las generatrices del contorno aparente.

La transformada de la intersección (cilindro penetrante) se compone de *arcos de senoide* (Fig. 7). La transformada de la penetración (cilindro penetrado) se compone de *dos arcos de senoide* de base común (πr medio), *simétricos si los ejes son perpendiculares o desiguales si los ejes son oblicuos* (Fig. 8).

Cada transformada de la intersección es tangente a una perpendicular a las generatrices que pasan por los puntos de intersección 1 y 7. Los puntos 4 y 10 son dos puntos angulares de cada una de las transformadas.

PRINCIPIO DE DETERMINACION DE LA INTERSECCION

Se cortan los dos sólidos mediante planos paralelos a los dos ejes. Estos planos determinan en cada cilindro secciones rectangulares, cuyos dos lados son generatrices, y éstas se cortan en puntos de la intersección buscada (ver Fig. 6, página 58).

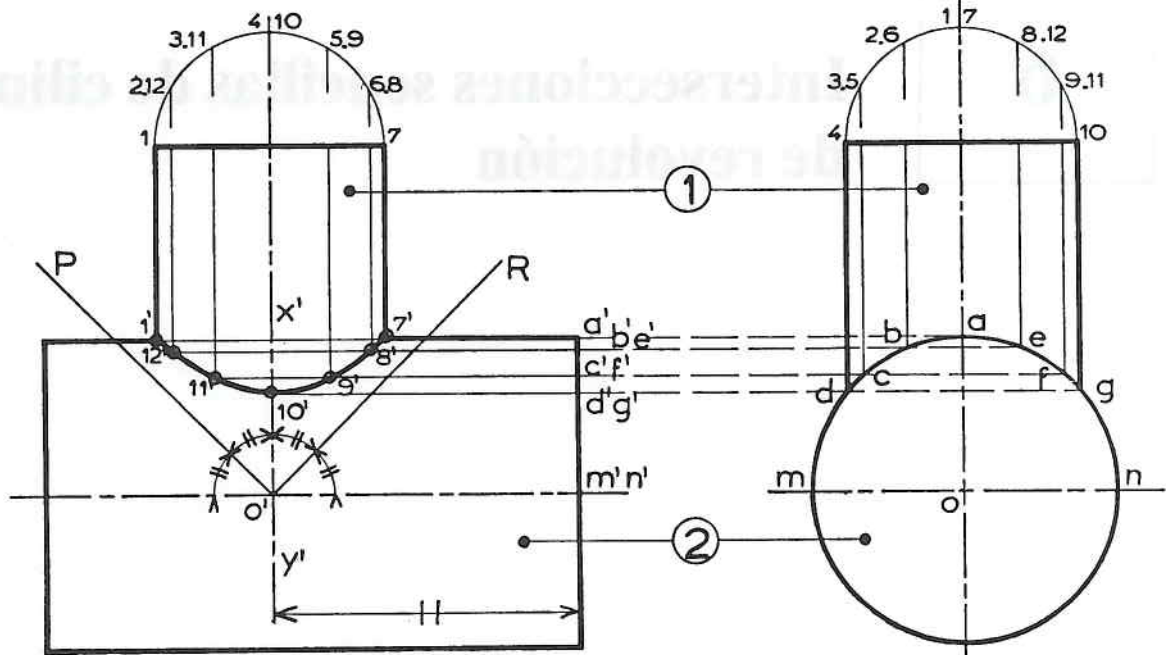


Fig. 1.

Fig. 2.

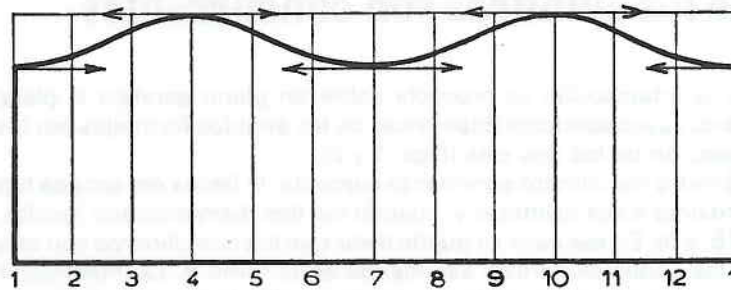


Fig. 3.

Desarrollo de 1 - Trazado exterior

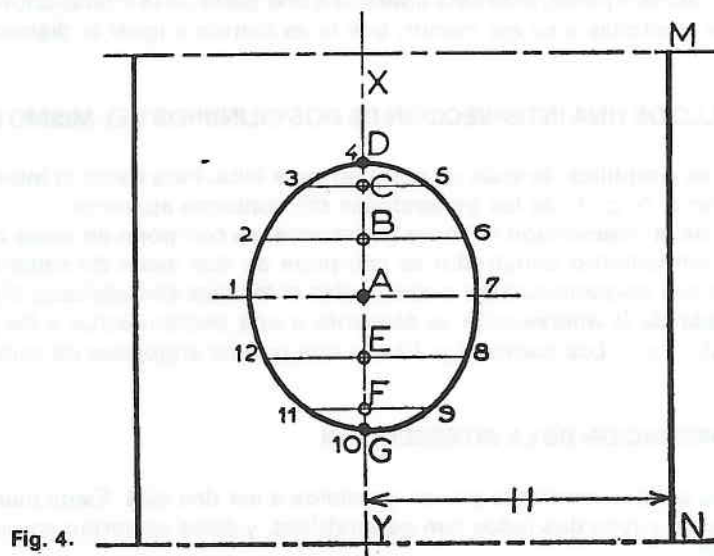


Fig. 4.

Semidesarrollo de 2 - Trazado exterior

I. Intersección de dos cilindros de diámetros diferentes, cuyos ejes son perpendiculares y concurrentes

DISEÑO

Hacer una vista de perfil (Fig. 2), sobre la que la proyección de la intersección se confunde con el arco *dag*. Para facilitar el desarrollo, dividir la sección recta del cilindro 1 en partes iguales y hacer pasar los planos secantes por estos puntos de división. La vista de perfil muestra que *los planos secantes son frontales*.

El plano frontal que pasa por las generatrices 1 y 7 corta al cilindro 2 según la generatriz *A* y determina los puntos extremos de la intersección 1' y 7' (Fig. 1). El plano frontal que pasa por las generatrices 8 y 12 corta al cilindro 2 según la generatriz *E* y determina los puntos 8' y 12'. Los puntos 9'-11'-10' se obtienen mediante construcciones similares.

OBSERVACION. Puesto que el plano que pasa por las generatrices 1 y 7 es un plano de simetría, las generatrices *B, C, D* se confunden, en la vista frontal, respectivamente con las generatrices *E, F, G* y al punto 12' corresponde el punto 2', de la misma manera que al punto 11' corresponde el punto 3', etc.

La proyección frontal de la intersección, obtenida uniendo todos los puntos, es un **arco de hipérbola equilátera**, que tiene como asíntotas las rectas *o'P* y *o'R*, bisectrices de los ángulos formados por los ejes.

DESARROLLOS

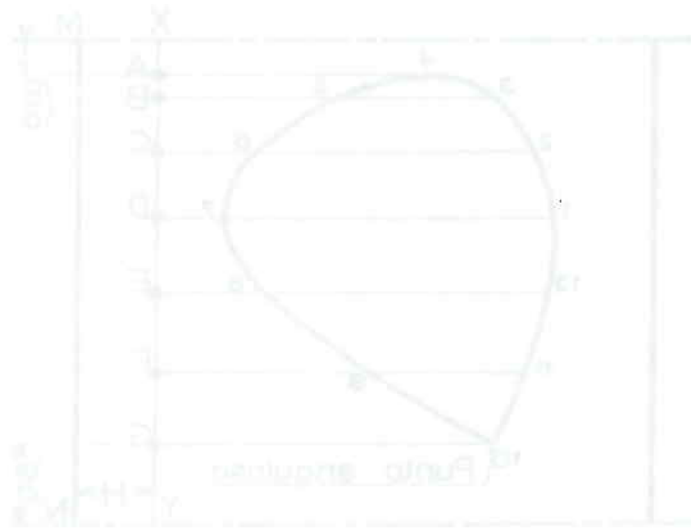
1.º Cilindro. 1. Es un cilindro de revolución cortado por una superficie cilíndrica; sus generatrices son *verticales* y, por tanto, se ven en verdadera magnitud en las dos vistas. Es conveniente utilizar la vista de perfil, pues se puede producir un error durante la construcción de la vista de frente. La transformada de la curva de intersección (Fig. 3) admite tangentes perpendiculares a las generatrices, en los puntos más altos 4 y 10 y en los puntos más bajos 1 y 7.

2.º Cilindro 2. Contiene la abertura de penetración. Esta es una curva que tiene dos ejes de simetría perpendiculares; la generatriz *A* y la sección recta *xy* que pasa por los puntos 10 y 4.

Referir muy exactamente el emplazamiento de la generatriz *A* con relación a la *o* o a las generatrices de unión (Fig. 4), y el emplazamiento de la sección recta rectificada *xy* con relación a una de las bases.

Llevar sobre *xy*, a cada lado de *A*, los arcos desarrollados $ag = ad$ (Fig. 2), tomados del *círculo de la fibra neutra* con ayuda de la regla flexible. Llevar igualmente los arcos $ab = ae$, $cb = ef$ y $cd = fg$.

Hacer pasar una generatriz por cada uno de los puntos *A, B, C*, etc. Transportar sobre la generatriz *A* los puntos 1 y 7; sobre las generatrices *B* y *E* los puntos 2, 12 y 6, 8, tomados de la vista frontal, etc.



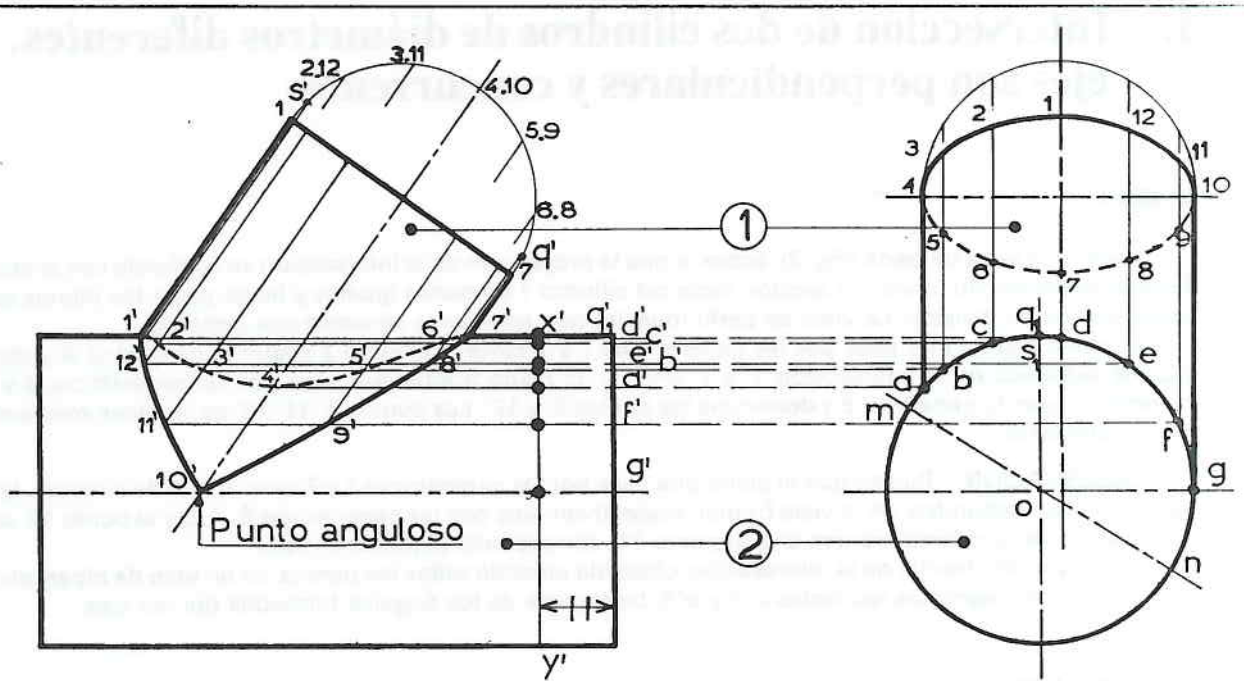


Fig. 2.

Fig. 3.

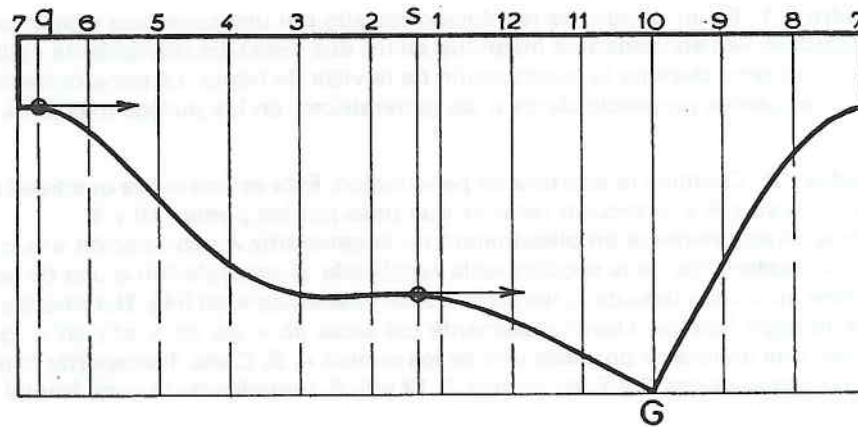


Fig. 4.

Desarrollo de 1
Trazado exterior

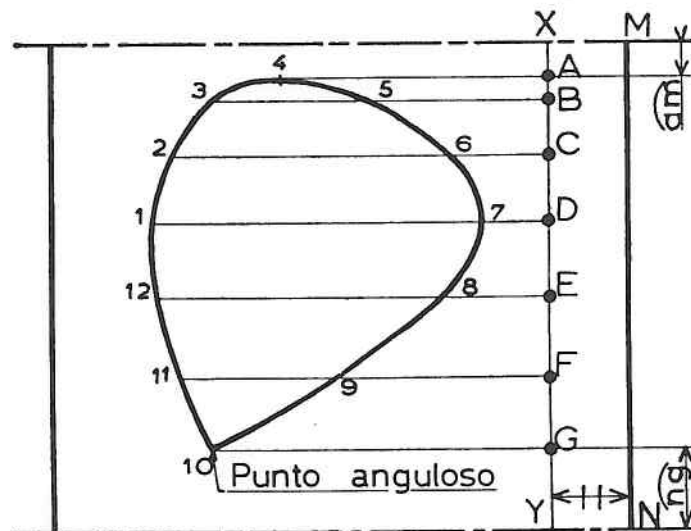


Fig. 5.

Semidesarrollo de 2
Trazado exterior

II. Intersección de dos cilindros de diámetros diferentes, cuyos ejes son oblicuos entre sí

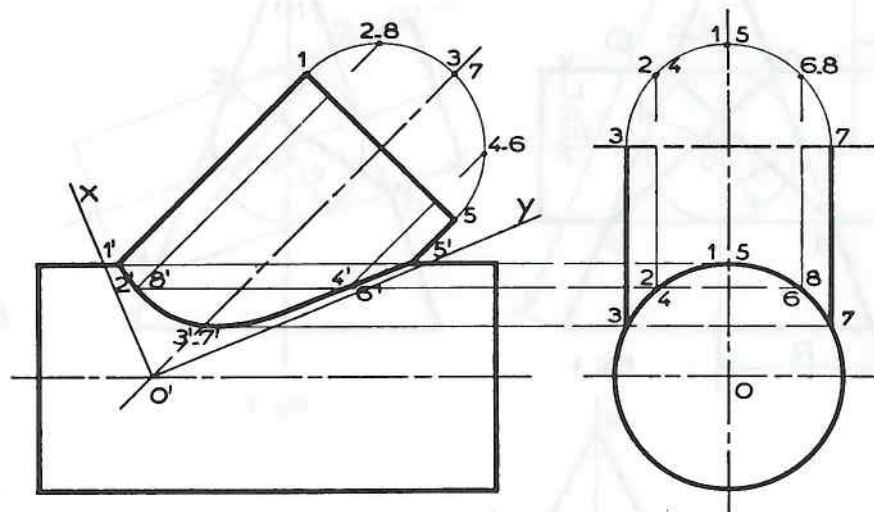


Fig. 1.

a) Los ejes son concurrentes (Fig. 1).

La proyección frontal de la intersección es un arco de hipérbola equilátera que tiene como asíntotas las bisectrices de los ángulos formados por los dos ejes de los cilindros.

b) Los ejes no son concurrentes (Figs. 2 y 3).

En el ejemplo elegido, los dos cilindros admiten un plano tangente común en *G*; es una *penetración límite*. Como los ejes de los dos cilindros no son concurrentes, la intersección no tiene ningún eje de simetría y su proyección frontal es una curva cerrada que tiene una parte oculta.

DISEÑO

Los planos secantes, paralelos a los ejes, son también *planos frontales*.

EJEMPLO. El plano frontal que pasa por las generatrices 9 y 11 (Fig. 3) corta al cilindro 2 según la generatriz *F*. Las intersecciones de las generatrices 9 y 11 con la generatriz *F* se proyectan en los puntos 9' y 11' en la vista frontal.

DESARROLLOS

1.º Cilindro 1. (Fig. 4). Como las generatrices son frontales se proyectan en verdadera magnitud en la vista del mismo nombre (Fig. 2). El rectángulo capaz tiene por dimensiones, por una parte el perímetro del círculo que pasa por la fibra neutra, y por otra parte la longitud de la generatriz más grande, o sea 10.

Antes de numerar las generatrices, buscar su orden en función del sentido del curvado. Si la numeración fuese inversa: 7-8-9-10... en lugar de 7-6-5-4..., se obtendría, después del curvado, un cilindro simétrico del deseado, y por tanto, no válido.

La curva admite tangentes perpendiculares a las generatrices *Q*, situada entre las generatrices 7 y 6, y *S*, situada entre las generatrices 1 y 2; es conveniente trazar estas generatrices y encontrar su verdadera magnitud en la proyección frontal. La curva presenta un *punto angular G* situado sobre la generatriz 10, por la que pasa el plano tangente a los dos cilindros.

2.º Cilindro 2. La figura 5 representa el semidesarrollo que incluye la penetración. Referir bien las generatrices extremas *A* y *G* con relación a las de la unión, *M* y *N*, llevando los arcos *ma* y *mg* (Fig. 3), medidos en el círculo que pasa por la fibra neutra. Determinar el emplazamiento de las generatrices *B*, *C*, *D*, *E*, *F* llevando las longitudes de los arcos *ab*, *bc*, etc. teniendo en cuenta el sentido del curvado. Después del trazado de las generatrices, llevar sobre cada una de ellas los puntos de la penetración, a partir de una sección recta cualquiera, *xy* por ejemplo.

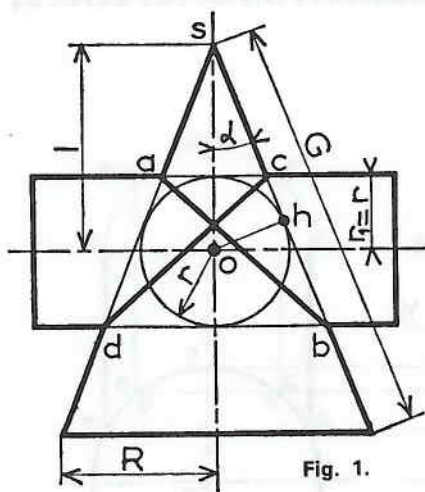


Fig. 1.

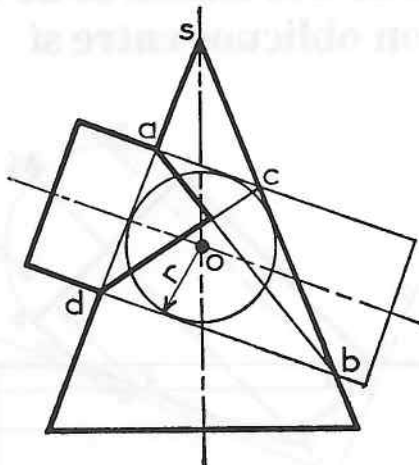


Fig. 2.

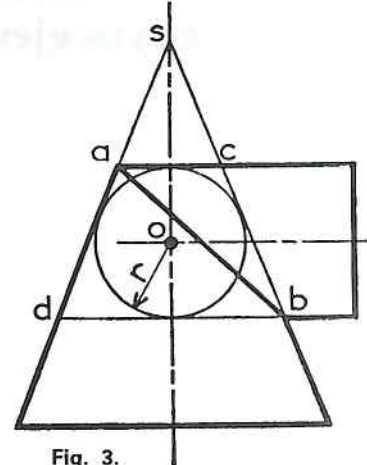


Fig. 3.

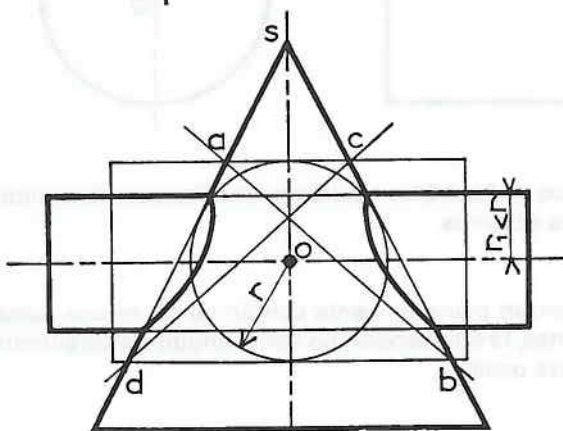


Fig. 4.

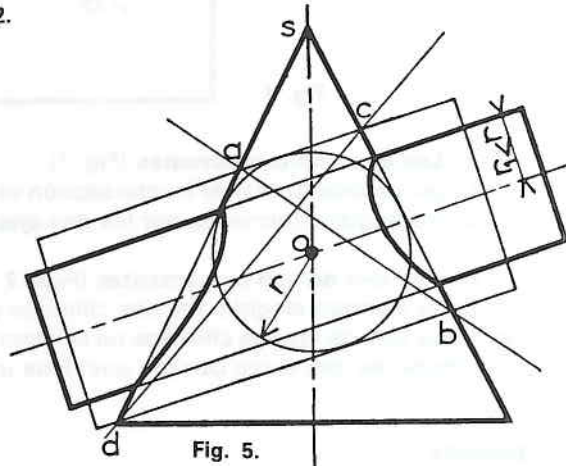


Fig. 5.

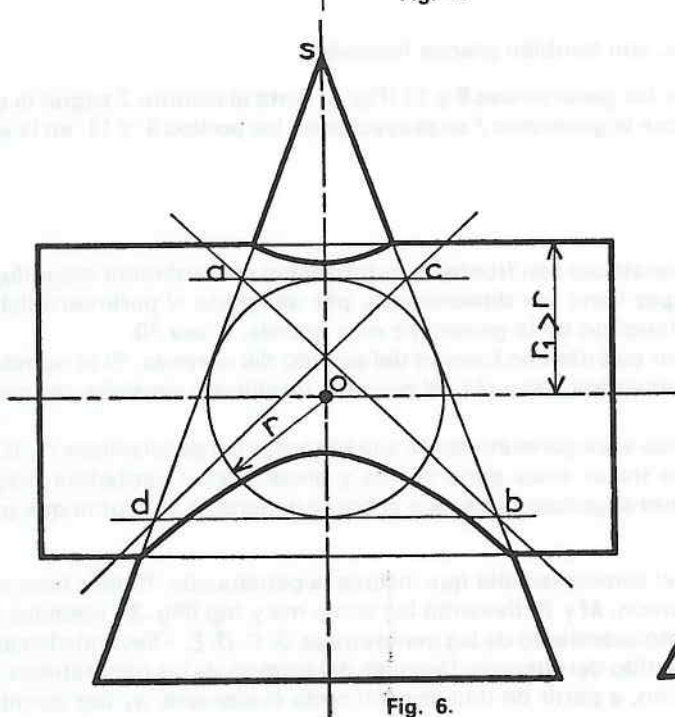


Fig. 6.

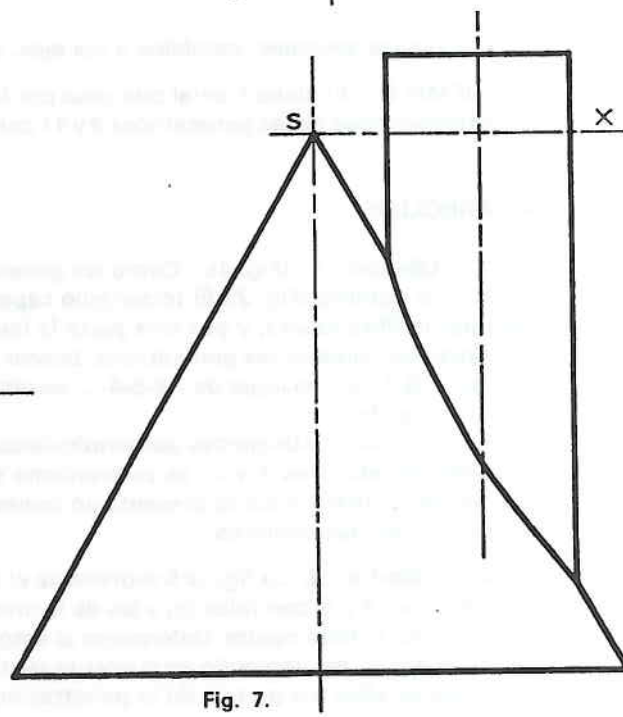


Fig. 7.

7

Intersecciones sencillas de conos y de cilindros de revolución

I. GENERALIDADES

OBSERVACION. Se supone que el eje de cada sólido está situado en un **plano frontal**; en caso contrario, se puede llegar siempre a esta posición mediante un cambio de plano de proyección frontal.

A. Los ejes de los dos sólidos son concurrentes

1. EL CONO Y EL CILINDRO SON TANGENTES A LA MISMA ESFERA

Las intersecciones son **dos elipses** (Fig. 1), si los dos sólidos se penetran enteramente; **dos partes de elipse**, si la intersección se limita a una sola penetración (Fig. 2); es el caso más general; **una sola elipse**, si el cono está limitado por su intersección con el cilindro (Fig. 3); es el caso de los codos cilindrocónicos y de las mangas de aire.

Las intersecciones se proyectan en alzado según dos rectas (Figs. 1 y 2) o una sola recta (Fig. 3), uniendo los puntos de intersección de las generatrices del contorno aparente del cono y del cilindro. El punto de encuentro de las dos rectas de intersección está situado sobre el eje del cono, si los dos ejes son perpendiculares (Fig. 1), y fuera del eje del cono, si los dos ejes son oblicuos (Fig. 2).

Cada elipse tiene como eje mayor la longitud del segmento que representa su proyección sobre el plano frontal, y como eje menor el diámetro de la esfera tangente a las dos superficies.

Búsqueda del radio común a la esfera y al cilindro, conociendo la distancia l del centro O de la esfera al vértice S .

Gráficamente: r es igual a la longitud de la perpendicular oh , trazada por o , a una generatriz del contorno aparente del cono (Fig. 1).

Mediante el cálculo: $r = oh = l \operatorname{sen} \alpha$, siendo $\operatorname{sen} \alpha$ igual a $\frac{R}{G}$ (Fig. 1).

Inversamente, si el diámetro del cilindro viene impuesto, se encontrará la distancia l del centro de la esfera al vértice, aplicando la fórmula: $l = \frac{r}{\operatorname{sen} \alpha}$.

2. EL RADIO r DE LA ESFERA TANGENTE AL CONO, Y QUE TIENE POR CENTRO EL PUNTO DE ENCUENTRO O DE LOS DOS EJES, ES MAYOR QUE EL RADIO r_1 DEL CILINDRO $l \operatorname{sen} \alpha > r_1$

En ese caso, el cilindro penetra en el cono. Las curvas de intersección son «alabeadas» y se proyectan en alzado según **dos arcos de hipérbola**, cuyas asíntotas son las diagonales del trapecio formado por las generatrices del contorno aparente del cono y del cilindro de radio $r = l \operatorname{sen} \alpha$ (radio de la esfera bitangente) (Figs. 4 y 5).

3. EL RADIO r DE LA ESFERA TANGENTE AL CONO Y QUE TIENE POR CENTRO EL PUNTO DE ENCUENTRO O DE DOS EJES ES MENOR QUE EL RADIO r_1 DEL CILINDRO $l \operatorname{sen} \alpha < r_1$

En ese caso, **el cono penetra en el cilindro.**

Las curvas de intersección son **alabeadas** y se proyectan en dos **arcos de hipérbola**, cuyas asíntotas son también las diagonales del trapecio formado por las generatrices aparentes del cono y del cilindro tangentes a la misma esfera de centro o y de radio $r = l \operatorname{sen} \alpha$ (Fig. 6).

Fig. 3.

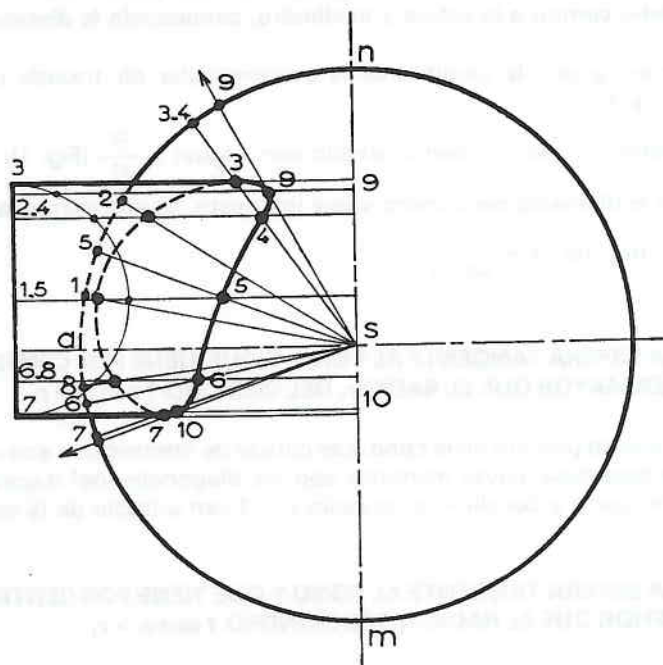
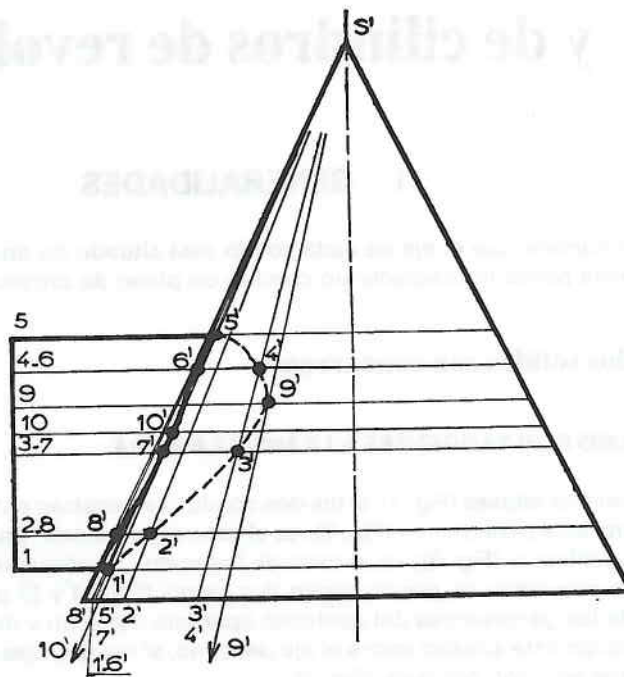


Fig. 4.

B. Los ejes del cono y del cilindro son paralelos

En este caso, no hay más que una sola curva «alabeada» de intersección, que se proyecta en alzado en un **arco de parábola** cuyo eje sx , perpendicular a los ejes de los dos sólidos, pasa por el vértice del cono (Fig. 7).

II. EL CILINDRO PENETRA EL CONO

A. Los dos ejes son ortogonales

Si los ejes son concurrentes, la curva de intersección se proyecta en un arco de hipérbola (Fig. 4, lámina precedente), que se obtiene ya por el método de las esferas secantes, ya por uno de los métodos siguientes.

Si los ejes no son concurrentes, la intersección se proyecta según una curva cerrada.

DISEÑO

La curva de intersección se obtiene mediante unos *planos secantes que pasan por generatrices del cilindro*. Estos planos pueden ser *paralelos a la base del cono*: método de los planos horizontales (Fig. 8, página 59), o pasar por *el vértice del cono* (Fig. 5, página 58).

1.º Método de los planos horizontales (Fig. 1). Establecer las proyecciones frontales y horizontales de generatrices regularmente espaciadas en el cilindro.

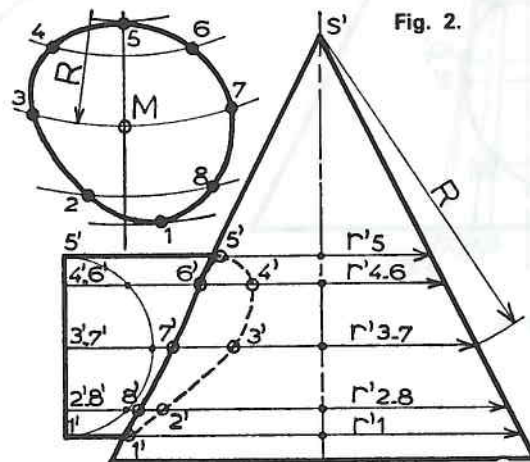


Fig. 2.

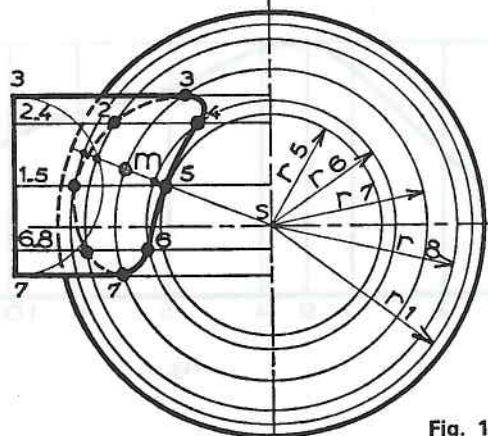


Fig. 1.

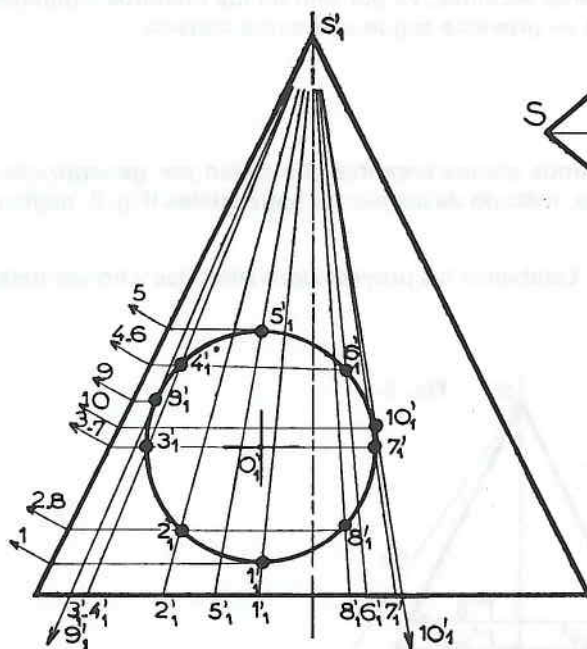


Fig. 5.

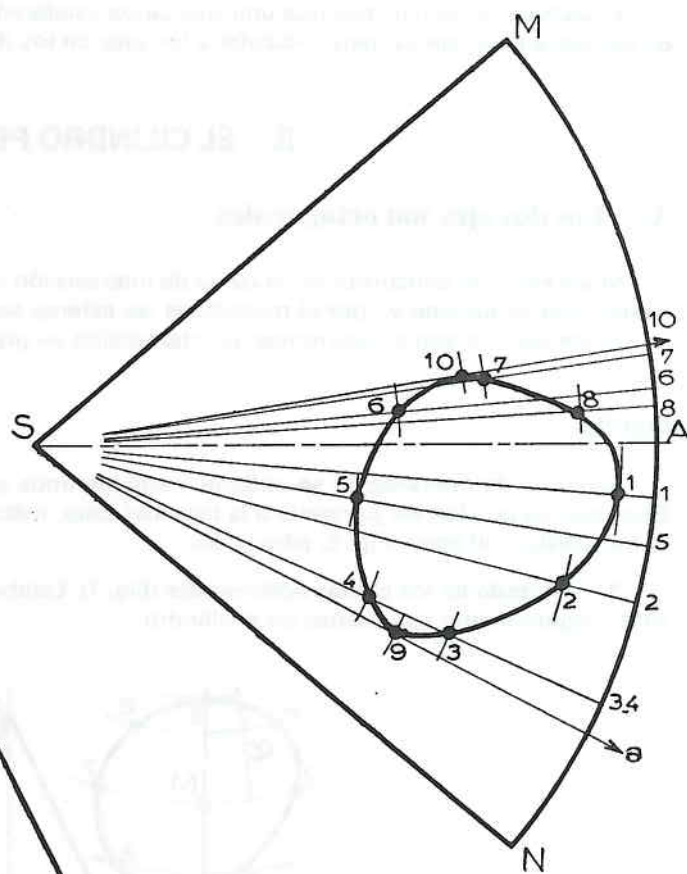


Fig. 7.

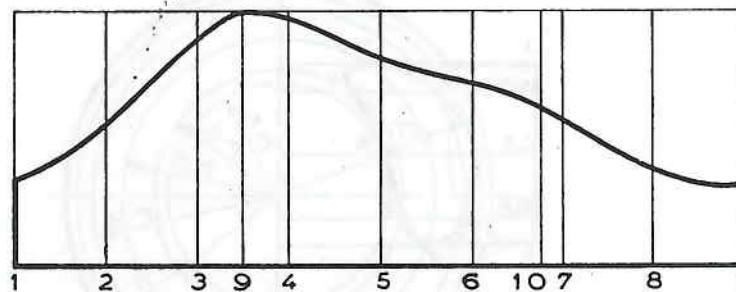


Fig. 6.

Trazar las proyecciones horizontales de los círculos que representan las secciones del cono determinadas por los planos horizontales que pasan por las generatrices del cilindro, transportando su radio sobre la proyección frontal.

Después de la obtención de puntos de la intersección en la proyección horizontal, transportarlos a la proyección frontal.

2.° Los planos secantes pasan por el vértice del cono. Estos planos determinan en el cilindro secciones rectangulares que pasan por dos generatrices, y en el cono secciones triangulares, de las que dos lados son también generatrices. En la práctica, no se considera más que una generatriz del cilindro, la situada en el sistema regular, ni más que una generatriz del cono, la que corta al cilindro.

Construcción del diseño: establecer una vista de perfil (Fig. 4), en la que se confunden el cilindro y la intersección, proyectados en un círculo.

Dividir el círculo en partes iguales; hacer pasar por los puntos de división unas generatrices en el cono y en el cilindro. Referir estas generatrices en las proyecciones frontales (Fig. 3) y horizontales (Fig. 5); la intersección de las generatrices que llevan el mismo número da un punto de la intersección.

OBSERVACIONES. Este método ofrece varias ventajas sobre el anterior: 1.° la vista de perfil indica inmediatamente si hay penetración o mordedura; 2.° las generatrices que pasan por $9'$ y $10'$, tangentes al círculo, representan las trazas de los planos tangentes al cilindro, llamados «*planos límites*», y las *generatrices límites* tangentes a la curva de intersección en los *puntos límites* 9 y 10; 3.° este método es aplicable a la intersección de un cono y de un cilindro de bases cualesquiera.

DESARROLLOS

a) **cilindro** (Fig. 6, trazado exterior): sus generatrices están en verdadera magnitud en las proyecciones horizontal y frontal;

b) **cono:** buscar las verdaderas magnitudes de los trozos de generatrices cortadas por el cilindro, preferentemente en la vista de perfil, primera vista trazada; determinar el emplazamiento de una generatriz A , por ejemplo (Fig. 7, trazado exterior), con relación a las generatrices de unión M y N ; llevar sobre la transformada de la base los arcos $a1$, 1-5, etc.; $a8$, 8-6, etc. (Fig. 5); trazar las generatrices y llevar sobre éstas, a partir del vértice, las verdaderas magnitudes tomadas de la vista de perfil o de la vista frontal.

Si se emplea el método de los planos horizontales, la penetración se obtiene (Fig. 2) llevando sobre la transformada de los círculos (ej. arco R) el desarrollo de los arcos tomados de la proyección horizontal (ej. arcos $m3$ y $m7$).

B. Los ejes son paralelos

Si los ejes están situados en el mismo plano frontal, la curva de intersección se proyecta en un arco de parábola (Fig. 7, página 64); si no es así, la proyección es una curva cerrada.

OBSERVACION. Siempre es posible conducir al primer caso mediante una rotación o un cambio de plano de proyección frontal. Si los dos sólidos forman parte de un conjunto, basta referir una generatriz respecto a este conjunto.

Se puede aplicar los dos métodos: planos horizontales y planos pasando por el vértice del cono, pues ambos permiten determinar con precisión las generatrices límites y los puntos límites.

Los planos horizontales cortan al cilindro según círculos, cuyas proyecciones horizontales se confunden con la del cilindro; estos planos cortan al cono según círculos concéntricos.

Fig. 2.

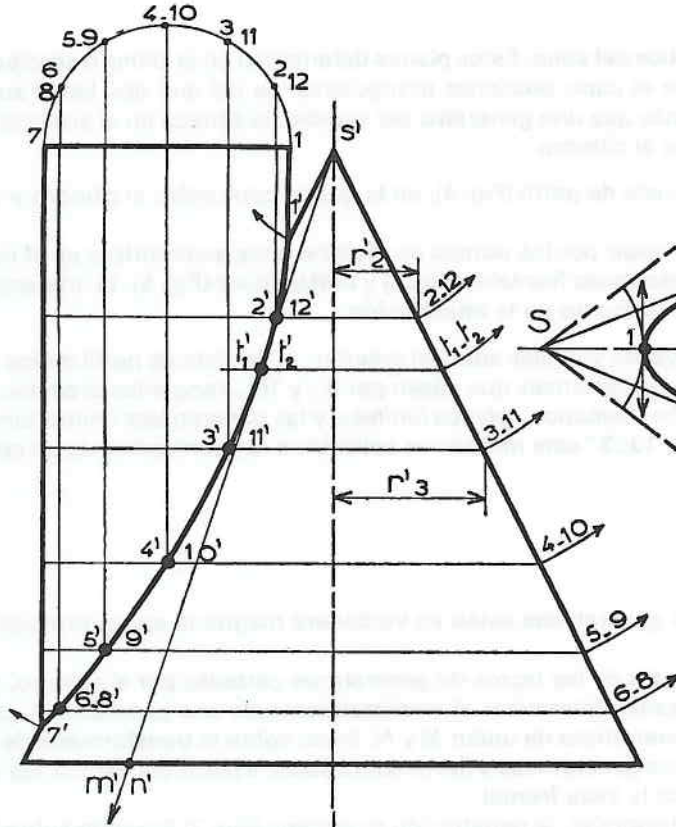


Fig. 5.

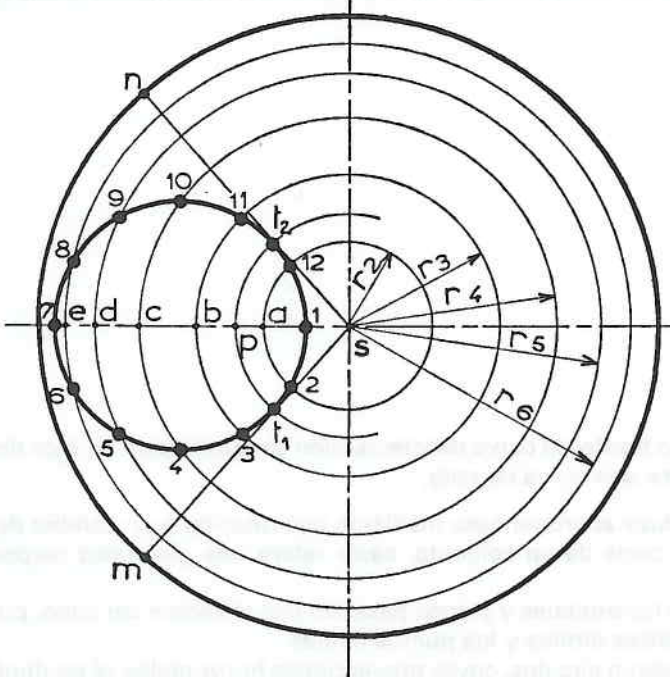
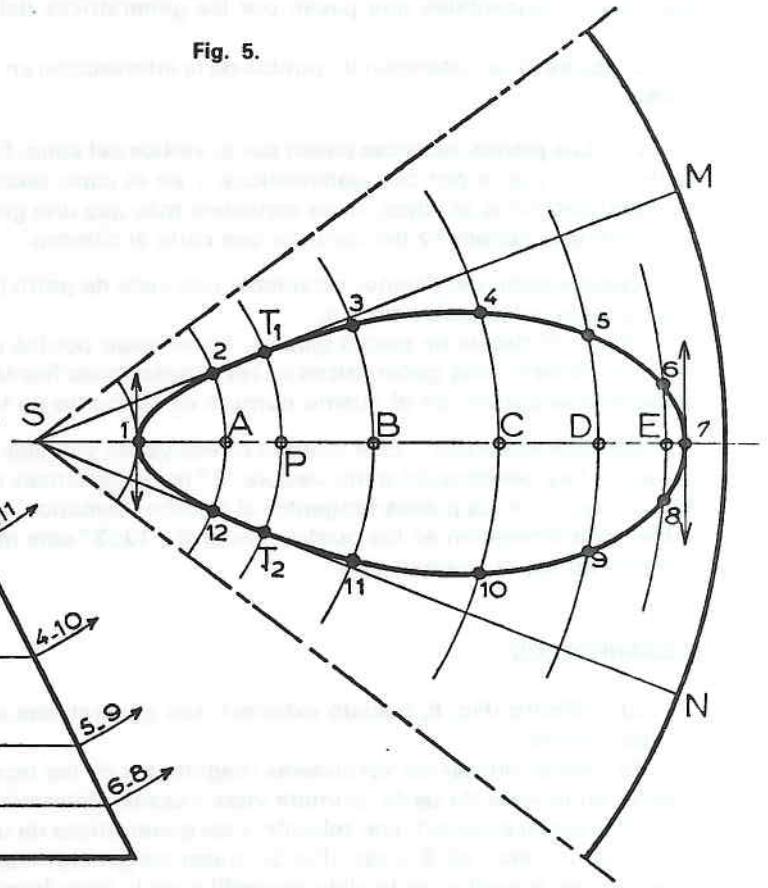


Fig. 3.

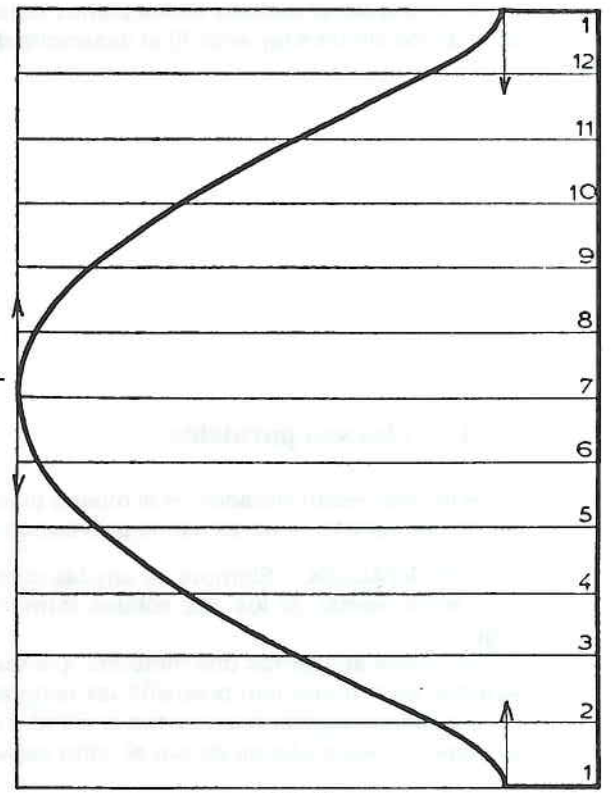


Fig. 4.

Los planos verticales que pasan por el vértice del cono determinan generatrices en el cilindro y en el cono, que se cortan formando ángulos tanto más agudos, cuanto más pequeño es el ángulo en el vértice del cono, (Fig. 1), lo que, prácticamente, disminuye la exactitud de los trazados. Por ello es preferible el método de los planos horizontales.

DISEÑO

Para desarrollar el cilindro es conveniente utilizar un sistema regular de generatrices. Con el fin de obtener con precisión la longitud de las generatrices que sirven para el desarrollo, es preciso pasar los planos secantes por estas generatrices; de ahí la construcción siguiente:

1. Dividir el círculo que representa la proyección horizontal del cilindro en partes iguales (Fig. 3).
2. Trazar los círculos, o simplemente arcos de círculo, que representan las proyecciones horizontales de las secciones del cono por los planos horizontales que pasan por los puntos 2, 3, 4, etc.
3. Trazar las proyecciones frontales de estos círculos (Fig. 2), llevando los radios r_2 y r_3 en r'_2 y r'_3 , etc.
4. Referir las intersecciones de las proyecciones frontales de las generatrices del cilindro y de los planos secantes. Los puntos de intersección pertenecen al arco de parábola de intersección de las dos superficies.

Las tangentes sm y sn son las *generatrices límites* del cono. Determinan las proyecciones t_1 y t_2 de los *puntos límites*.

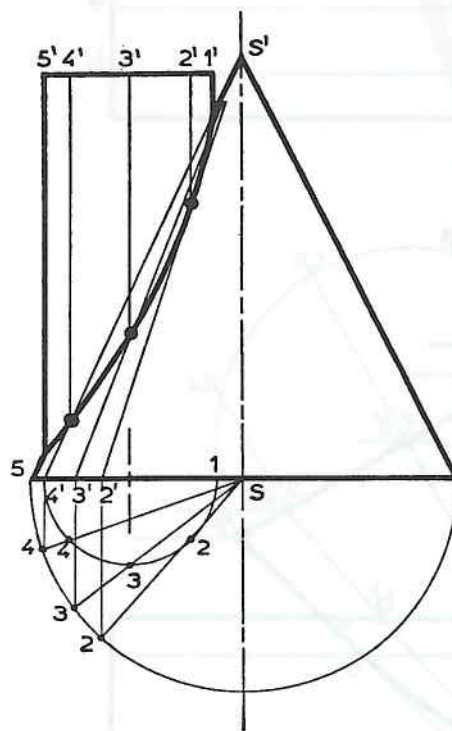


Fig. 1.

DESARROLLOS

a) **del cilindro:** como las generatrices son verticales, se ven en verdadera magnitud en la proyección frontal y son iguales dos a dos. En la figura 4 el trazado es exterior.

b) **de la penetración en el cono:** después del desarrollo del cono (Fig. 5, trazado exterior) y referencia de la generatriz axial 7 con relación a la de unión, trazar las transformadas de los círculos que pasan por los puntos de intersección; llevar sobre éstas los desarrollos de los arcos correspondientes medidos en la proyección horizontal, ejemplo: $\widehat{C4} = \widehat{c4} = \widehat{C10} = \widehat{c10}$.

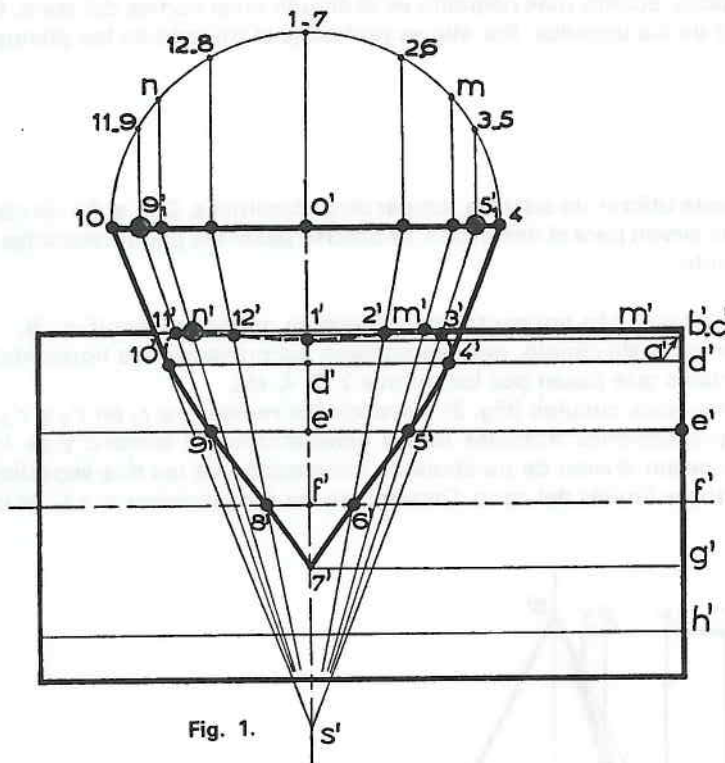


Fig. 1.

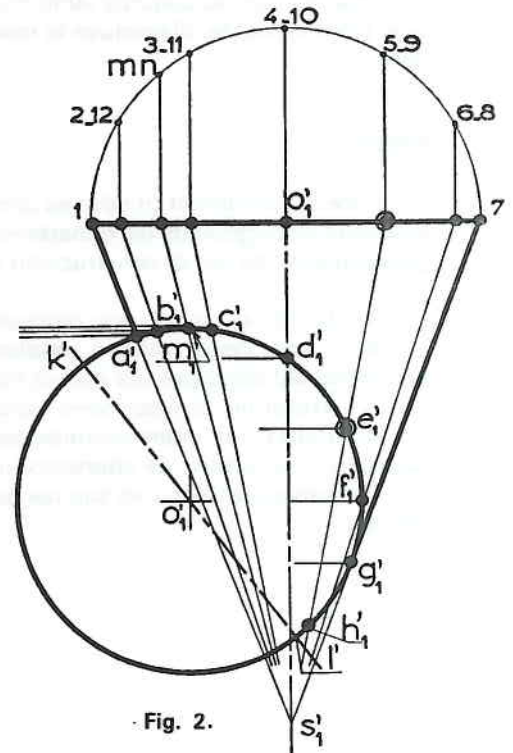


Fig. 2.

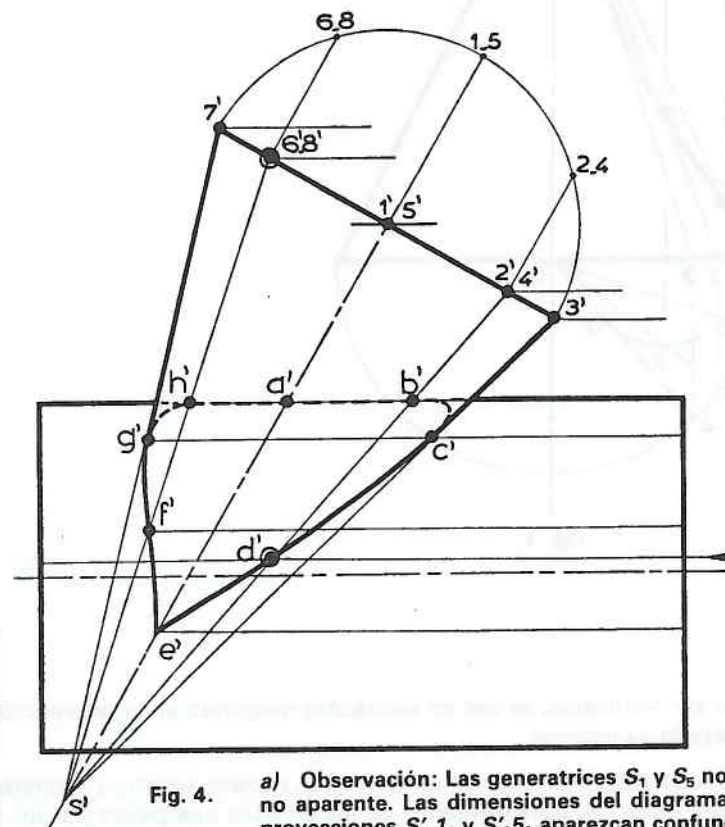


Fig. 4.

a) Observación: Las generatrices S_1 y S_5 no son del contorno aparente. Las dimensiones del diagrama hacen que sus proyecciones $S'_1 1_1$ y $S'_1 5_1$ aparezcan confundidas con las de las generatrices del contorno aparente.

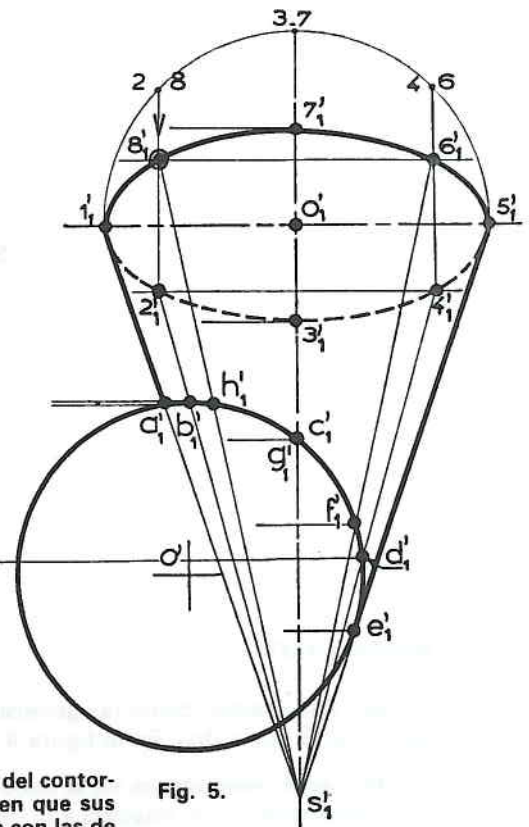


Fig. 5.

III. EL CONO PENETRA EL CILINDRO

A. Los ejes son perpendiculares y no concurrentes

Una vista de perfil perpendicular al eje del cilindro hace aparecer a éste como un círculo y la intersección como un arco $a'1g'_1$ de este círculo (Fig. 2).

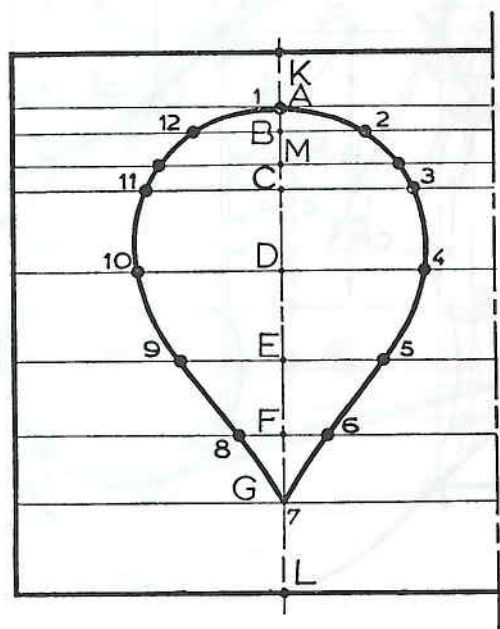


Fig. 3.

DISEÑO

Principio: cortar los dos sólidos mediante planos que pasan por el vértice del cono.

EJEMPLO. Un plano perpendicular al plano de perfil que pasa por las generatrices 5 y 9 corta al cono según un triángulo, cuya proyección frontal es $5'1S'9'1$, y al cilindro según dos generatrices E y H , de las que únicamente la generatriz E toca a la intersección; los puntos $5'9'$ son dos puntos de la intersección (Fig. 1).

El plano secante SM corta al cilindro por la generatriz M del contorno aparente y da dos puntos m' y n' , que ayudan a la construcción de la proyección frontal de la intersección.

En el ejemplo elegido, la generatriz 7 del cono es tangente al cilindro; las dos superficies son tangentes en un punto G , que es un **punto doble** de la intersección (proyección g'_17'). Esta forma puntiaguda de la intersección aparece en sus transformadas cuando se hacen los desarrollos del cono y del cilindro (desarrollo de la penetración, Fig. 3).

B. Los ejes son oblicuos y no concurrentes

DISEÑO

Aplicar el principio precedente, observando que la proyección de la base del cono sobre el plano de perfil es un escorzo parcial, y por tanto, una *elipse* (Figs. 4 y 5).

Determinación de los puntos de la elipse por los que pasan los planos secantes. Partir de la vista frontal, considerando el abatimiento de la base del cono sobre un plano frontal mediante rotación alrededor del diámetro de frente $3'-7'$. Dividir el círculo de base en partes iguales y llevar los puntos 1-5, 2-4, 6-8, en $1'-5'$, $2'-4'$, $6'-8'$. Buscar los puntos de división de la base (2-8, 3-7, 4-6) en otro abatimiento de dicha base sobre un plano de perfil, obtenido mediante rotación alrededor del diámetro de punta $1'5'$. Después establecer adecuadamente la correspondencia de las vistas (Figs. 4 y 5).

EJEMPLO. La proyección $8'_1$ del punto 8 sobre el plano de perfil está situada en la vertical, trazada por el punto 8 del abatimiento, al plano de perfil y a la línea de referencia horizontal del punto $8'$.

Trazar las generatrices en la proyección de perfil (*no se confunden dos a dos*).

Un plano perpendicular al plano de perfil, que pasa por la generatriz 4 del cono, corta al cilindro por dos generatrices, una de las cuales, D , se proyecta sobre el plano de perfil en d'_1 . La intersección de las generatrices 4 y D de un punto d'_1 de la proyección frontal de la intersección (Fig. 4).

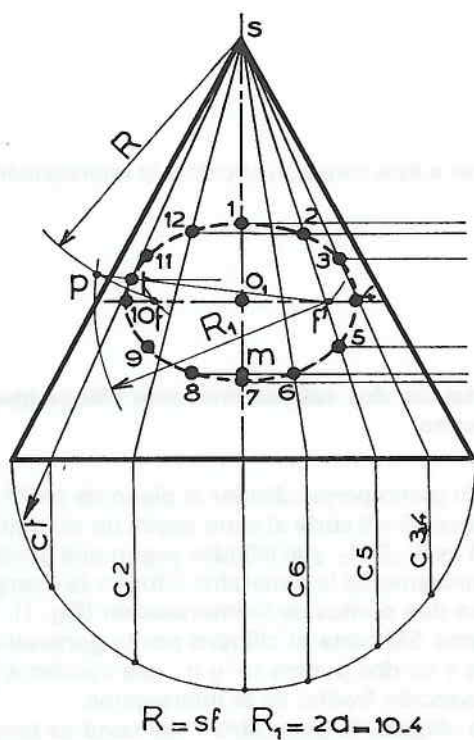


Fig. 3.

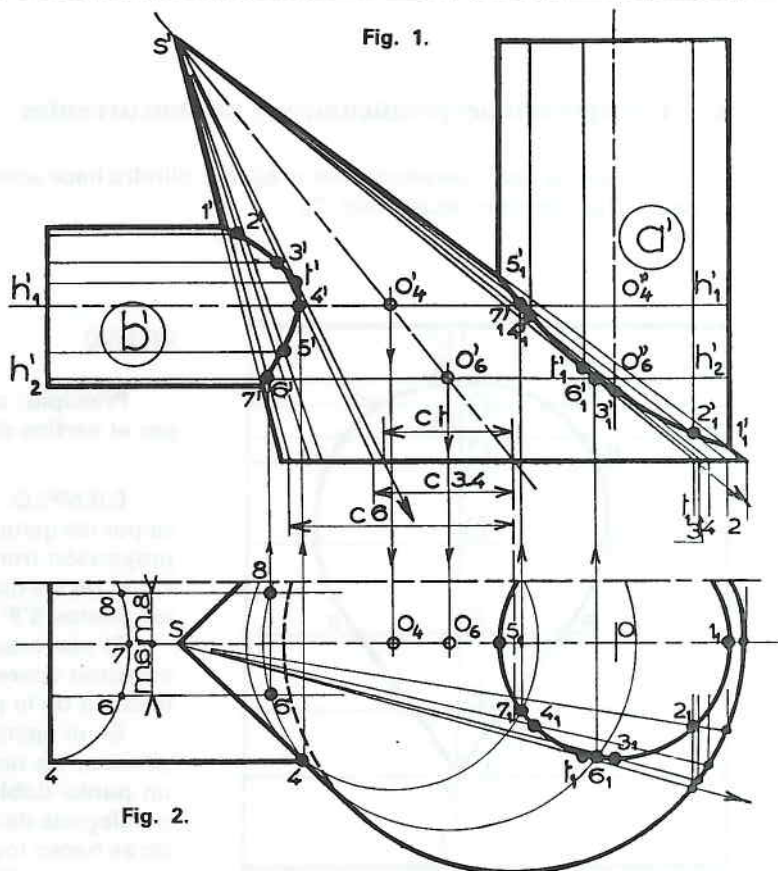


Fig. 2.

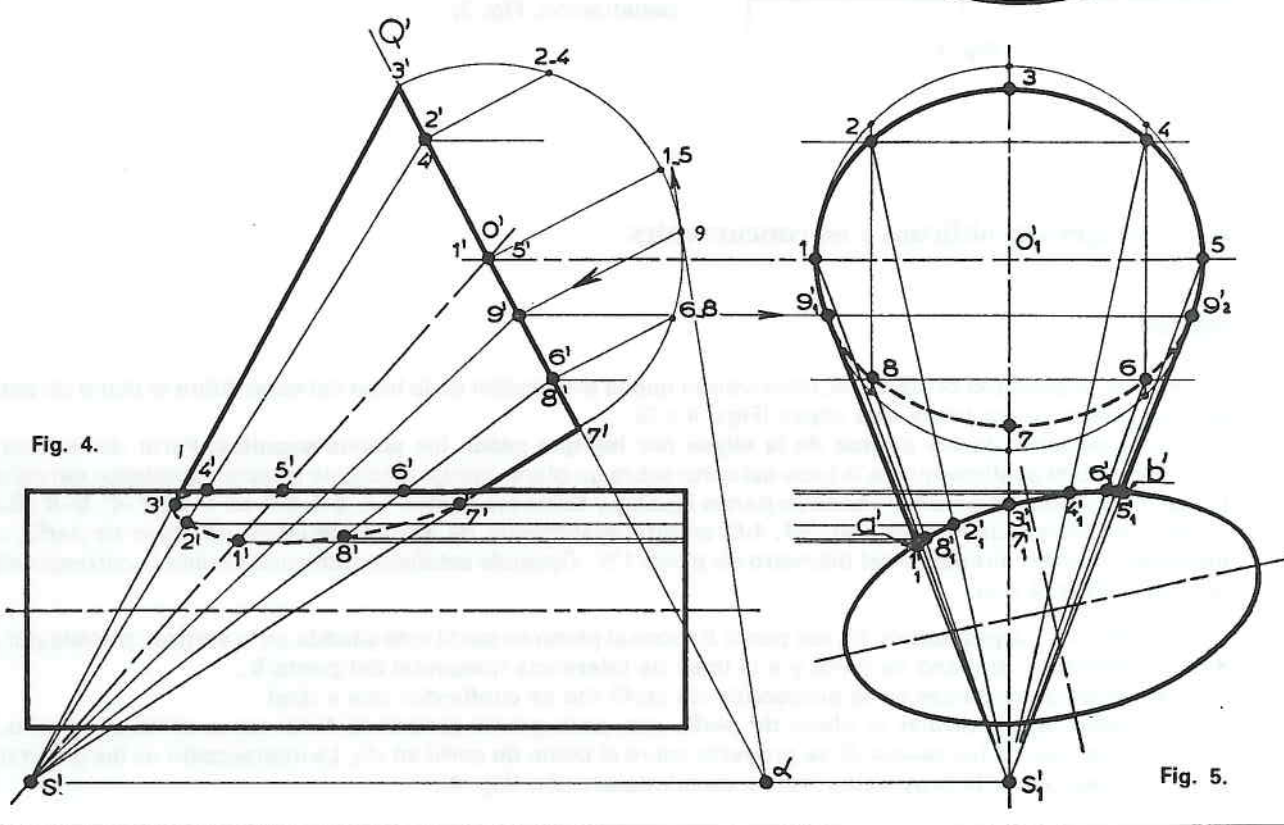


Fig. 4.

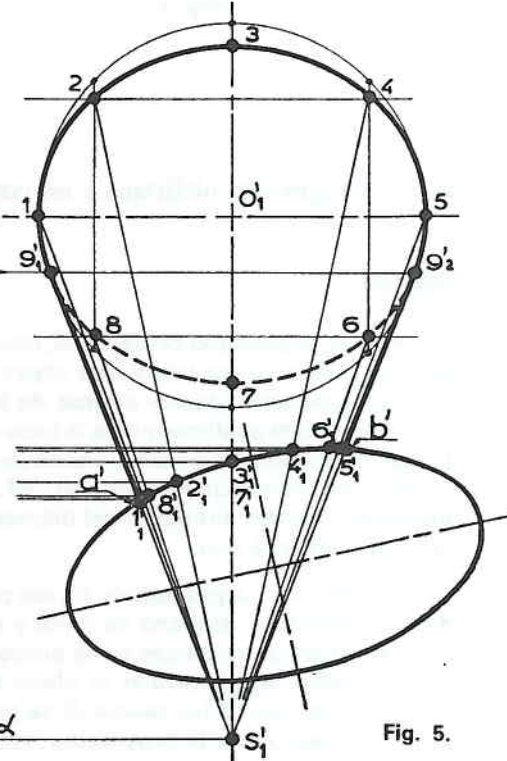


Fig. 5.

8

Intersecciones de conos oblicuos y de cilindros

I. Los cilindros penetran el cono; uno, de revolución, tiene su eje vertical; el otro, de sección elíptica, tiene su eje horizontal

El método de los planos secantes horizontales es aplicable para la búsqueda de cada sección. Estos planos cortan al cono y al cilindro A según dos círculos, y al cilindro B en dos generatrices.

EJEMPLOS. El plano H_1 corta al cono según un círculo de centro O_4 , proyectado en o_4 y o'_4 (Fig. 1 y 2), y al cilindro A según un círculo de centro O'_4 , cuya proyección horizontal se confunde con o ; el cilindro B queda cortado por las generatrices 4 y 10.

Las proyecciones horizontales de los círculos O_4 y O se cortan en el punto 7 y en su simétrico con relación al eje SO ; la proyección frontal es el punto $7'_1$.

En proyección horizontal el círculo o_4 corta a las generatrices 4 y 10 del cilindro B en el punto 4 y en el punto 10, simétrico de 4, proyectados ambos en el punto $4'$ de la vista frontal.

NOTA. Cuando las proyecciones de dos puntos se confunden, esta proyección se llama **punto doble aparente**. Cuando las superficies que se cortan admiten un plano de simetría común, su intersección se proyecta sobre este plano de simetría según una *línea formada de puntos dobles aparentes*. Es el caso de las proyecciones frontales del diseño en cuestión.

Igualmente, el plano secante H_2 da los puntos dobles aparentes $6'_1$ (cilindro A) y $6'$ (cilindro B).

El método de los planos secantes que pasan por el vértice del cono también es aplicable, si estos planos son **verticales** para la intersección con el cilindro A y **perpendiculares al plano de perfil** para la intersección con el cilindro B. Ellos cortan al cono y a los cilindros A y B según unas generatrices.

Intersección con el cilindro A: establecer una proyección horizontal (Fig. 2) y hacer pasar los planos secantes (planos verticales que pasan por el vértice del cono) por un sistema regular de generatrices en el cilindro.

El plano tangente al cilindro corta al cono por la generatriz ST_1 , cuya proyección frontal $s't'_1$ es tangente a la curva de intersección.

Intersección con el cilindro B: realizar una vista de perfil (Fig. 3), haciendo aparecer el cilindro según su sección recta, que representa también la intersección.

Para facilitar el desarrollo del cilindro, dividir la elipse en partes iguales (ver tomo I, página 101); hacer pasar los planos secantes (planos perpendiculares a los planos de perfil) por los puntos de división; trazar las generatrices correspondientes del cono en vista frontal (Fig. 1), llevando las cuerdas C 3-4... C 6 a partir del eje de la base.

El plano ST determina la generatriz $s't'$, tangente a la curva en t' .

II. El cono penetra un cilindro recto de base elíptica, los ejes de los dos sólidos son oblicuos entre sí

Empleo de los planos secantes que pasan por el vértice del cono. Hacer una vista de perfil (Fig. 5), perpendicular al eje del cilindro sobre la que se proyecta la intersección en un arco de elipse $a'3'_1b'$. La base del cono se proyecta en esta vista según una elipse, obtenida como la de la figura 5 de la página 76.

Las generatrices del cono tienen sus proyecciones confundidas dos a dos en la vista frontal, pero en la vista de perfil.

Determinación del punto de unión, 9, de la generatriz del contorno aparente del cono con la elipse, proyección de perfil de la base del cono.

El segmento $S'9'_1$ (Fig. 5), tangente a la elipse, es la proyección de perfil de la generatriz $S9$, proyectada en $s'9'$ (Fig. 4). El plano tangente al cono y que pasa por $S9$, es perpendicular al plano de perfil; contiene, pues, la perpendicular al plano de perfil que pasa por s' , o sea $s'\alpha$; corta al plano que contiene la base según una tangente a esta base que pasa por la intersección α con el plano de dicha base. El diagrama de $\alpha9$, abatimiento de esta tangente, y de 9 se deduce $9'$ y $9'_1$.

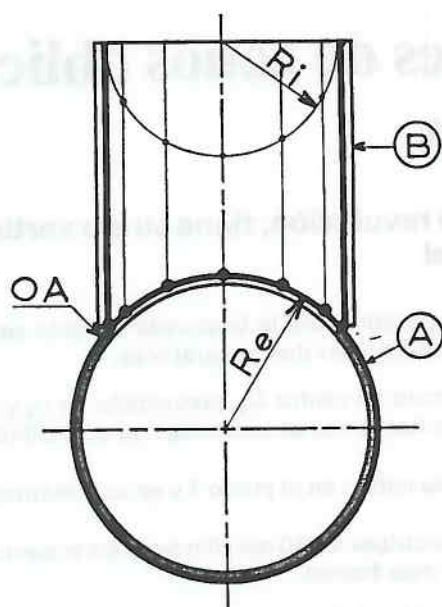


Fig. 1. Soldadura en ángulo

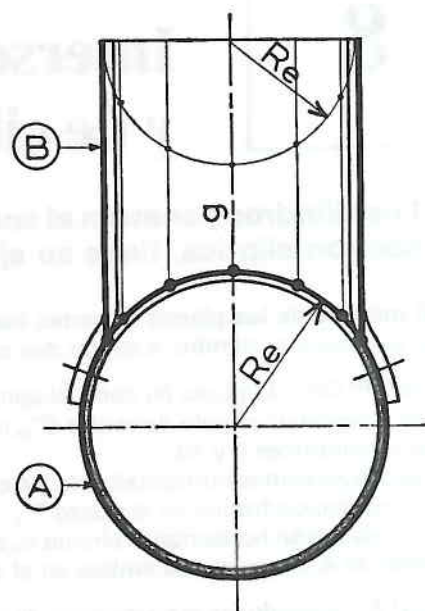


Fig. 2. Soldadura por puntos o roblonado

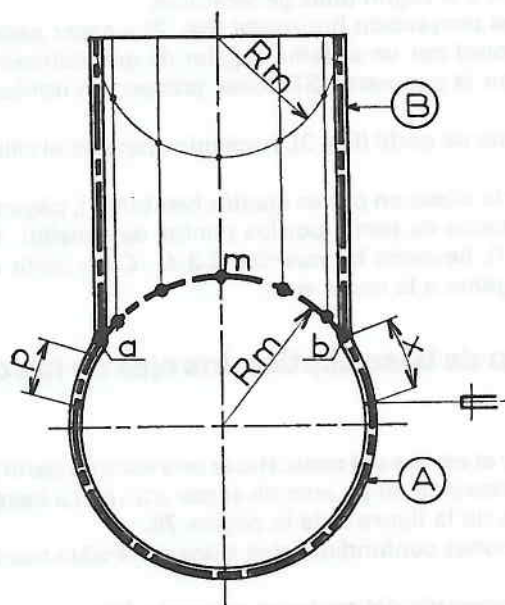


Fig. 3. Sobre cilindro penetrado

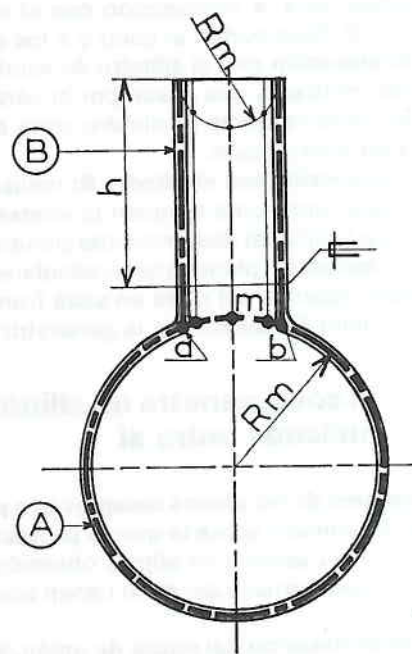


Fig. 4. Sobre cilindro penetrante

Soldadura a tope

9

Principales disposiciones empleadas en chapistería y calderería para unir los elementos de una «intersección»

En los diagramas precedentes no hemos tenido en cuenta el espesor de las chapas. Hemos realizado diagramas *teóricos*: nuestro objetivo era familiarizar al lector con los métodos de trazado empleados.

Es evidente que en la práctica, antes de hacer el diseño de una intersección, se debe tener en cuenta también tanto el modo de unión de los dos elementos como el espesor de las chapas. Esto lleva a ejecutar los diseños representando cada elemento con sus dimensiones, tomadas ya por la fibra neutra, ya por la fibra interior, ya incluso por la fibra exterior; **los desarrollos se ejecutan siempre por la fibra neutra.**

Las principales uniones de tubos cilíndricos

Actualmente, la casi totalidad de las uniones se hacen por soldadura autógena: al soplete para las chapas delgadas ($e \leq 1,5$ ó 2 mm), al arco eléctrico para las chapas medias y gruesas. Además, daremos el desarrollo de un tubo de chapa gruesa roblonada.

A. INTERSECCIONES REALIZADAS CON CHAPA DELGADA

1. SOLDADURA EN ANGULO

La intersección tiene lugar sobre el diámetro exterior del cilindro penetrado y según el diámetro interior del cilindro penetrante; en consecuencia, realizar el diseño (Fig. 1) tomando el cilindro *A* por su diámetro exterior y el cilindro *B* por su diámetro interior.

Para desarrollar la penetración, teóricamente es preciso medir los arcos en la fibra neutra; pero la diferencia de desarrollo, en el caso de chapa fina, entre el arco exterior y el arco medio es despreciable, por lo que se sacan las dimensiones del diseño hecho por el diámetro exterior.

2. SOLDADURA POR PUNTOS O UNION POR ROBLONADO

Estos dos modos de unión necesitan un recubrimiento constituido por una pestaña caída sobre el cilindro *B* (Fig. 2).

Diseño: cilindro *A* por su diámetro exterior, así como el cilindro *B*, para tener longitudes de generatrices próximas a la realidad, habida cuenta de los radios de «espesor» considerados no acotados, y por tanto, pequeños.

Desarrollos: cilindro *A*: desarrollar la penetración según el diseño, es decir, por el diámetro exterior de *B*; en el momento de recortar, «morder» ligeramente el trazo para tener en cuenta el «radio de espesor», sobre todo perpendicularmente a las generatrices *g*.

Cilindro *B*: añadir la anchura del pliegue, trazando una paralela a la transformada de la intersección.

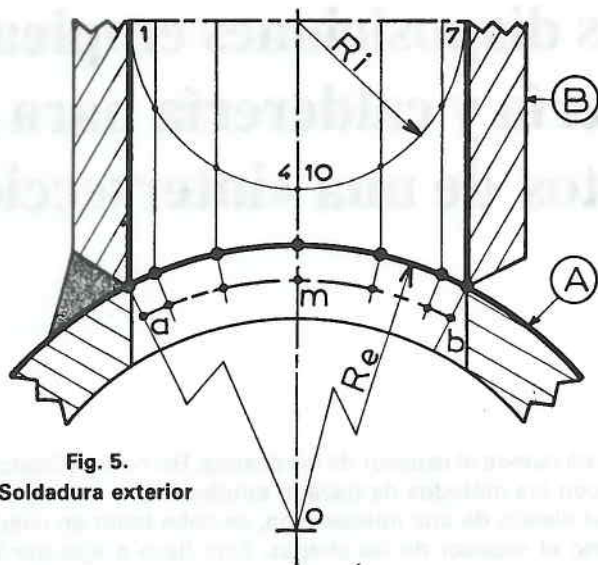


Fig. 5.
Soldadura exterior

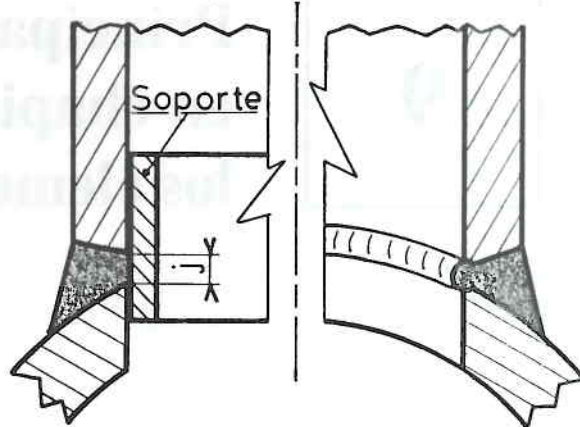


Fig. 6.
Soldadura exterior con repaso por el trasdós

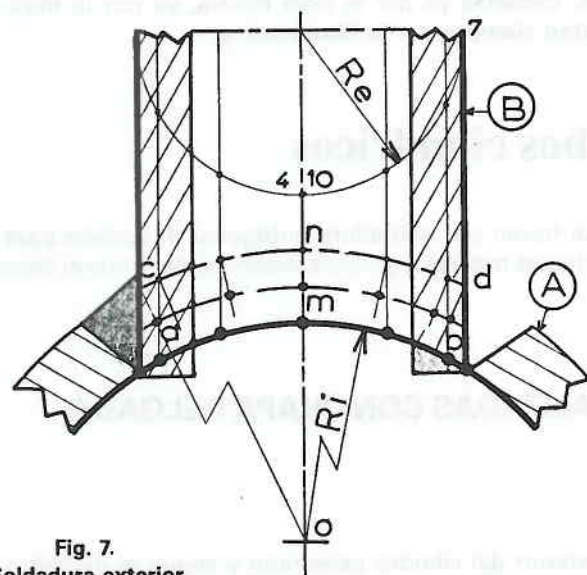


Fig. 7.
Soldadura exterior

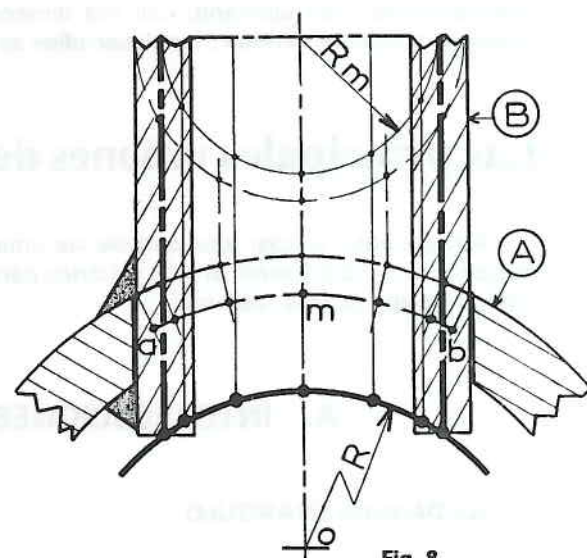


Fig. 8.
Soldadura exterior e interior

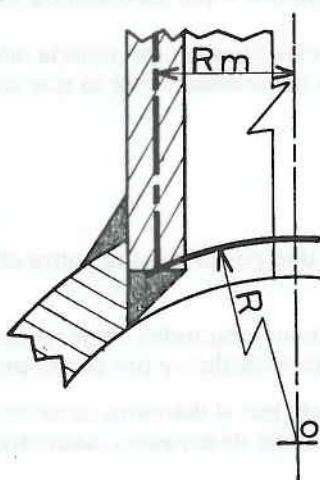


Fig. 9.

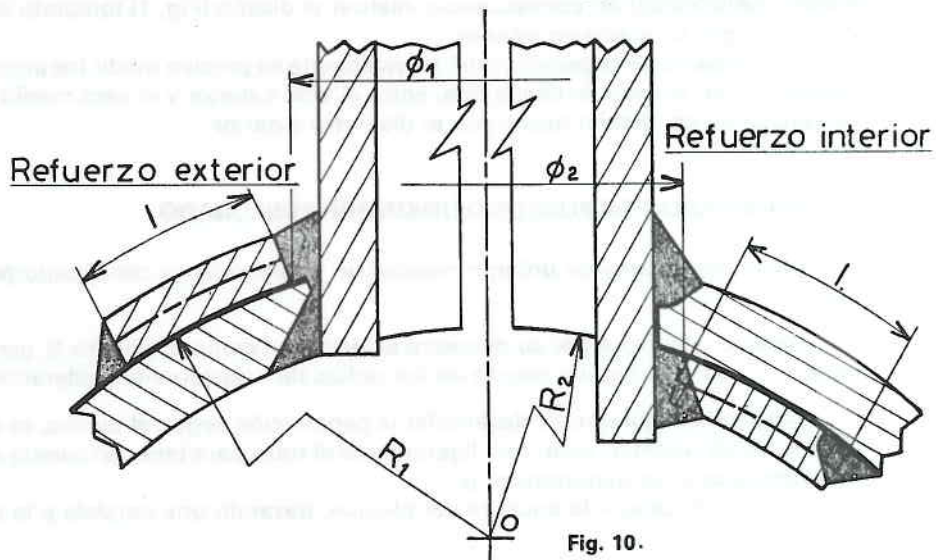


Fig. 10.

1. SOLDADURA EXTERIOR SOLAMENTE

Primera disposición (Fig. 5): la intersección tiene lugar sobre el cilindro (geométrico) interior de B y sobre el cilindro exterior de A . Establecer el diseño según los diámetros respectivos.

Para desarrollar la penetración en A tomar el arco amb , situado en la fibra neutra.

OBSERVACIONES. 1. Antes de ejecutar el chaflán en el tubo B , es preciso tener en cuenta el chaflán que se forma naturalmente y que disminuye progresivamente de las generatrices 1 y 7 hacia las generatrices 4 y 10.

2. Si se adopta para soldar una de las disposiciones indicadas en la figura 6, es preciso tener en cuenta el juego j , es decir, disminuir la altura de cada generatriz de B en el valor j .

NOTA. Si se hace uso de un anillo soporte, éste debe quitarse después de la terminación de la soldadura.

Esta disposición se puede adoptar también, cuando la soldadura es posible por el lado interior del cilindro; en este caso la soldadura debe ser trabajada y repasada por el envés.

Segunda disposición: el tubo B penetra en el interior de la envoltura A (Fig. 7).

Establecer el diseño por el diámetro interior de A y por el diámetro exterior de B para desarrollar B .

El desarrollo de la penetración se hace según el arco amb , medido por la fibra neutra y deducido del arco cnd .

Si se quiere que el tubo B enrase interiormente con la envoltura A , habrá que quitar el metal sobrante, que aumenta de las generatrices 4 y 10 (nulo) a las generatrices 1 y 7.

2. SOLDADURA A LOS DOS LADOS, INTERIOR Y EXTERIOR, DE LA ENVOLTURA (Figs. 8 y 9)

Diseño: se establece con el diámetro medio de B y el radio R , variando éste con el grado de penetración del tubo B en la envoltura A .

Para desarrollar la penetración, partir del arco amb , cuyos puntos se obtienen como en la figura 8, es decir, partiendo de la intersección de los dos cilindros según sus diámetros exteriores.

3. SOLDADURA A TOPE SOBRE EL CILINDRO PENETRADO

Esta unión, como la precedente, necesita una pestaña caída sobre el tubo; pero esta pestaña, cilíndrica, tiene los mismos radios, interior y exterior, que el cilindro A (Fig. 3).

Diseño: representar los dos cilindros según su diámetro medio.

Desarrollo: cilindro A : a la penetración obtenida según el arco amb , trazarle una paralela a una distancia x de la fibra neutra.

Cilindro B : añadir la anchura p del pliegue (Fig. 3) a la transformada de la intersección.

4. SOLDADURA A TOPE SOBRE EL CILINDRO PENETRANTE (Fig. 4)

La pestaña se realiza en el cilindro A . Esta preparación no conviene más que cuando hay mucha diferencia entre los dos diámetros; necesita una rectificación de la pestaña antes de soldar, por lo que se emplea poco.

Diseño: los dos cilindros por su diámetro medio.

Desarrollos: cilindro A : trazar la penetración desarrollando el arco amb , y añadir el metal necesario para la ejecución de la pestaña.

Cilindro B : desarrollar un cilindro de altura h ,

B. INTERSECCIONES REALIZADAS CON CHAPA MEDIA Y GRUESA

Las uniones soldadas que siguen son válidas para todos los espesores de chapa, pero se emplean sobre todo para las chapas medias y gruesas de los recipientes sometidos a una presión apreciable.

Las penetraciones se trazan por el exterior y se cortan con el soplete, *siempre después del curvado*, manteniendo durante el corte el eje del soplete paralelo al eje del tubo B (recto o inclinado).

Siempre que sea posible, la junta se realiza haciendo dos soldaduras, una exterior y otra interior; pero, en ciertos casos, la soldadura es imposible por el lado interior del cilindro penetrado A .

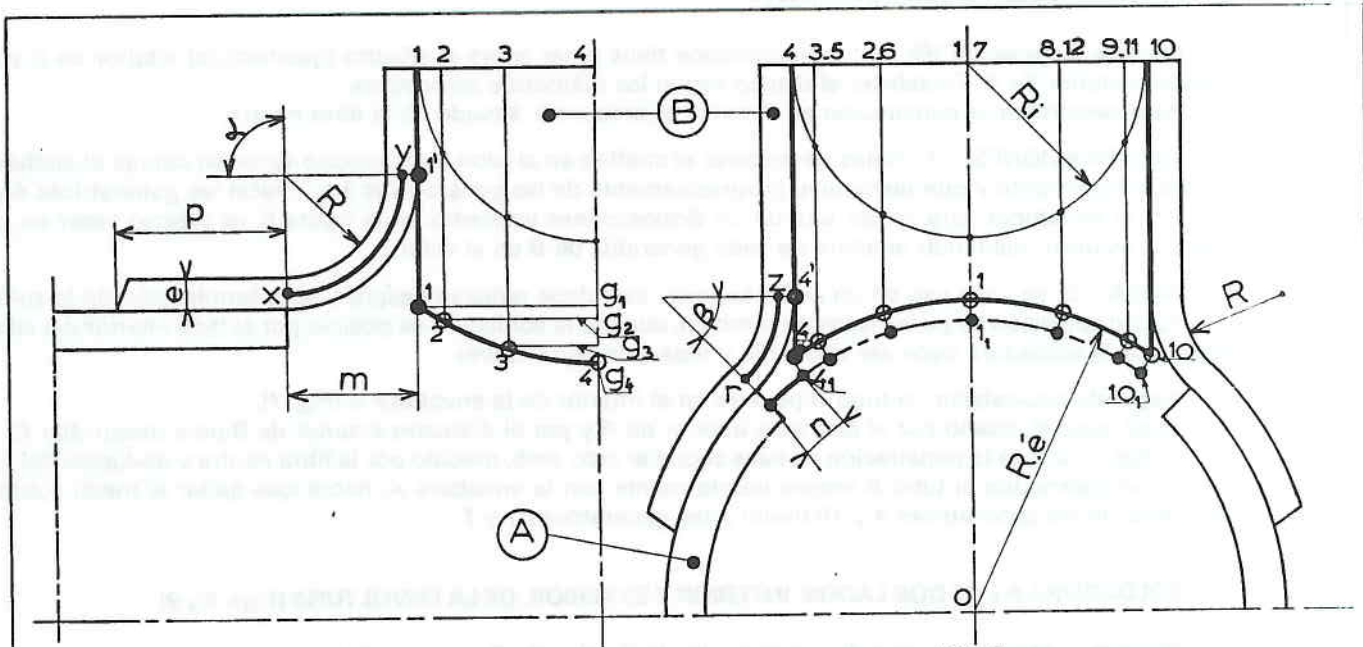


Fig. 1.

Fig. 2.

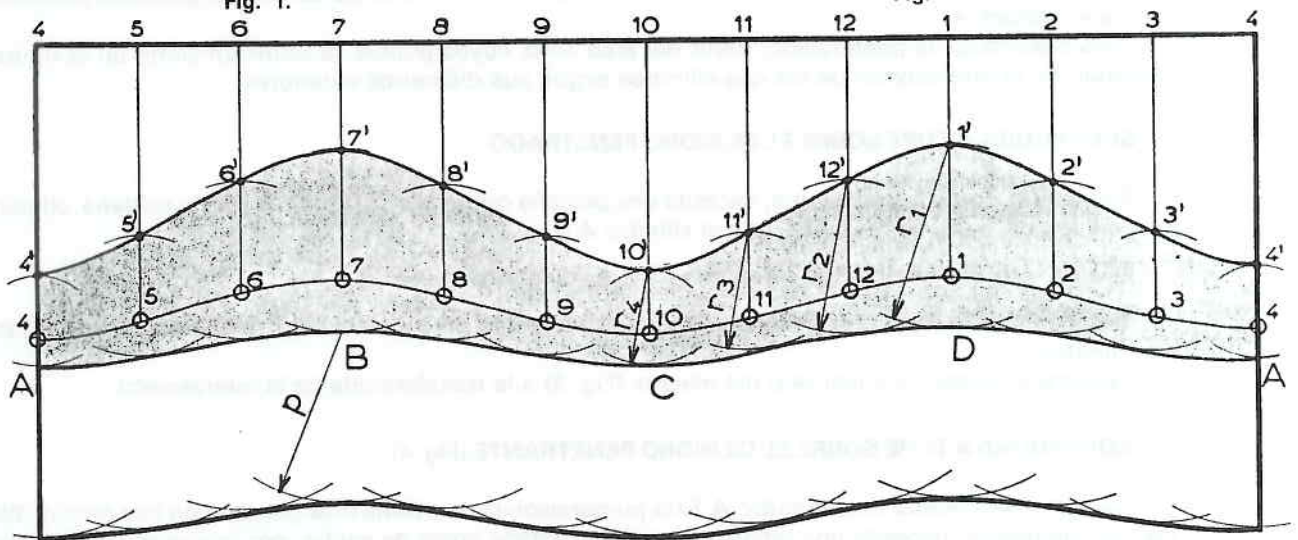


Fig. 3.

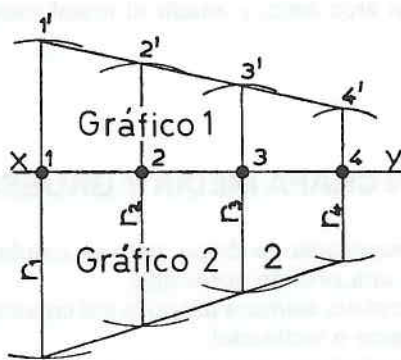


Fig. 4.

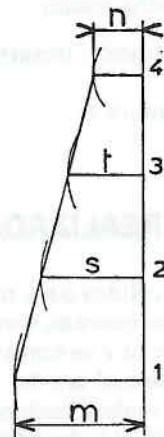


Fig. 5.

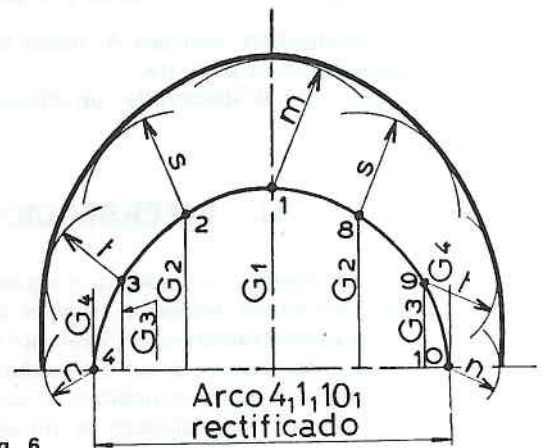


Fig. 6.

Cuando las envolturas se van a someter a fuertes presiones, hay que utilizar collarines de refuerzo colocados ya exteriormente (caso general), ya interiormente (Fig. 10).

Para desarrollar estos collarines construir la penetración entre un cilindro de diámetro $\varnothing 1$ o $\varnothing 2$ y un cilindro de radio R_1 o R_2 , trazándole después una paralela a la distancia 1.

OBSERVACIÓN. No siendo este libro una obra de tecnología, las formas de los cordones de soldadura representados en las figuras 5 a 10 están dadas únicamente a título de ejemplo. La forma de los chaflanes (natural, en V, en tulipán, en J, etc.) varía según los espesores, los esfuerzos sufridos por las soldaduras y también según los constructores.

C. UNION POR ROBLONADO

Esta unión necesita una pestaña caída sobre el tubo. Puesto que la chapa es gruesa, hay que tener en cuenta el radio de «espesor», subrayando que, mientras el radio R permanece constante, el ángulo de «espesor» varía. En las figuras 1 y 2 el ángulo máximo α es de 90° perpendicularmente a las generatrices 1 y 7, y disminuye progresivamente hasta β en la perpendicular de las generatrices 4 y 10.

El método de desarrollo que sigue ofrece la ventaja de referir sobre el tubo las líneas de origen del espesor, lo que facilita la ejecución de la pestaña.

DISEÑO

Realizar una vista de frente y una vista de perfil, haciendo figurar los espesores. Determinar la intersección de un cilindro A siguiendo su radio exterior con un cilindro B siguiendo su radio interior; la intersección se proyecta en el arco 4... 1... 10 (Fig. 2); que denominaremos *intersección teórica*.

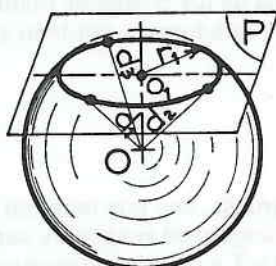
DESARROLLO DEL TUBO B (Fig. 3)

1. Determinación de la curva 4... 10... 4, transformada de la intersección teórica.
2. Trazado de la transformada 4'... 10'... 4', que representa el principio del espesor: reducir cada generatriz una longitud dada por el gráfico 1 (Fig. 4), establecido de la manera siguiente:
dividir una recta cualquiera xy en tres partes iguales, trazar perpendiculares en los puntos 1, 2, 3, 4;
desde 1, llevar $1 - 1' = R + e$, tomado de la figura 1;
desde 4, llevar $4 - 4'$, tomado de la figura 2;
los puntos 2', 3' están situados en la recta $1' - 4'$.
3. Trazado de la transformada $ABCD A$, que representa el fin del espesor. Partiendo de la transformada precedente:
con centro en los puntos 4', describir arcos de radio r_1 , siendo éste igual al arco xy (Fig. 1) rectificado;
desde los puntos 2', 12', 8', 6' describir arcos de radio r_2 ;
desde los puntos 3', 11', 9', 5' describir arcos de radio r_3 .
La *tangente* a todos estos arcos es la transformada buscada.
4. Trazado de la extremidad de la pestaña: trazar una paralela a la curva $ABCD A$ y a una distancia igual a la anchura p del pliegue.

OBSERVACION. El diseño y el desarrollo de un tubo con gran radio de espesor, soldado a tope o por puntos (chapa delgada) sobre el cilindro A , se ejecutarían de la misma manera.

DESARROLLO DE LA PENETRACION EN EL CILINDRO A (Fig. 6)

1. Trazar la penetración teórica: siendo el eje 4-10 igual al arco 4₁... 1₁... 10₁ rectificado, tomado por la *fibra neutra* (Fig. 2).
2. Transportar desde 4 y desde 10 el arco rectificado n (Fig. 2); llevar sobre la generatriz G_1 la longitud m , tomada de la figura 1, de los puntos 1 y 7; el gráfico (Fig. 5) da en 2 el radio s de los arcos de centros 2, 6, 8, 12, y en 3 el radio t de los arcos de centros 3, 5, 9, 11.
3. Hacer pasar una curva tangente a estos arcos de círculo.



$$d_1 = d_2 = d_3$$

Fig. 1.

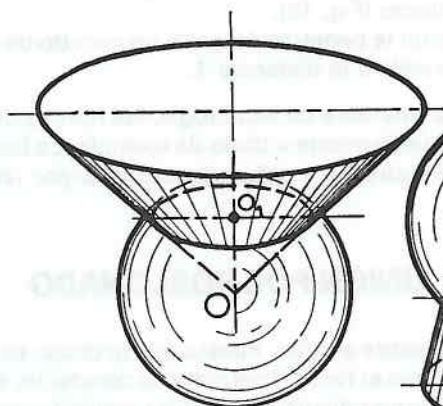


Fig. 2.

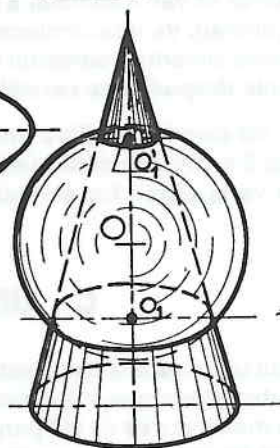


Fig. 3.

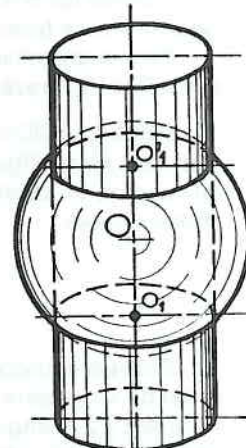


Fig. 4.

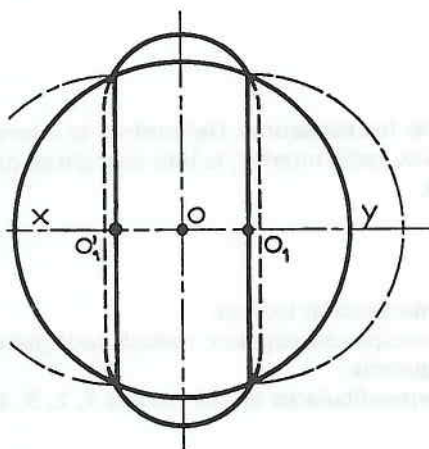


Fig. 5.

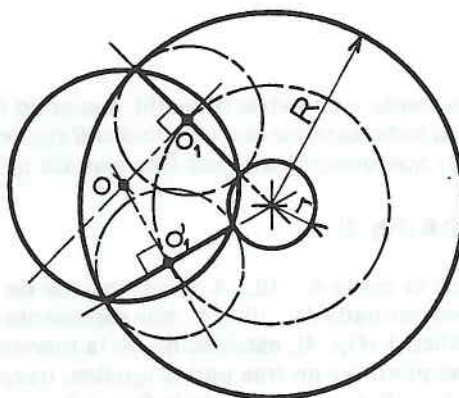


Fig. 6.

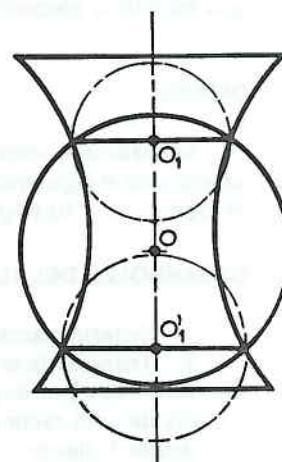
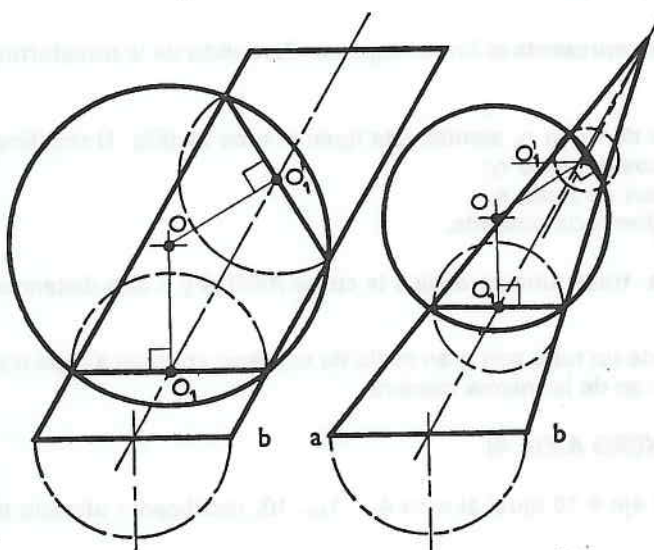


Fig. 7.



Círculos o_1 paralelos a ab
Círculos o'_1 antiparalelos a ab

Fig. 8.

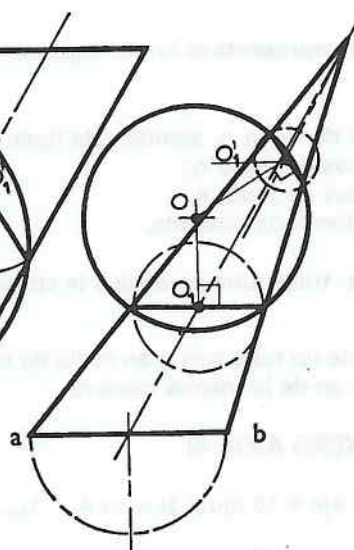


Fig. 9.

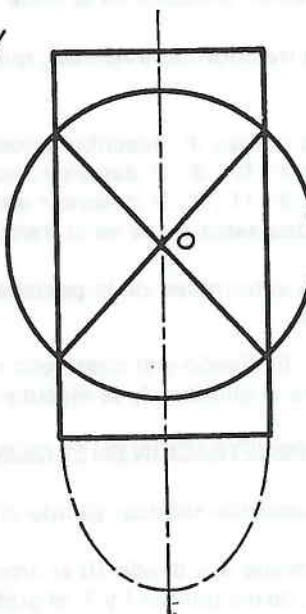


Fig. 10.

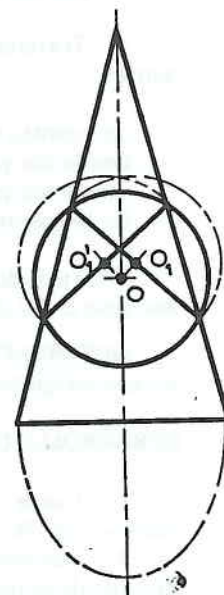


Fig. 11.

10

Búsqueda de las intersecciones por el método de las esferas secantes

I. GENERALIDADES

Todas las secciones planas de una esfera son circulares. En efecto, el plano secante P (Fig. 1) determina una sección que tiene todos sus puntos a la misma distancia del centro O de la esfera, puesto que están situados sobre la misma superficie esférica (ver capítulo 19).

1.º **Se puede considerar que el círculo de centro o_1 es la sección recta de un sólido de revolución**, obtenida cortando éste por una esfera, cuyo centro O está situado en el eje de revolución del sólido:

a) El círculo o_1 es la base del cono de revolución de altura Oo_1 (Fig. 1); es también una sección recta del cono de revolución de las figuras 2 y 3.

b) El círculo o_1 puede ser la sección recta de un cilindro de revolución (Fig. 4) o

c) la de un toro de revolución (Fig. 5), o incluso

d) la de un sólido de revolución cualquiera (Fig. 7).

e) El círculo o_1 puede ser la sección plana de un toro de revolución por un plano que pasa por su eje de rotación (Fig. 6). En ese caso el centro o de la esfera no está situado en el eje de rotación xy del toro, sino en el plano ecuatorial del toro, en una perpendicular al radio R .

2.º **El círculo de centro o_1 puede ser también la sección oblicua:**

a) de un cilindro oblicuo de base circular (Fig. 8) (1);

b) de un cono oblicuo de base circular (Fig. 9) (2). Y, en ciertas condiciones (ver lámina siguiente).

c) de un cilindro recto u oblicuo de base elíptica (Fig. 10);

d) de un cono recto u oblicuo de base elíptica (Fig. 11).

En estos diferentes casos, excepto los c y d , el centro o de la esfera no está situado en el eje del sólido, sino en una perpendicular al plano secante que determina el círculo o_1 común a la esfera y al sólido.

CONCLUSION. La intersección de una esfera y de un sólido es un círculo, cuando ciertas secciones planas del sólido son circulares y cuando el centro de la esfera está situado en una perpendicular a una sección plana circular del sólido, siendo el pie de la perpendicular el centro de la sección.

Caso particular: si el sólido es de regulación, el centro de la esfera está situado en el eje de revolución del sólido (excepción Fig. 6).

(1) Ver tomo I, página 111.

(2) Ver tomo I, página 105.

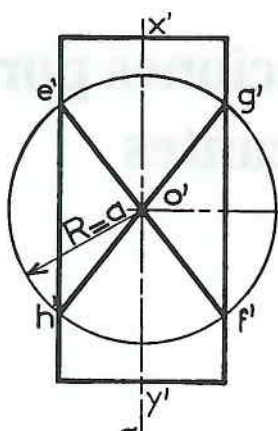


Fig. 1.

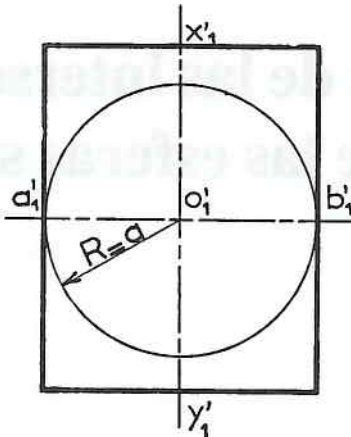


Fig. 2.

La Fig. 2 es la vista de perfil común a las Fig. 1 y 3

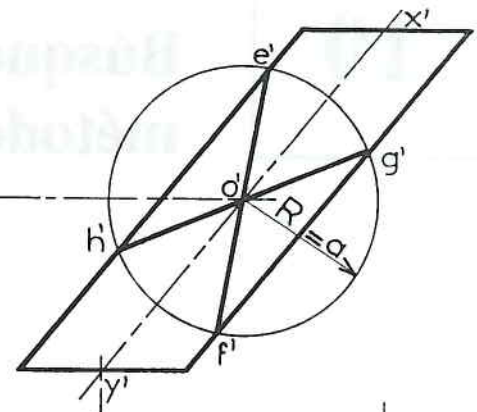


Fig. 3.

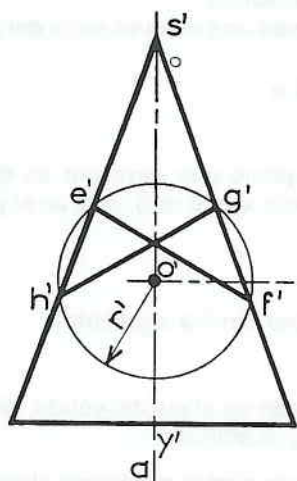


Fig. 4.

La Fig. 5 es la vista de perfil común a las Fig. 4 y 6

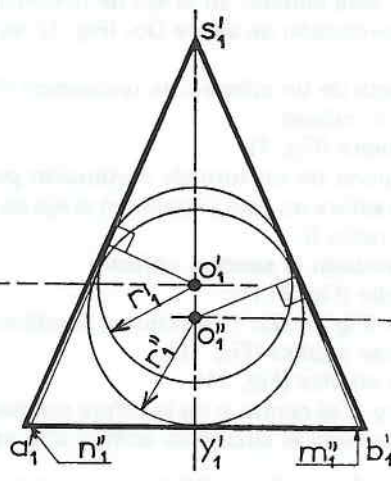


Fig. 5.

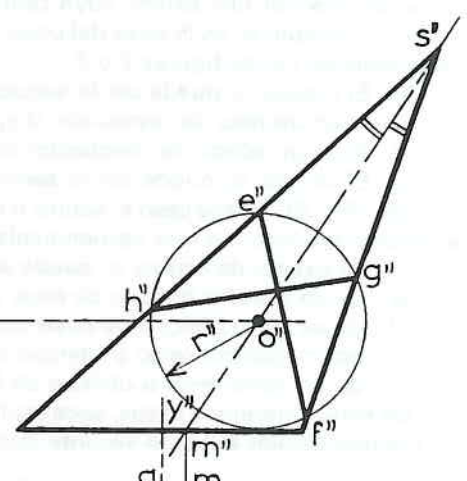
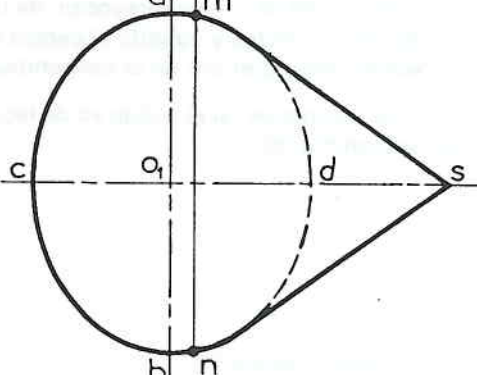
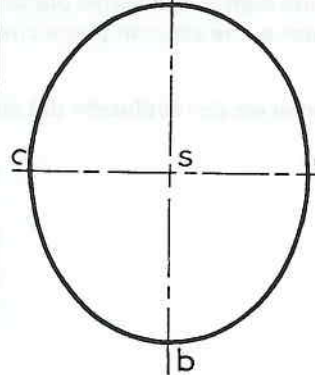


Fig. 6.



APLICACION A LA BUSQUEDA DE LAS INTERSECCIONES

De lo que antecede se puede deducir que, mediante el empleo de las esferas secantes, es posible trazar la curva de intersección de dos sólidos, a condición de que:

- 1.º al menos un sólido sea de revolución;
- 2.º si el segundo sólido no es de revolución, admita secciones circulares;
- 3.º los ejes de los sólidos sean concurrentes y que el plano que forman sea paralelo al plano de proyección considerado;
- 4.º todas las secciones circulares estén situadas en planos perpendiculares al plano de proyección considerado, y por tanto también perpendiculares al plano que contiene los ejes.

Si se cumplen todas estas condiciones, se deduce que el centro de la esfera secante está situado:

- 1.º en el punto de encuentro de los dos ejes, si los dos sólidos son de revolución;
- 2.º en el eje del sólido de revolución, en su intersección con una perpendicular a una sección circular del otro sólido, perpendicular trazada por el centro de la sección.

II. EMPLEO DE LAS ESFERAS SECANTES PARA DETERMINAR LAS SECCIONES CIRCULARES DE LOS CILINDROS Y DE LOS CONOS, RECTOS U OBLICUOS, DE BASE ELIPTICA

En geometría se demuestra el teorema siguiente: si dos superficies, tales como la esfera, el cilindro y el cono, rectas u oblicuas, de base circular, son *bitangentes*, su intersección se compone de dos curvas planas que se cortan en los puntos de contacto de las superficies.

Se dice que dos superficies son *bitangentes*, cuando son tangentes en dos puntos; en cada uno de estos puntos admiten el mismo plano tangente.

Aplicaciones

A. BUSQUEDA DE LA DIRECCION DE LOS PLANOS QUE DETERMINAN SECCIONES CIRCULARES EN EL CILINDRO RECTO U OBLICUO DE BASE ELIPTICA

En las dos figuras 1 y 3, el eje mayor AB de la elipse es de canto.

Por un punto o' , tomado en el eje XY de los cilindros, trácese un círculo de diámetro igual al eje mayor de la elipse de base. Este círculo es la proyección frontal de una esfera tangente al cilindro en dos puntos, $a'_1b'_1$, referidos en la figura 2. Su intersección con el cilindro se compone de dos curvas planas que, situadas en planos de canto, se proyectan en $e'f'$, y $g'h'$. Las secciones planas de una esfera que pasa por su centro son círculos máximos de esta esfera. Las secciones EF y GH son, pues, círculos de diámetro AB (eje mayor de la elipse). Todas las secciones paralelas ya a $e'f'$, ya a $g'h'$, son círculos.

B. BUSQUEDA DE LAS DIRECCIONES DE LOS PLANOS QUE DETERMINAN SECCIONES CIRCULARES EN EL CONO RECTO U OBLICUO DE BASE ELIPTICA

En las figuras 4 y 6, el eje mayor AB de las elipses de base es de canto; se proyecta, por tanto, en verdadera magnitud en la figura 5.

a) **Cono recto:** Con centro en un punto o'_1 cualquiera de $s'_1y'_1$, trácese un círculo tangente a las generatrices del contorno aparente $s'_1a'_1$ y $s'_1b'_1$ (Fig. 5). Este círculo es la proyección de la esfera tangente a las generatrices SA y SB . Las intersecciones de la esfera y del cono son, pues, dos superficies planas (dos círculos menores de la esfera), cuyas proyecciones frontales son las rectas $e'f'$ y $g'h'$, que unen los puntos de intersección de las generatrices del contorno aparente con el círculo de centro o' (proyección frontal de la esfera).

Todas las secciones paralelas a $e'f'$ o a $g'h'$ son circulares.

b) **cono oblicuo:** Hacer la misma construcción, recordando que el eje de un cono oblicuo no es la recta que une el vértice s'' con el centro o_1 de la base, sino la bisectriz del ángulo formado por las dos generatrices del contorno aparente (ver tomo I, capítulo 16).

En la figura 5 el círculo de centro o''_1 es tangente a las generatrices SM y SN . Las proyecciones $e''f''$ y $g''h''$ de los dos diámetros se cortan el eje $s''y''$.

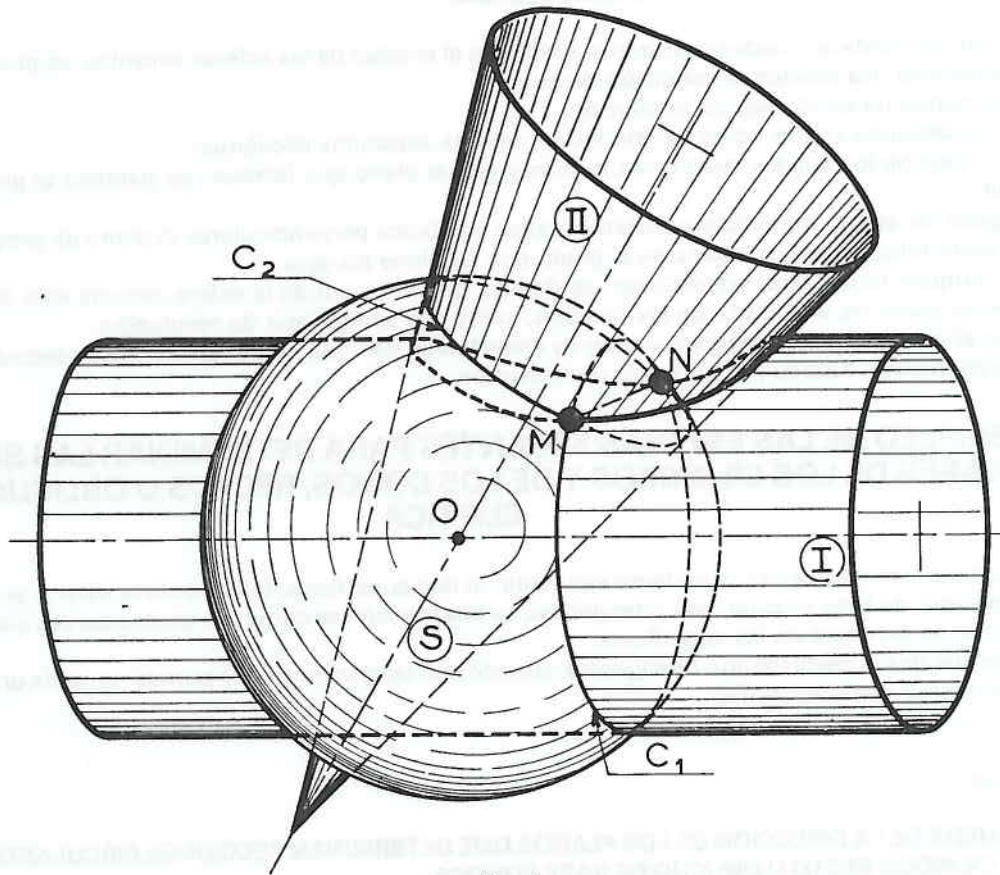


Fig. 1.

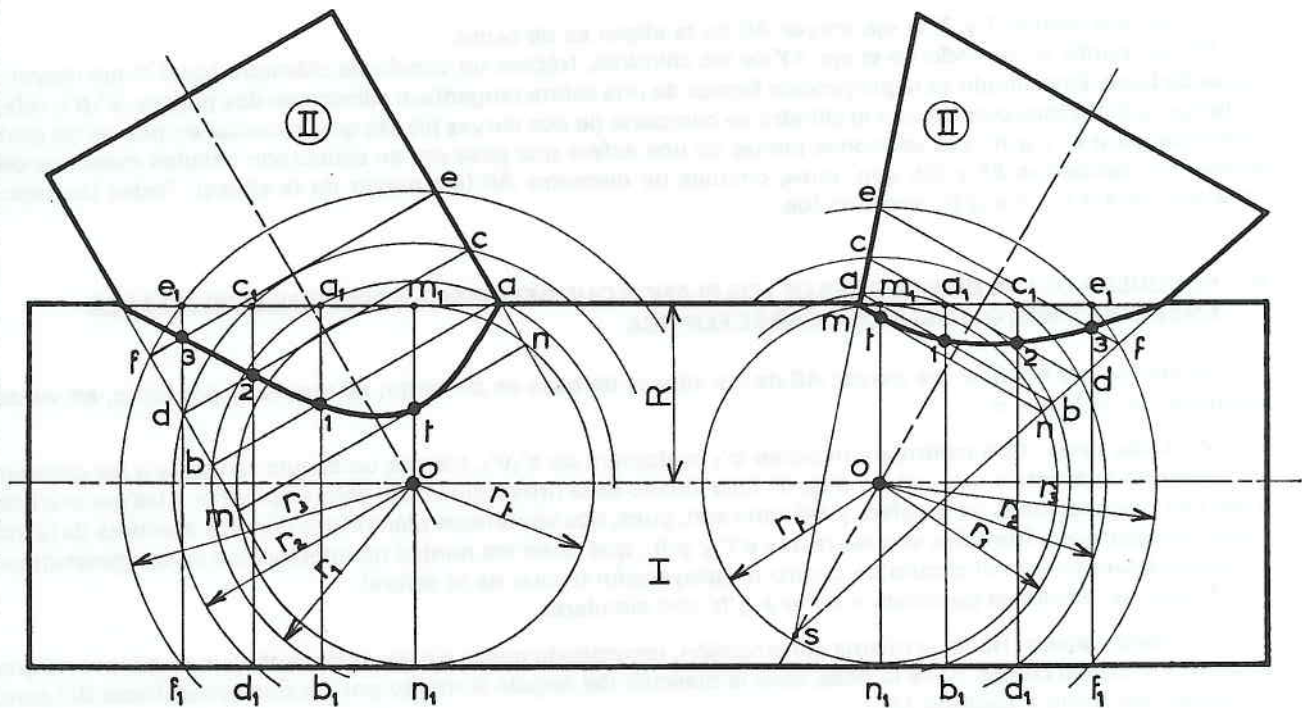


Fig. 2.

Fig. 3.

III. EMPLEO DE LAS ESFERAS SECANTES

A. Caso de dos sólidos de revolución

PRINCIPIO DE DETERMINACION DE LA INTERSECCION

Todas las esferas cuyo centro O es el punto de intersección de los ejes de los dos sólidos cortan a cada uno de ellos según una sección circular (sección recta).

Así (Fig. 1), la esfera S corta al cilindro I según un círculo C_1 y al cono II según un círculo C_2 . Estos dos círculos se cortan en los puntos M y N , que pertenecen a la curva de intersección. En el diseño, M y N , situados sobre una recta de punta, se proyectan en un solo punto (*punto doble aparente*).

INTERSECCION DE DOS CILINDROS DE REVOLUCION (Fig. 2) E INTERSECCION DE UN CILINDRO DE REVOLUCION CON UN CONO DE REVOLUCION (Figs. 3 y 4)

Trazar un círculo de radio r_1 por el punto de encuentro o de los dos ejes de los sólidos; dicho círculo representa la proyección frontal de una esfera que corta a cada cilindro según un círculo situado en un plano de canto. Estos círculos se proyectan en escorzo total en los diámetros ab y a_1b_1 . El punto 1, intersección de ab con a_1b_1 , es un punto doble aparente de la curva de intersección. Trazando los círculos de radio r_2 y r_3 se obtienen de la misma manera los puntos 2 y 3.

OBSERVACION. La menor esfera útil es tangente al cilindro penetrado, y tiene por radio $r_1 = R$ y da el punto t . Las generatrices que pasan por t son las más largas del cilindro II (Fig. 2) y de los conos II (Figs. 3 y 4). Las rectas mn son tangentes a las curvas de intersección.

Ventaja de este método: es rápido, siendo suficiente una proyección solamente.

Inconveniente: para desarrollar los sólidos penetrantes (cilindro y conos II) habrá que establecer un sistema regular de generatrices; éstas no pasan por los puntos 1, 2, 3, etc., por lo que la exactitud de su longitud depende de la precisión con la que se haya trazado la curva de intersección.

Conclusión:

1. Para conseguir desarrollos precisos, es preferible utilizar el método de los planos que pasan por las generatrices (página 75), en el cual las generatrices pasan por unos puntos bien determinados.
2. El método de las esferas secantes es interesante para dibujo, porque es rápido. En trazado, no se emplea más que en casos particulares, allí donde no se puede emplear otro método o si éste conduce a trazados complicados.

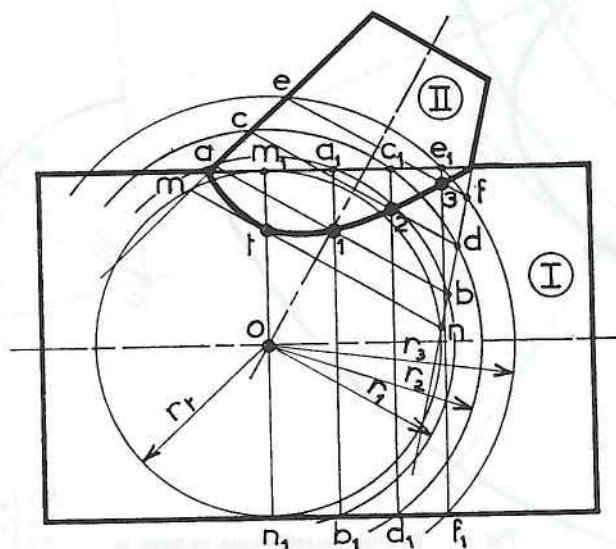


Fig. 4.

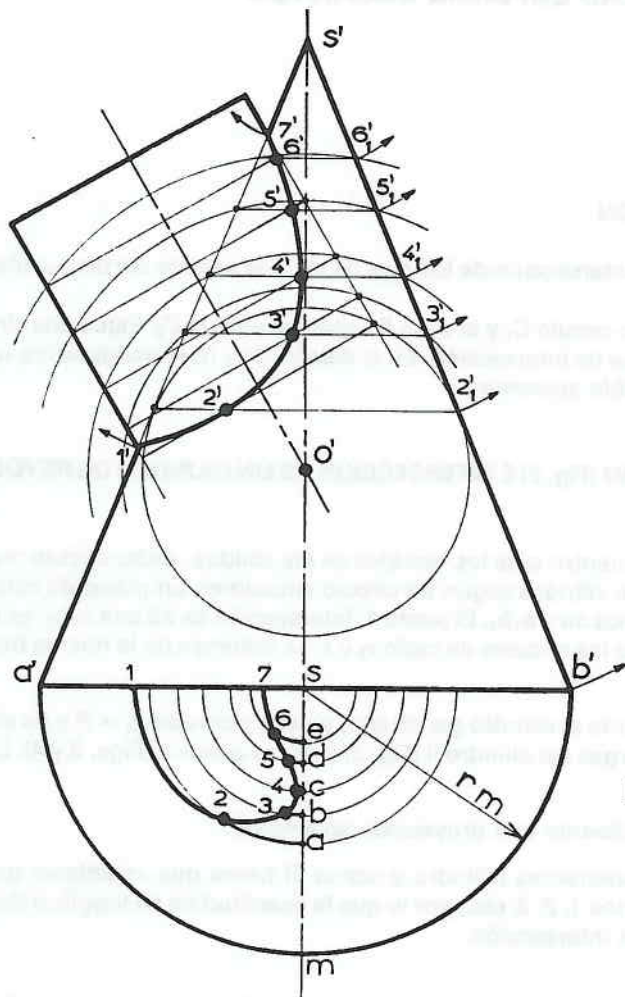


Fig. 5.

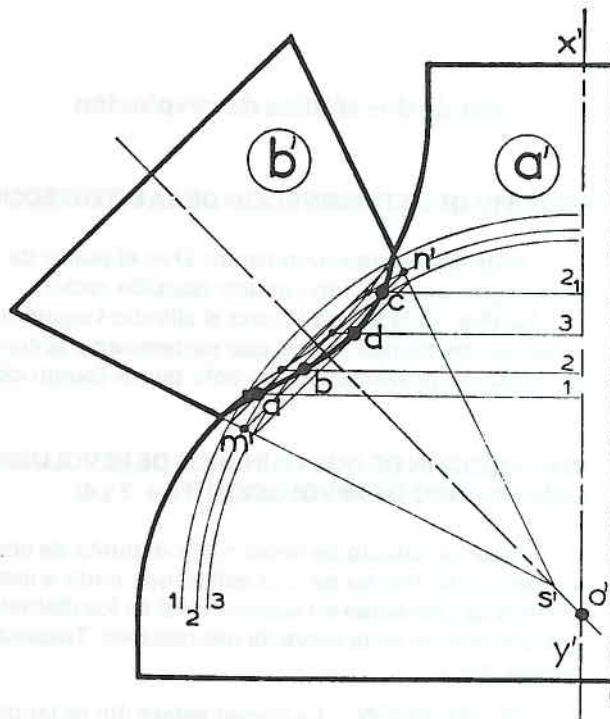


Fig. 7.

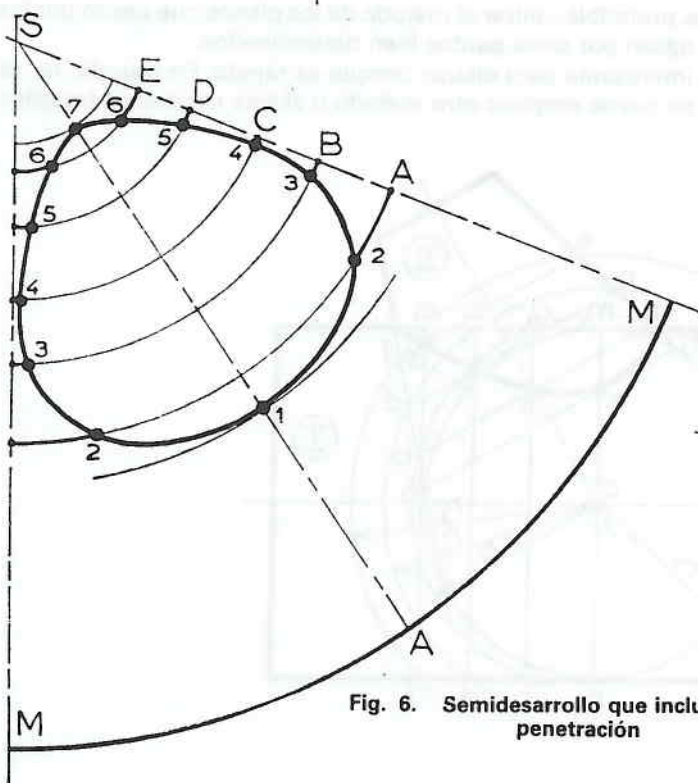


Fig. 6. Semidesarrollo que incluye la penetración

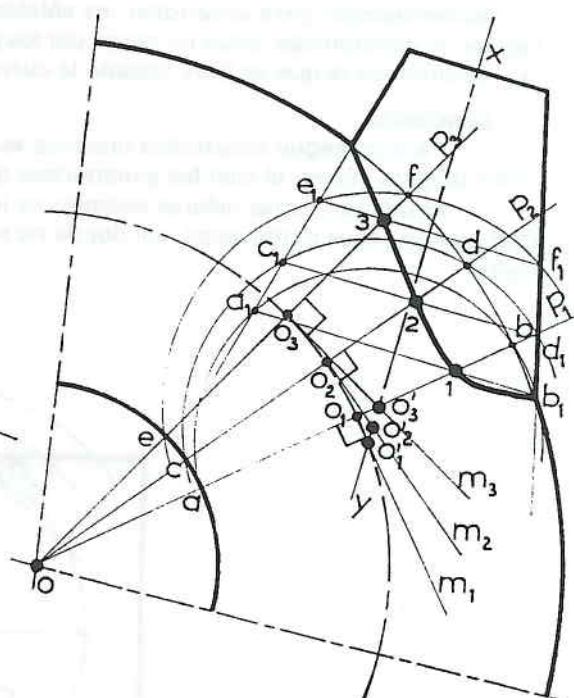


Fig. 8.

$\left. \begin{matrix} o'_1 \\ o'_2 \\ o'_3 \end{matrix} \right\} \text{centros de las} \\ \text{esferas secantes}$

$\left. \begin{matrix} o_1 m_1 \\ o_2 m_2 \\ o_3 m_3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix}$

1. Intersección de un cono y de un cilindro de revolución, cuyos ejes son oblicuos entre sí

DISEÑO (Fig. 5)

- Determinar la proyección frontal de la intersección, cortando el cilindro y el cono mediante esferas de centro o' .
- Obtener la proyección de la intersección sobre el plano horizontal, proyectando los puntos $1'-2'...6'-7'$ sobre los círculos que pasan por esos mismos puntos. Basta con la mitad de la vista.

DESARROLLO DEL CONO Y DE SU PENETRACION (Fig. 6)

Desarrollar el cono, referir y trazar la generatriz SA , que pasa por el eje de la penetración. Trazar las transformadas de los círculos por los que pasan los puntos $1'-2'...6'-7'$ de la intersección, tomando como radio $s'7', s'6'_1...s'1'$, verdaderas magnitudes de los trozos de generatrices que pasan por esos puntos.

Trazar las dos generatrices SM : $\text{arc } AM = \frac{\pi r \text{ medio}}{2}$. En cada arco, suprimir a partir de los puntos A, B, C, D , los arcos $a2, b3, c4, d5, e6$, medidos en la proyección horizontal; ejemplo: $\widehat{E6} = \widehat{e6} \widehat{A2} = \widehat{a2} (1)$.

El desarrollo del cilindro no presenta nada de particular; basta hacer un semiabatimiento de la base e inscribir un sistema regular de generatrices; como éstas son frontales, se proyectan en verdadera magnitud.

2. Intersección de un sólido de revolución A , limitado por dos superficies tóricas de eje común XY , con un cono de revolución B

Los ejes de los dos sólidos son concurrentes y situados en un plano frontal (Fig. 7), por lo que cada esfera de centro o' corta al cono en un círculo, y al sólido A en uno o dos círculos (Fig. 7).

EJEMPLO. La esfera 2 corta al cono según $m'n'$, y al sólido A según los círculos 2 y 2_1 ; las intersecciones de estos tres círculos dan los puntos b y c .

3. Intersección de un toro y de un cono de revolución. El eje XY del cono está situado en el plano del círculo medio del toro; los dos ejes no son concurrentes

Todos los planos meridianos (planos que pasan por el eje de rotación) cortan al toro en dos círculos meridianos, de los que solamente interesa uno. Así (Fig. 8), el plano P_1 corta al toro según un círculo de canto, proyectado en ab , cuyo centro es o_1 . El conjunto de los centros de las esferas que cortan al toro según el círculo o_1 es la perpendicular o_1m_1 , trazada por o_1 a ab .

El conjunto de los centros de las esferas que cortan al cono según un círculo es el eje XY ; por lo tanto, el punto o'_1 , intersección de xy con o_1m_1 , es el centro de la esfera secante, que determina dos círculos de canto proyectados en ab (sección del toro) y en a_1b_1 (sección del cono); estos dos círculos se cortan en 1, en el plano meridiano P_1 . El punto 1 es un punto de la proyección de la intersección (punto doble aparente).

Los puntos 2 y 3 se obtienen mediante la intersección de los círculos que pertenecen a las esferas de centros o'_2 y o'_3 , determinados como el centro o'_1 .

(1) Ver tomo I, capítulo 11, figuras 34 y 35.

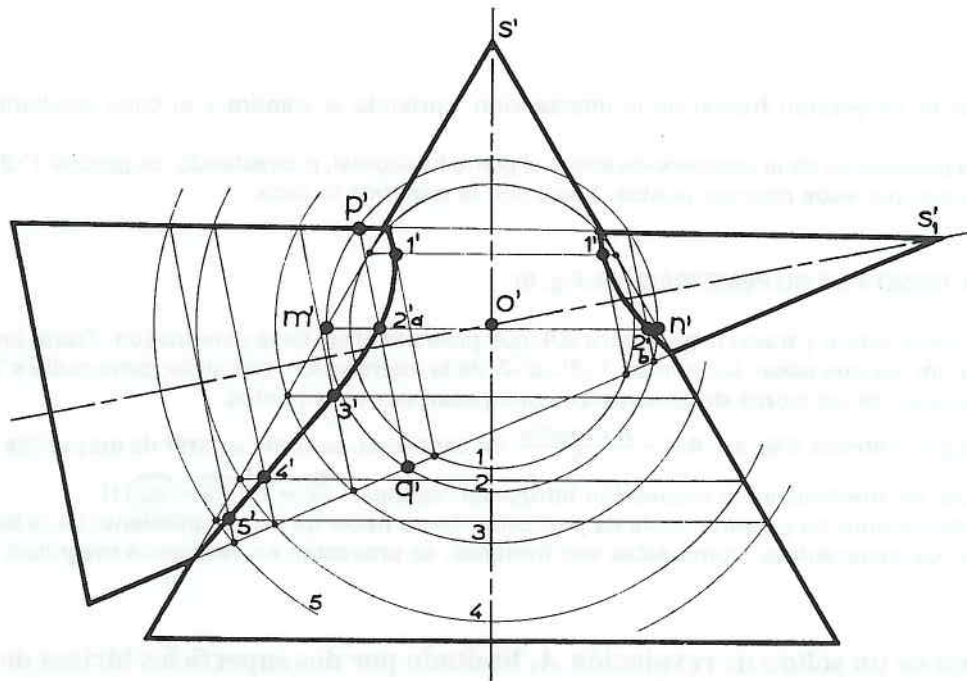


Fig. 9.

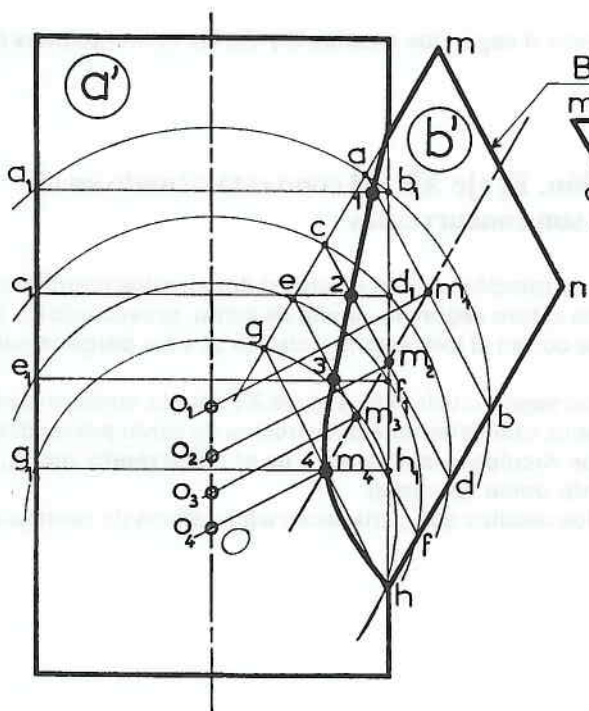


Fig. 10.

Bases circulares

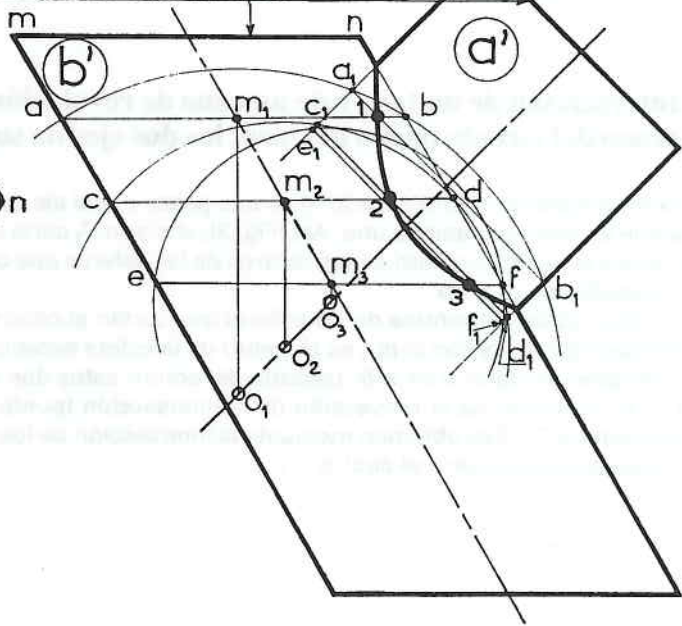


Fig. 11.

$ab, cd, ef, gh \parallel mn$
 $m_1o_1 \perp ab; m_2o_2 \perp cd; m_3o_3 \perp ef$

4. Intersección de dos conos de revolución

Por el punto o' (Fig. 9), punto de intersección de los dos ejes (*frontales*) de los conos S y S_1 , trazar los círculos 1, 2, 3, etc., que representan las proyecciones frontales de las esferas secantes. Estas esferas cortan a cada cono según unos círculos de canto. Así, la esfera 2 corta al cono S según un círculo proyectado en $m'n'$, y al cono S_1 según un círculo proyectado en $p'q'$; las intersecciones de estos dos círculos dan los puntos $2'a$ y $2'b$.

B. Intersección de un sólido de revolución A con un sólido B que representa secciones circulares

1. Intersección de un cilindro de revolución con un cilindro oblicuo de base circular

A) EL CILINDRO OBLICUO PENETRA EL CILINDRO DE REVOLUCION (Fig. 10)

Para determinar los centros $o_1, o_2, \dots$ de las esferas secantes, trazar las proyecciones de las secciones circulares $ab, cd, \dots$, paralelas a la base del cilindro oblicuo. Por los centros $m_1, m_2, \dots$ trazar perpendiculares a $ab, cd, \dots$, que cortan al eje del cilindro de revolución en los puntos $o_1, o_2, \dots$

B) EL CILINDRO DE REVOLUCION PENETRA EL CILINDRO OBLICUO (Fig. 11)

Los centros o_1, o_2, o_3 de las esferas secantes se obtienen como anteriormente, a partir de las secciones circulares del cilindro oblicuo.

2. Intersección de un cono de revolución con un cilindro oblicuo de base circular

En el caso de la figura 12, hay que elegir unas secciones circulares ab, ef , antiparalelas a la base del cilindro, porque la utilización de secciones paralelas a mn conduciría a unos centros de esferas fuera de los límites del diseño.

La esfera de centro U ha determinado la sección antiparalela st .

La esfera o_1 , que pasa por ab , corta al cono en dos círculos: a_1b_1 y c_1d_1 , y da los puntos 1 y 2 de la intersección. La esfera o_2 da los dos puntos 3 y 4.

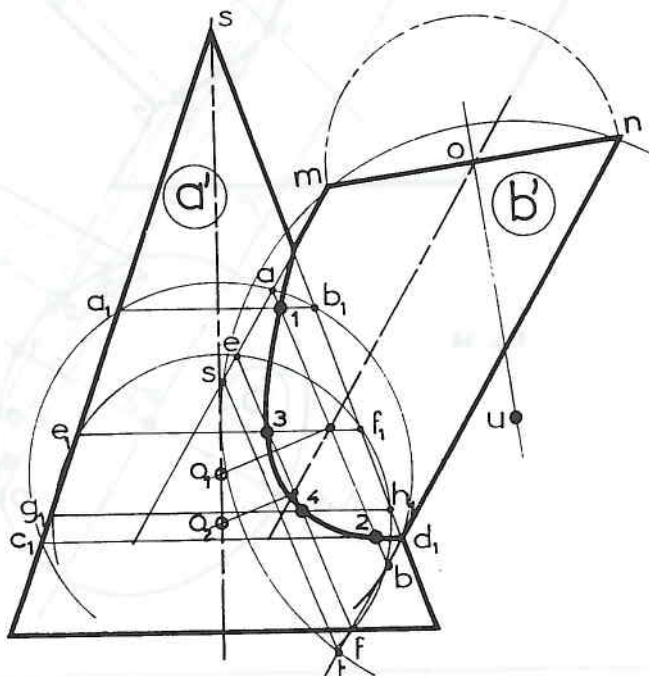


Fig. 12.
St: sección antiparalela a mn
 ab, ef , secciones paralelas a St

Fig. 13.
ab, cd, ef paralelas a mn

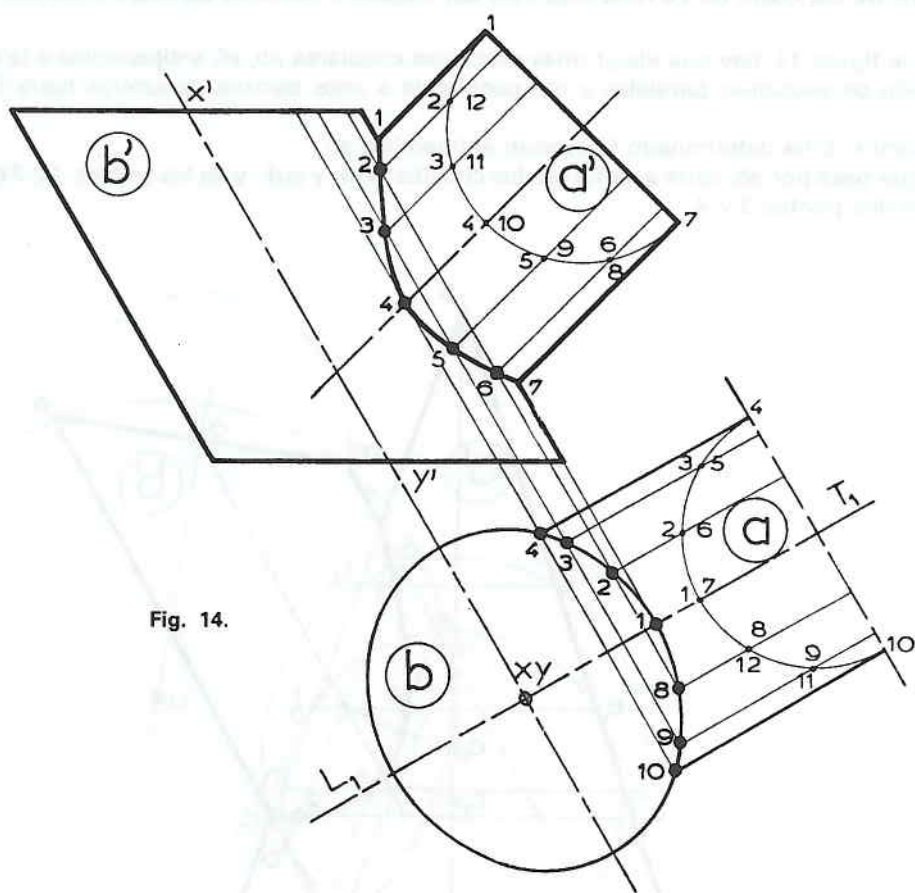
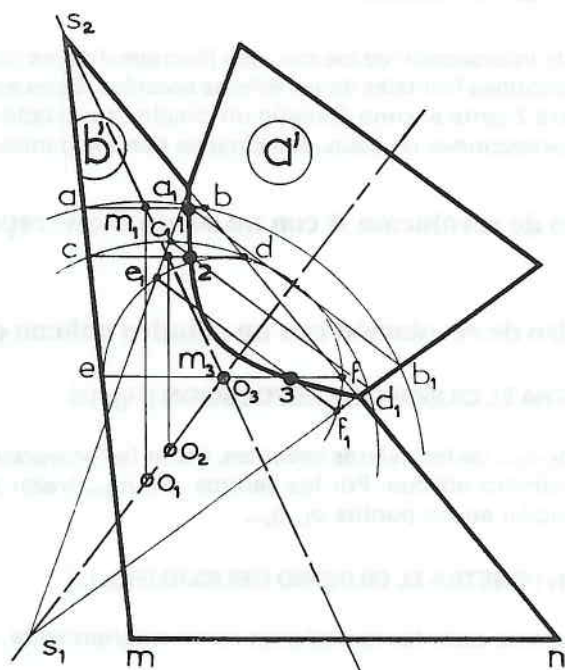


Fig. 14.

3. Intersección de un cono de revolución con un cono oblicuo de base circular (Fig. 13)

Se corta primeramente el cono oblicuo mediante planos paralelos a su base para obtener secciones circulares.

Sean ab , cd , ef , las proyecciones de estas secciones. Desde los centros de las secciones circulares (ejemplo m_1), situados en la línea de centros de las secciones circulares paralelas a la base MN , se trazan perpendiculares a estas secciones. Las intersecciones de estas perpendiculares con el eje del cono S_1 dan los puntos o_1 , o_2 , o_3 , centros de las esferas secantes, cuyas proyecciones se trazan para obtener las secciones circulares determinadas en el cono S_1 .

EJEMPLO. La esfera secante de centro O_1 pasa por ab y corta al cono S_1 en los puntos a_1 y b_1 ; la intersección de los segmentos ab y $a_1 b_1$ (proyecciones de los círculos de canto) da el punto 1 (punto doble) de la intersección de los dos conos.

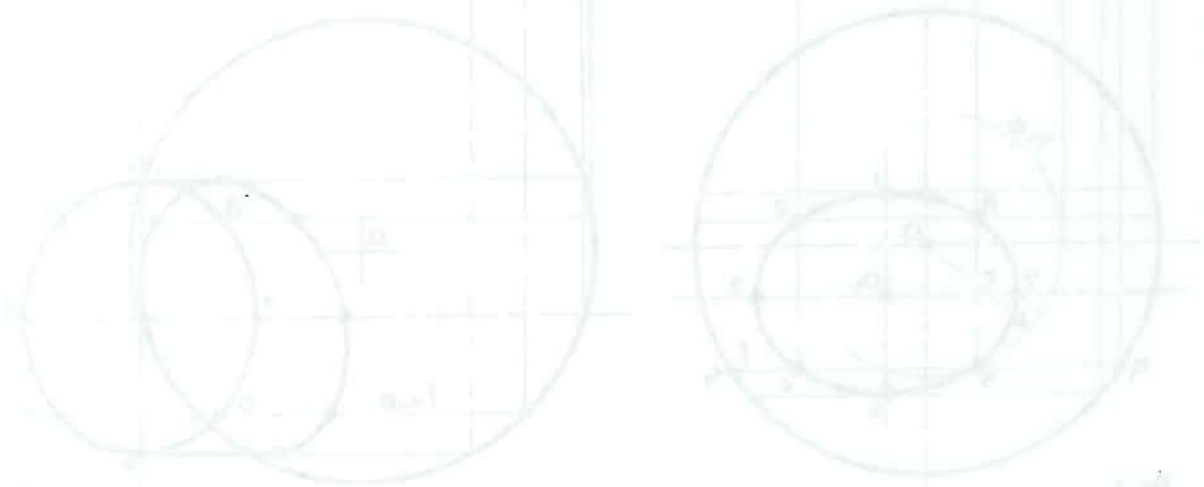
OBSERVACION SOBRE EL DISEÑO DE LA FIGURA 11

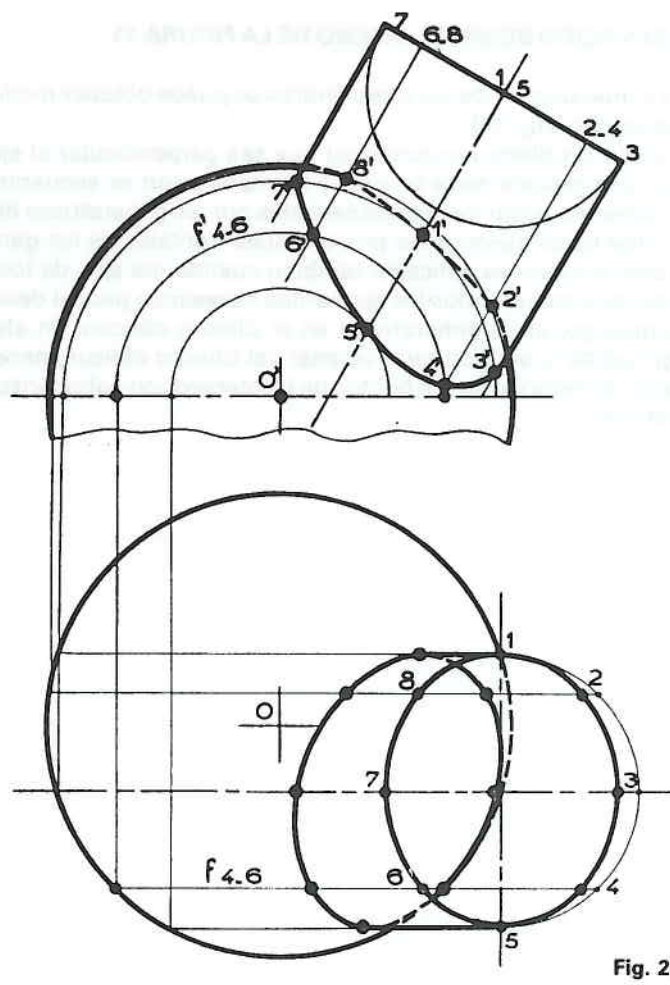
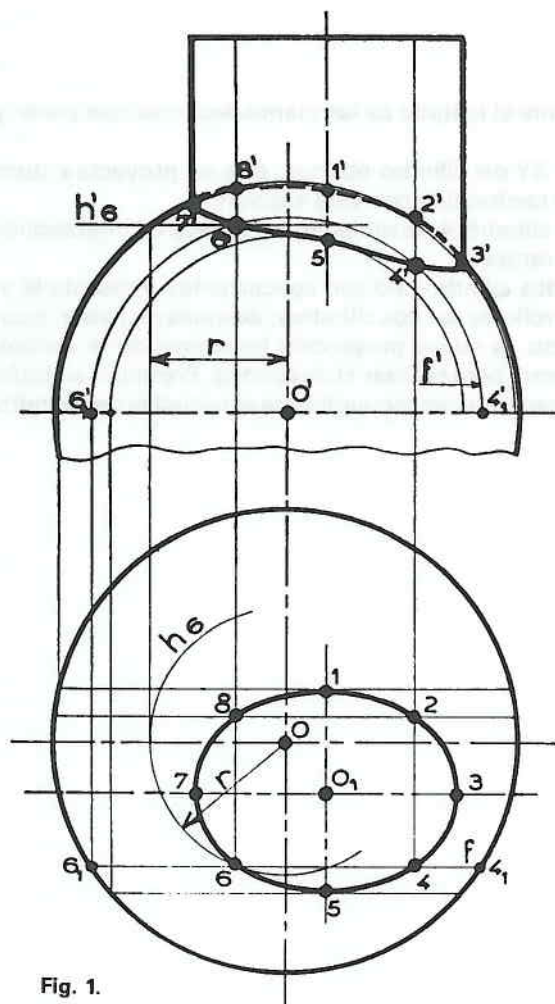
La intersección de los dos cilindros se puede obtener mediante el método de los planos secantes que pasan por generatrices (Fig. 14).

Elegir un plano horizontal tal que sea perpendicular al eje XY del cilindro oblicuo; éste se proyecta entonces según una sección recta (elipse) y la intersección se encuentra confundida con esta sección.

Haciendo pasar los planos secantes por las generatrices del cilindro A , se obtienen los puntos de intersección 1, 2...1, que basta elevar a las proyecciones frontales de las generatrices.

Este método es aplicable también cuando los ejes de los dos cilindros no son concurrentes. Presenta la ventaja de determinar todos los elementos necesarios para el desarrollo de los dos cilindros, después de haber inscrito, sin embargo, otras generatrices en el cilindro oblicuo. En efecto, la nueva proyección horizontal de la verdadera magnitud de la sección recta (elipse) del cilindro oblicuo, necesaria para realizar el desarrollo. Presenta, además, la ventaja de determinar los puntos de la intersección sobre unas generatrices regularmente espaciadas del cilindro de revolución.





11

A. Intersecciones de esferas y de cilindros

Generalmente se aplica el principio de los planos secantes, que pueden ser:

— **Paralelos al eje del cilindro:** las secciones son rectangulares en el cilindro y pasan por dos generatrices; aquéllas son circulares en la esfera; es un método aplicable cuando el eje del cilindro es paralelo a uno de los planos de proyección;

— **Perpendiculares al eje del cilindro:** las secciones son secciones rectas del cilindro y círculos en la esfera; es un método aplicable cuando el eje del cilindro es perpendicular a uno de los planos de proyección.

I. INTERSECCION DE UNA ESFERA CON UN CILINDRO RECTO DE BASE ELIPTICA, CUYO EJE ES VERTICAL

La proyección horizontal de la intersección se confunde con la del cilindro (Fig. 1).

Un plano frontal F , que pase por las generatrices 4 y 6, corta a la esfera según un círculo proyectado en 4_16_1 y f' ; la intersección de este círculo con las generatrices 4 y 6 da dos puntos de la curva proyectadas en $4-6$ y $4'-6'$.

Para construir el diseño: dividir la elipse en partes iguales y trazar la proyección horizontal de los círculos; la proyección frontal se deduce de la proyección horizontal.

OBSERVACION. Se pueden emplear planos secantes horizontales.

EJEMPLO. El plano horizontal que pasa por el punto 6 de la intersección corta a la esfera según un círculo de radio r ; la proyección frontal $6'$ de este punto es la intersección de la horizontal $h'6$ (proyecciones del círculo r) y de la generatriz 6.

II. INTERSECCION DE UNA ESFERA CON UN CILINDRO DE REVOLUCION CUYO EJE ES FRONTAL

Empleo de los planos secantes frontales (Fig. 2).

EJEMPLO. Un plano frontal que pase por las generatrices 4 y 6 del cilindro corta a la esfera según un círculo proyectado en $f'4-6$ y $f'4'-6'$; los puntos de corte de este círculo con las generatrices son dos puntos, $4'$ y $6'$, de la intersección.

La proyección horizontal de la intersección (inútil para hacer el desarrollo del cilindro) se deduce de la proyección frontal.

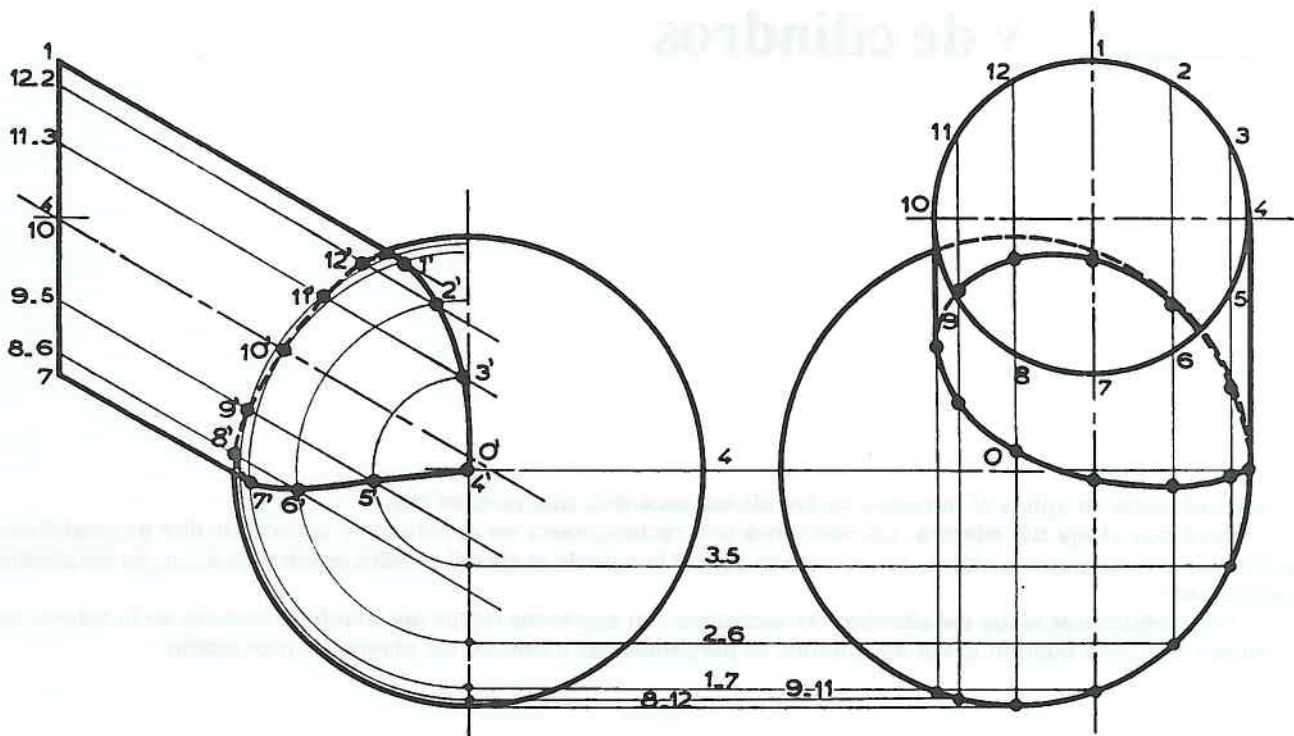


Fig. 3.

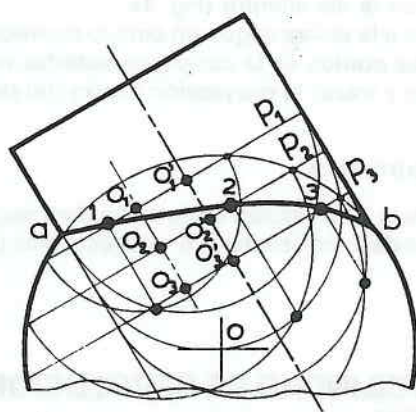


Fig. 4.

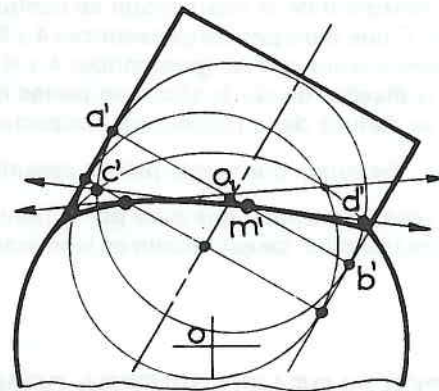


Fig. 5.

III. INTERSECCION DE UNA ESFERA CON UN CILINDRO OBLICUO DE BASE CIRCULAR, CUYO EJE ES FRONTAL

Se pueden emplear los planos secantes paralelos a la base; es preferible utilizar los planos que pasan por las generatrices (Fig. 3).

OBSERVACION. El empleo de los planos perpendiculares al eje del cilindro es apropiado para dibujo, cuando el cilindro es de revolución y su eje determina con el centro de la esfera un plano frontal. Es suficiente una sola vista, haciendo los semiabatimientos de las secciones (Fig. 4). La curva de intersección $a-1-2-3-b$ es un *arco de parábola*.

Se puede emplear también el método de las *esferas auxiliares inscritas en el cilindro*; así (Fig. 5) una esfera de centro O_1 corta a la esfera de centro O según un círculo menor de canto $c'd'$, que corta al círculo $a'b'$, también de canto, del cilindro en el punto m' . La recta $c'd'$ es tangente a la curva en m' .

IV. INTERSECCION DE UNA ESFERA CON UN CILINDRO DE REVOLUCION, CUYO EJE ES OBLICUO A TODOS LOS PLANOS DE PROYECCION

Es preciso hacer las generatrices del cilindro paralelas a uno de los planos de proyección. En la figura 6, el eje del cilindro se ha hecho frontal mediante un cambio de plano de proyección frontal; la línea de tierra auxiliar L_1T_1 es paralela a xy .

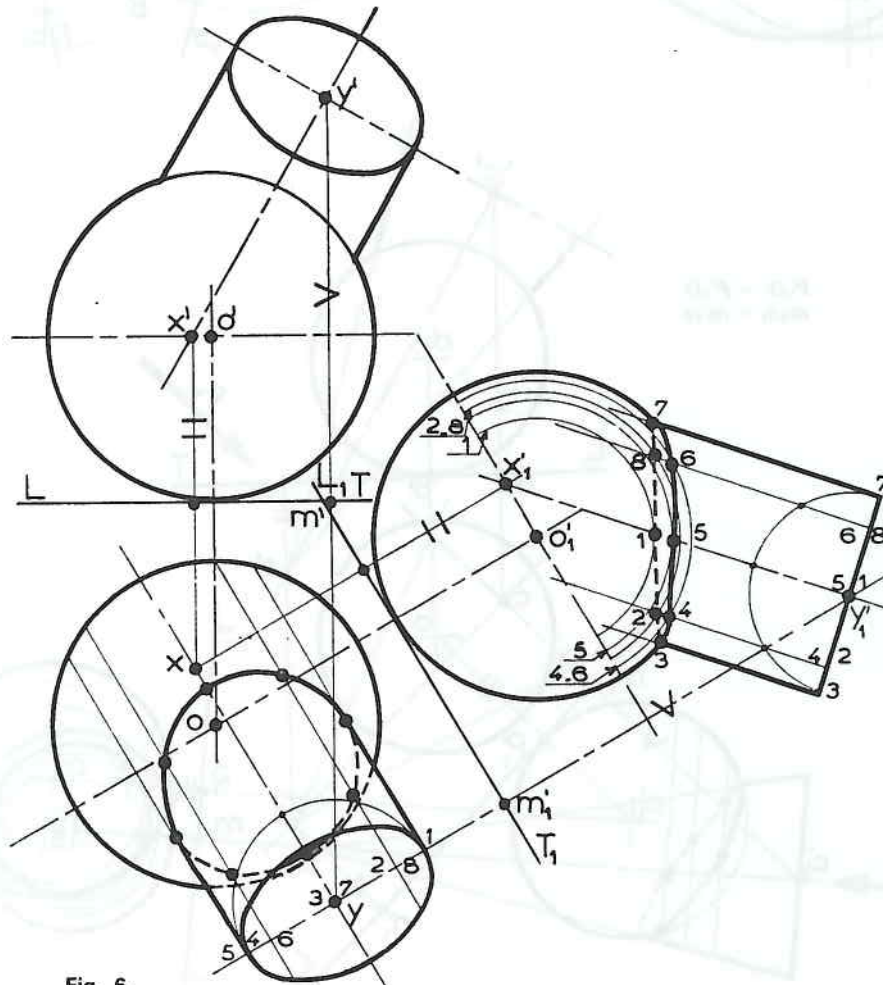
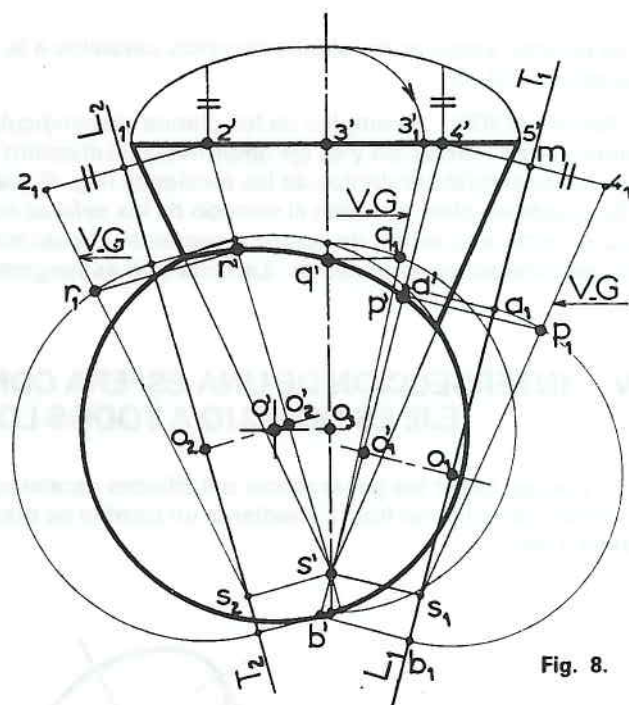
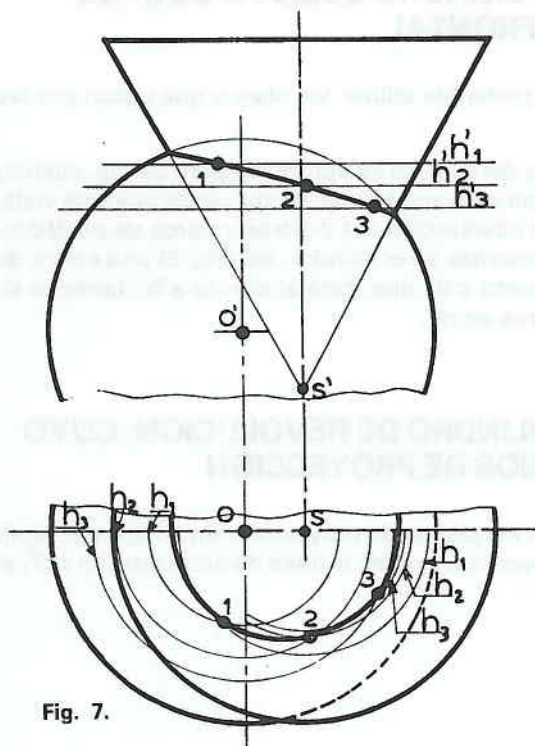
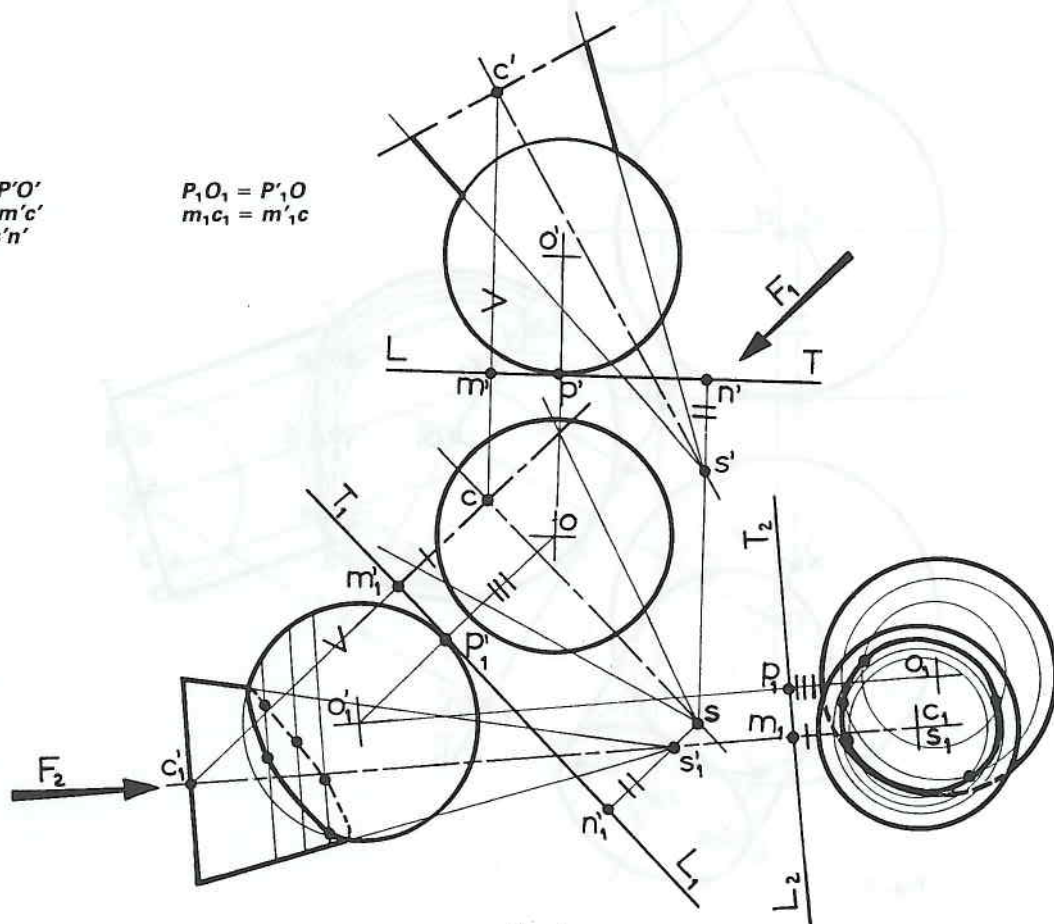


Fig. 6.



$$\begin{aligned} O_1'P_1' &= P_1'O' \\ m_1'c_1' &= m_1'c' \\ n_1's_1' &= s_1'n' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1O_1 &= P_1'O \\ m_1c_1 &= m_1'c \end{aligned}$$



B. Intersección de esferas y de conos

I. EL CONO ES DE REVOLUCION Y SU EJE PERPENDICULAR A UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

Se cortan los dos sólidos mediante planos perpendiculares al eje del cono, determinando secciones circulares en cada uno de ellos (Fig. 7).

II. EL CONO ES RECTO DE BASE ELIPTICA; SU EJE Y EL CENTRO DE LA ESFERA ESTAN SITUADOS EN EL MISMO PLANO FRONTAL

Se utilizan unos planos secantes que, pasando por las generatrices del cono, determinan una sección triangular en el cono y un círculo en la esfera.

Se encuentran los puntos de intersección, proyectando las secciones determinadas por los planos secantes sobre un plano auxiliar paralelo a estos planos.

EJEMPLOS.

1. Búsqueda del punto de la intersección situado sobre la generatriz 4 de la figura 8. Proyectar las secciones sobre un plano horizontal, trazando una línea de tierra L_1T_1 , paralela a $s'4'$; transportar el alejamiento del punto 4 en $m4_1$; unir s_14_1 , se obtiene la proyección horizontal (V.M.) de la generatriz 4; proyectar el centro o'_1 en o_1 y trazar el semicírculo de diámetro $a'b'$; p_1 es el punto buscado; de P_1 deducir P' (punto doble).

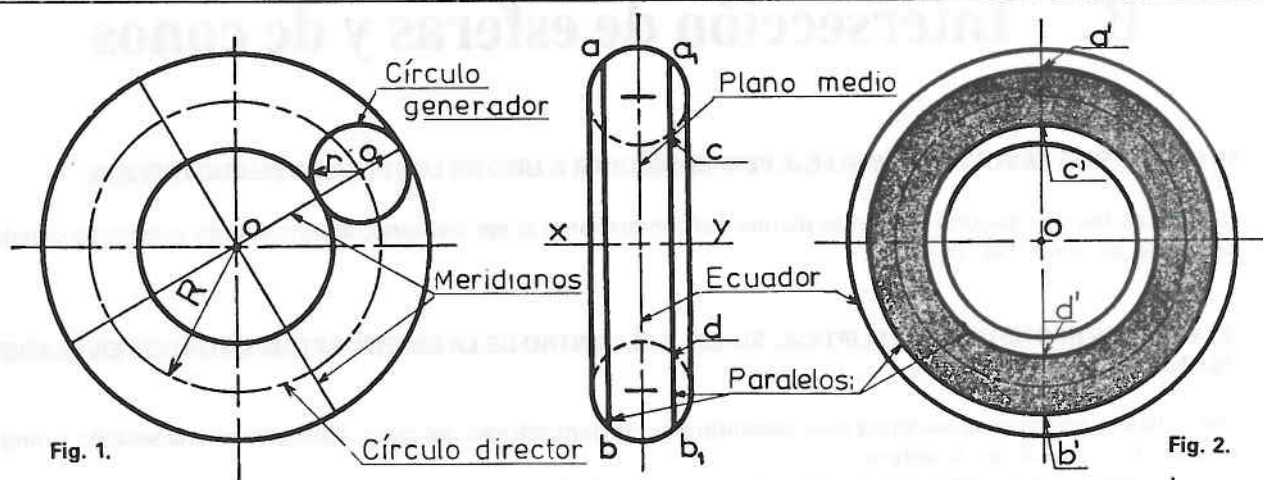
2. Búsqueda del punto de la intersección situado en la generatriz 2. Proyectar las secciones sobre un nuevo plano horizontal, tomando una línea de tierra L_2T_2 , paralela a la proyección $s'2'$ de la generatriz 2 del cono; transportar el alejamiento del punto 2 en 2_1 ; unir 2_1s_2 ; se obtiene la proyección horizontal de la generatriz 2; proyectar el centro o'_2 del círculo menor de la esfera determinado por el plano secante en o_2 y proyectar el semicírculo sobre el plano horizontal. La intersección del semicírculo y de la generatriz da el punto r_1 , proyección horizontal del punto de intersección buscado; deducir r' de r_1 .

OBSERVACION. La aplicación de este método necesita tantos cambios de plano como generatrices hay, pero presenta la ventaja de dar directamente en el diseño las verdaderas magnitudes, que sirven para desarrollar el cono. Es aplicable a todos los conos, cualquiera que sea su base, pero a condición de que su eje y el centro de la esfera determinen un plano paralelo a uno de los planos de proyección.

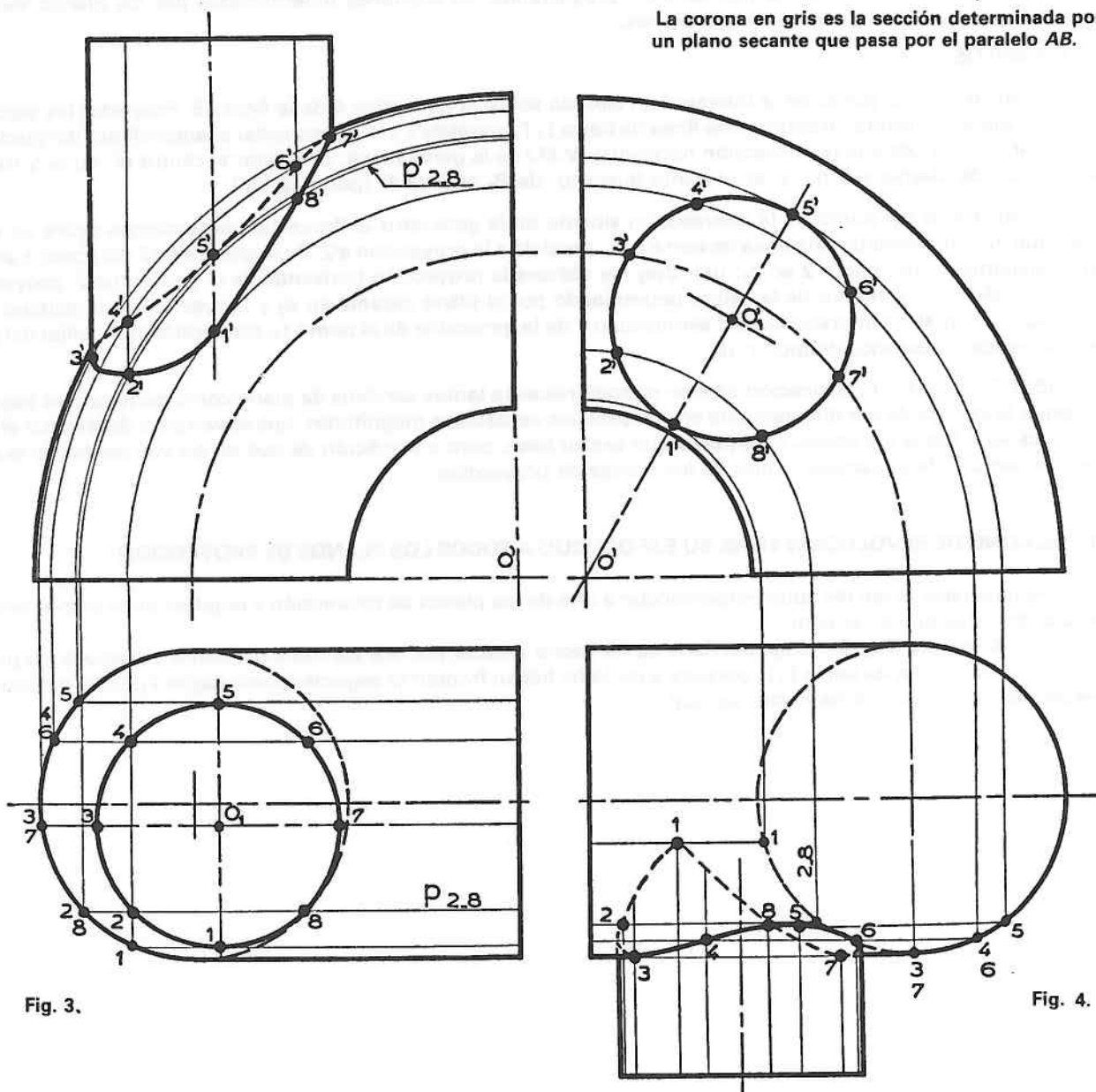
III. EL CONO DE REVOLUCION TIENE SU EJE OBLICUO A TODOS LOS PLANOS DE PROYECCION

Hay que hacer el eje del cono perpendicular a uno de los planos de proyección y emplear unos planos secantes perpendiculares al eje del cono.

En el diagrama (Fig. 9), el eje del cono se ha hecho vertical por dos cambios de planos sucesivos: el primero (vista según F_1 , línea de tierra L_1T_1 paralela a cs) lo ha hecho frontal; el segundo (vista según F_2 , línea de tierra L_2T_2 perpendicular a $c's'_1$) lo ha hecho vertical.



La corona en gris es la sección determinada por un plano secante que pasa por el paralelo AB.



12

Intersecciones de toros, de cilindros y de conos de revolución

GENERALIDADES SOBRE EL TORO DE REVOLUCION

Definición: Un toro de revolución es el sólido engendrado por la rotación de un círculo r alrededor de un eje xy , situado en su mismo plano, pero fuera de él (Fig. 1).

De la definición resulta que el centro O_1 del círculo r (círculo generador) describe un círculo de radio $R > r$ (círculo director o círculo medio). El plano que contiene el círculo R es el *plano medio del toro*.

Todas las secciones de un toro mediante planos perpendiculares al eje de rotación son coronas circulares (Fig. 2), cuyo centro está situado en el eje del toro. Los círculos que limitan estas coronas son los **paralelos** del toro. El mayor de los paralelos (*ecuador*) es el círculo de radio $R + r$ del plano medio del toro.

Todas las secciones de un toro por planos que contienen su eje son secciones circulares iguales al círculo generador. Estos planos son los planos **meridianos** del toro.

Superficie lateral: $S = 2\pi r \times 2\pi R = 4\pi^2 Rr$.

Volumen: $V = \pi r^2 \times \pi R = \pi^2 Rr^2$.

I. INTERSECCION DE UN TORO Y DE UN CILINDRO, CUYO EJE ES PARALELO AL PLANO MEDIO DEL TORO

Principio: Proyectar el cilindro sobre un plano perpendicular a su eje, con el fin de obtener la proyección de la intersección sobre este plano (Fig. 3) y cortar al toro mediante planos paralelos al plano medio que pasa por las generatrices del cilindro.

EJEMPLO. Un plano que pasa por las generatrices 2 y 8 del cilindro corta al toro según el paralelo $P2-8$, proyectado en $p2-8$ y $p'2-8$; este paralelo corta a las generatrices 2 y 8 en dos puntos de la intersección, cuyas proyecciones frontales son $2'$ y $8'$.

II. INTERSECCION DE UN TORO Y DE UN CILINDRO, CUYO EJE ES PARALELO AL EJE DE ROTACION DEL TORO

El mismo principio que anteriormente: los planos secantes que pasan por paralelos del toro (secciones circulares) cortan al cilindro según dos generatrices del sistema regular; dividir el círculo de proyección frontal, partiendo de un diámetro 1-5, situado en un plano meridiano del toro.

III. INTERSECCIONES DE TOROS Y DE CONOS DE REVOLUCION

Si el eje del cono es paralelo al eje del toro, se procede como en el caso del cilindro: se emplean planos secantes perpendiculares a los ejes (Fig. 4).

Si los dos ejes son concurrentes o si el eje del cono está situado en el plano medio del toro, se emplea el método de las **esferas secantes** (ver figuras 7 y 8 del capítulo 10, página 90).

NOTA. Este procedimiento es aplicable a las intersecciones de toros y de cilindros de revolución, cuyas posiciones respectivas cumplan las mismas condiciones.

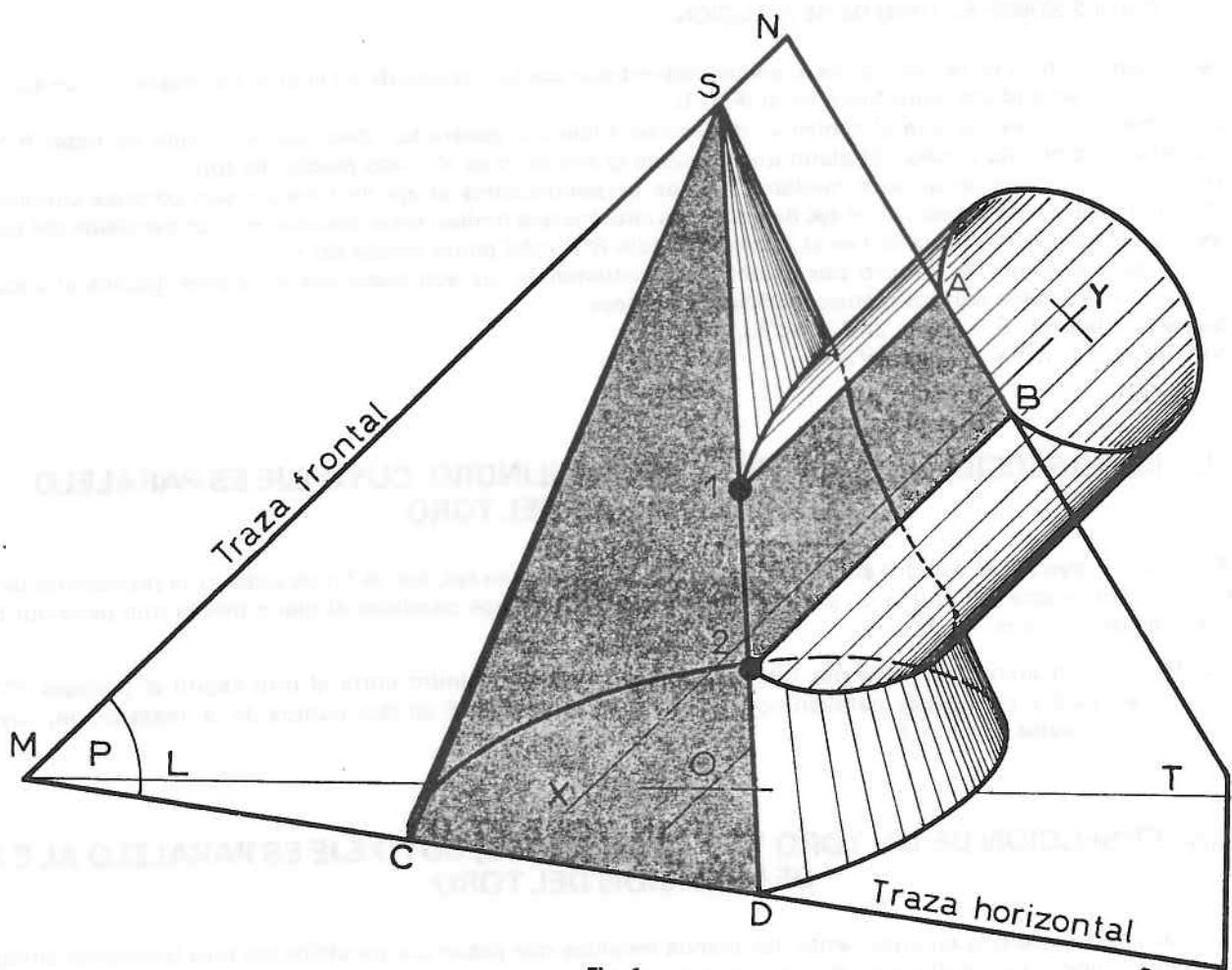
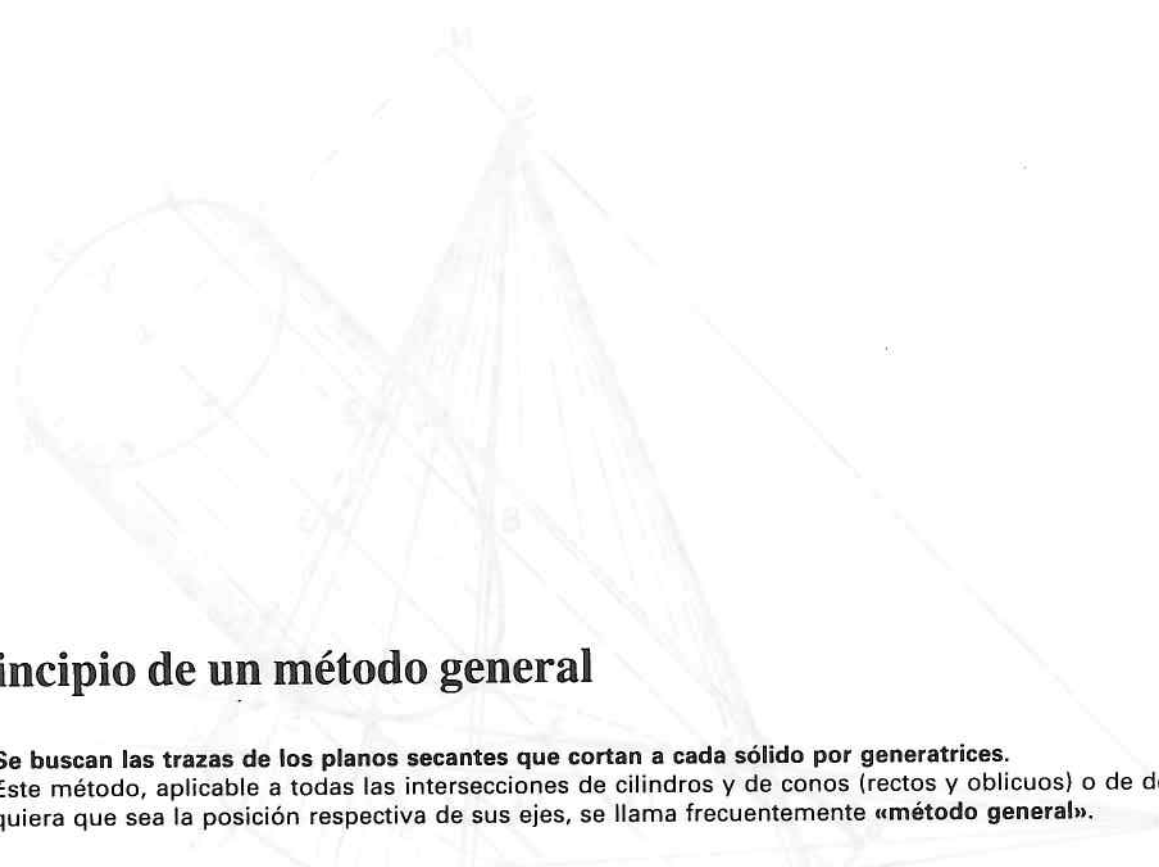


Fig. 1.

13

Intersecciones de conos y de cilindros, cuyos ejes son oblicuos entre sí y no concurrentes*



Principio de un método general

Se buscan las trazas de los planos secantes que cortan a cada sólido por generatrices.

Este método, aplicable a todas las intersecciones de cilindros y de conos (rectos y oblicuos) o de dos conos, cualquiera que sea la posición respectiva de sus ejes, se llama frecuentemente «**método general**».

I. INTERSECCION DE UN CONO Y DE UN CILINDRO DE REVOLUCION, CUYOS EJES SON FRONTALES

Un plano P (Fig. 1) que pase, a la vez, por las generatrices A y B del cilindro y por las generatrices SC y SD del cono, corta al plano frontal que contiene el vértice S , en una recta MN paralela a las generatrices A y B del cilindro, puesto que estas generatrices, al igual que el eje XY del cilindro, son a su vez frontales.

PRIMERA OBSERVACION. Todos los planos secantes que cumplen las mismas condiciones que el plano P , es decir, que pasan por generatrices del cono y del cilindro, tienen la misma traza frontal MN paralela al eje del cilindro y que pasa por el vértice S del cono.

SEGUNDA OBSERVACION. Las trazas horizontales de todos los planos secantes tienen un punto común M , traza de MN sobre el plano horizontal (Figs. 1 y 2).

* Uno de los sólidos puede ser oblicuo a todos los planos de proyección.

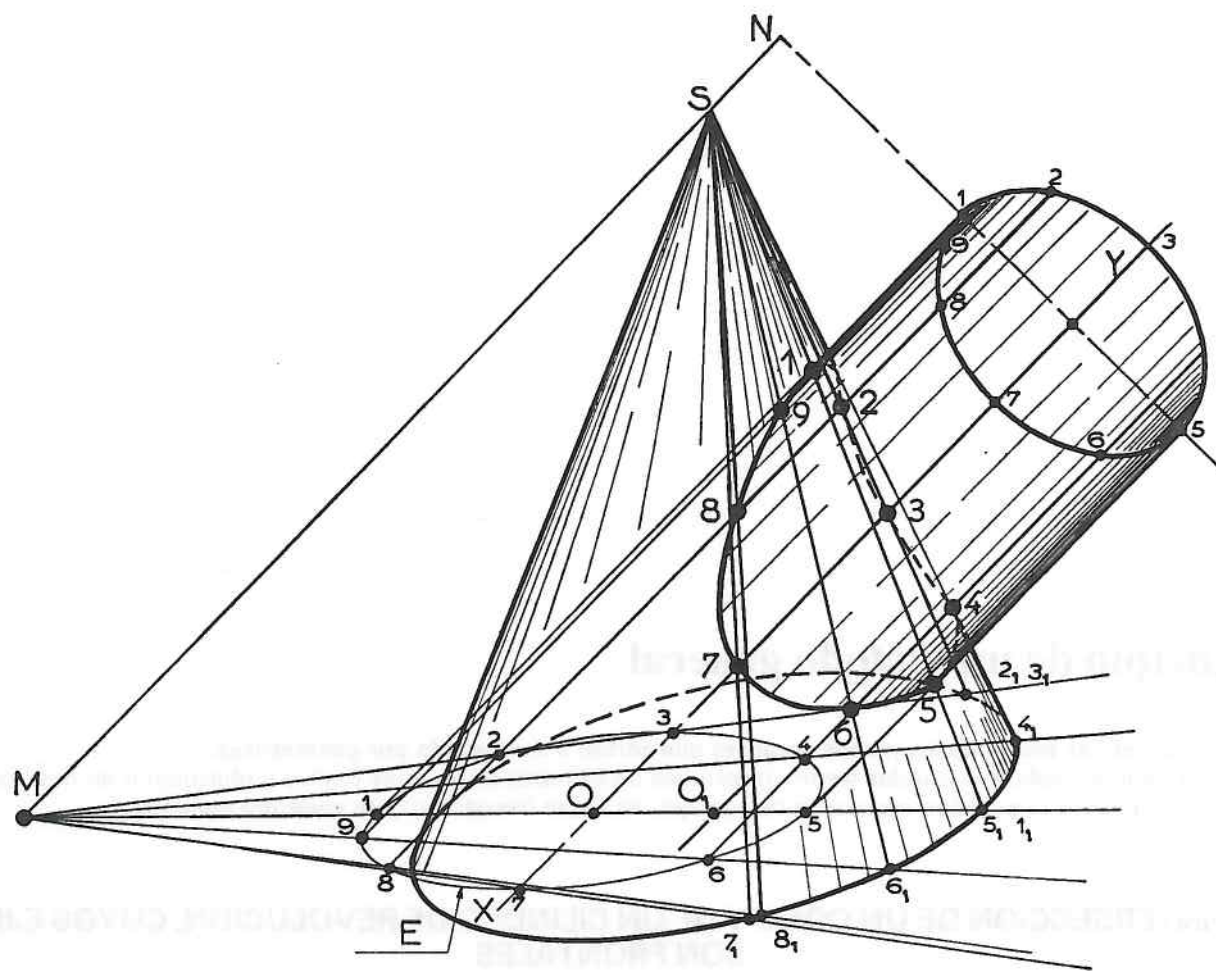


Fig. 2.

DETERMINACION DE LA INTERSECCION (Fig. 2)

Prolónguese el cilindro hasta su intersección con el plano horizontal que contiene la base del cono; su sección por este plano es una elipse E .

El plano secante que pasa por las generatrices 1 y 5 del cilindro es frontal y corta al cono según dos generatrices, de las que solamente interesa una, la generatriz $S5_1$, por ser la que corta a las dos generatrices del cilindro en los puntos 1 y 5, que pertenecen a la intersección.

Si se hace girar este plano, tomando como charnela la recta MN , hasta que pase por la generatriz 6 del cilindro (y por otra 9, que no forme parte del sistema regular), su traza horizontal, partiendo de M , pasará por los puntos 9 y 6 de la elipse y cortará a la base del cono en dos puntos, uno de ellos 6_1 . Este plano corta al cono según la generatriz $S6_1$ y determina dos puntos 6 y 9 de la intersección.

Un plano que pase por MN y por la generatriz 7 del cilindro corta la base horizontal del cilindro en el punto 7, y la base del cono en el punto 7_1 ; la semirrecta $M7_1$ es la traza horizontal de este plano. La generatriz $S7_1$ es la intersección del plano secante con el cono S . Esta generatriz y la generatriz 7 del cilindro, como están contenidas en el mismo plano, se cortan en un punto 7, que es un punto de la intersección.

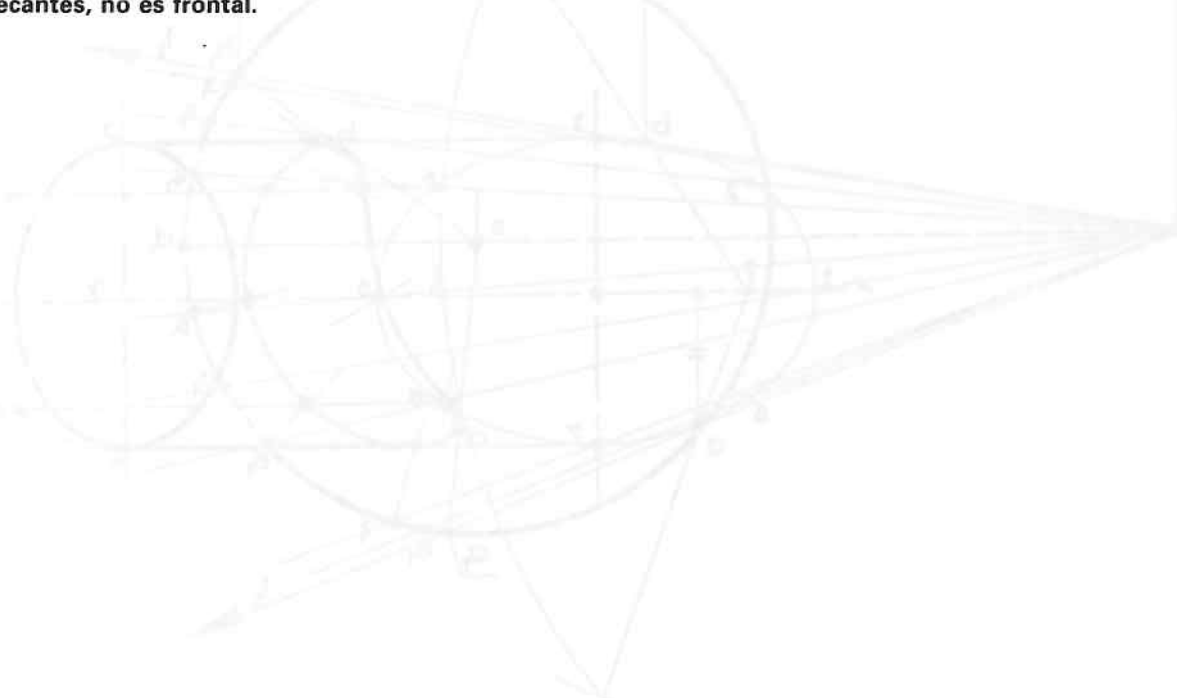
Un plano que pase por la generatriz 8 del cilindro y el vértice S del cono tiene por traza frontal MN y por traza horizontal $M8_1$. La generatriz $S8_1$ está contenida en dicho plano; por lo tanto, la intersección de las generatrices 8 del cilindro y $S8_1$ del cono en el punto 8 es un punto de la intersección de los dos sólidos.

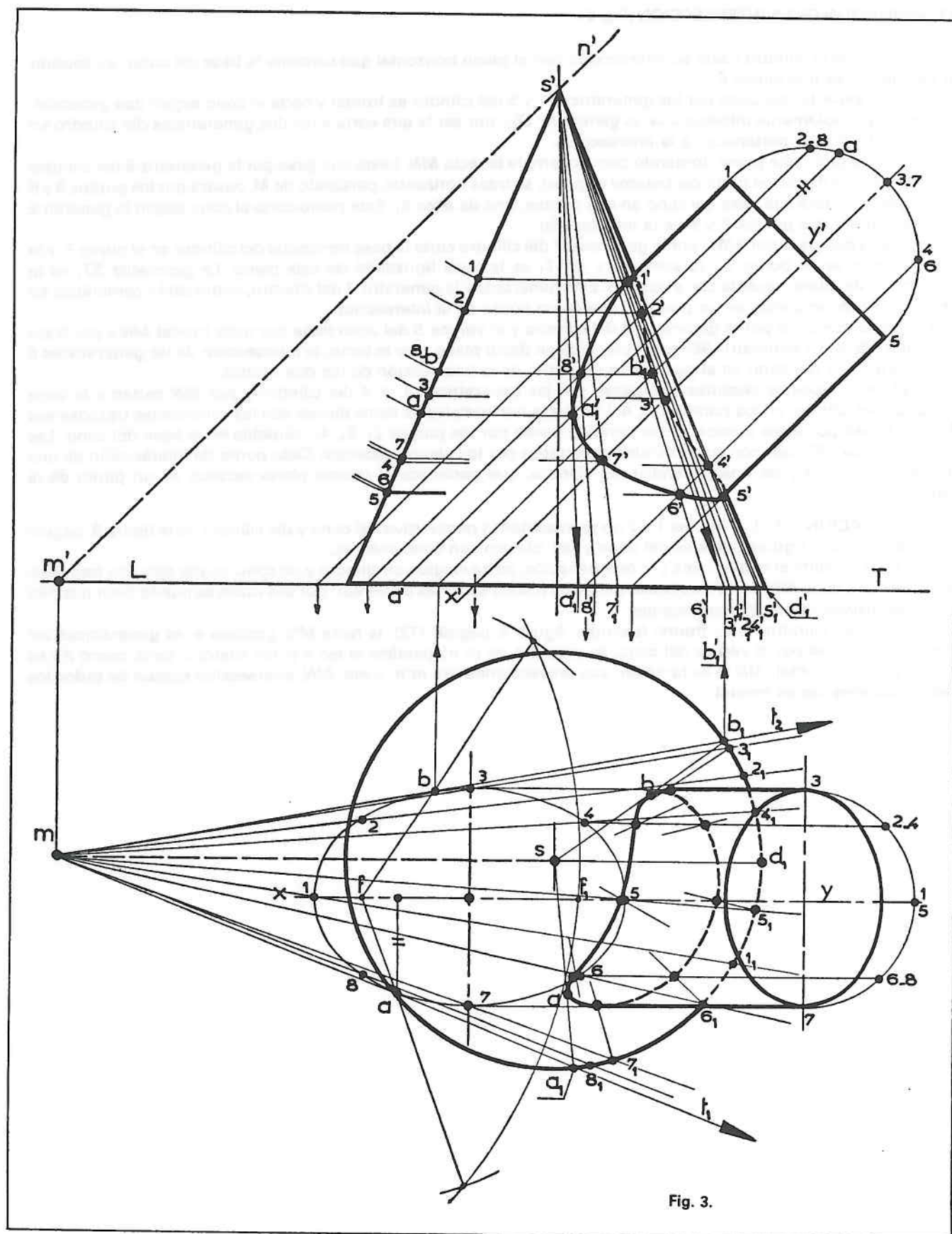
También los planos secantes que pasan por las generatrices 2, 3, 4 del cilindro y por MN cortan a la base horizontal del cilindro en los puntos 2, 3, 4. Las trazas horizontales de estos planos son las semirrectas trazadas por M y que pasan por estos puntos, y que también pasan por los puntos 2_1 , 3_1 , 4_1 , situados en la base del cono. Las generatrices $S2_1$, $S3_1$, $S4_1$ son las generatrices cortadas por los planos secantes. Cada punto de intersección de una generatriz del cono y de una generatriz del cilindro, que pertenece al mismo plano secante, es un punto de la intersección.

OBSERVACION. 1. Las figuras 1 y 2 no representan la perspectiva del cono y del cilindro de la figura 3, página siguiente. En estas figuras, los ejes del cono y del cilindro son concurrentes.

2. Para simplificar el diagrama y la demostración, se ha elegido un cilindro y un cono, cuyos ejes son *frontales*. En ese caso, la recta MN por la que pasan todos los planos secantes es frontal; por esa razón se puede decir que MN es la *traza frontal* de los planos secantes.

Si el eje del cilindro no es frontal (ejemplo, figura 4, página 112), la recta MN , paralela a las generatrices del cilindro y que pasa por el vértice del cono, se proyecta en $m'n'$, paralela al eje $x'y'$ del cilindro; pero, como XY es oblicuo al plano frontal, MN lo es también; sus proyecciones son $m'n'$ y mn . **MN , intersección común de todos los planos secantes, no es frontal.**





CONSTRUCCION DEL DISEÑO (Fig. 3)

- Prolongar el cilindro hasta su encuentro con el plano horizontal, sobre el que reposa la base del cono.
- Establecer en el cilindro un sistema regular de generatrices, en proyecciones frontal y horizontal.
- Trazar la elipse que representa la sección del cilindro por el plano horizontal; para esta construcción transportar los alejamientos de los puntos 2-8, 3-7-4-6, tomados del semiabatimiento frontal.

NOTA. La construcción de la elipse no es indispensable; únicamente son necesarios los puntos 1, 2... 8. — Trazar por s' una paralela a las generatrices del cilindro.

— Trazar por s' una paralela a las generatrices del cilindro; $m'n'$ es la recta frontal común a todos los planos secantes. Hacer la proyección horizontal de esta recta, trazando por s una paralela a LT , puesto que MN es frontal. (MN es frontal porque el eje del cilindro es frontal.)

- Referir el punto m' en m , origen de todas las trazas horizontales de los planos secantes.
- Representar las trazas horizontales de los planos secantes, trazando rectas por m y que pasen por los puntos 1-2-3-...8. Estas rectas cortan a la base del círculo en los puntos 1_1 - 2_1 ... 8_1 .

Las tangentes mt_1 y mt_2 son las trazas de los dos planos tangentes al cilindro; estos planos determinan las generatrices límites SA y SB , proyectadas en $s'a'_1$ y $s'b'_1$, tangentes a la curva de intersección.

- Referir los puntos $1_1-2_1-3_1...8_1$ en proyección frontal, y trazar las generatrices del cono que pasan por esos puntos.

Las intersecciones de las generatrices del cono con las del cilindro, que pertenecen al mismo plano secante, dan los puntos de intersección en las dos vistas.

OBSERVACION. Para efectuar los desarrollos, basta con la proyección frontal; ésta da las generatrices del cilindro en verdadera magnitud y permite encontrar fácilmente las verdaderas magnitudes de las generatrices del cono.

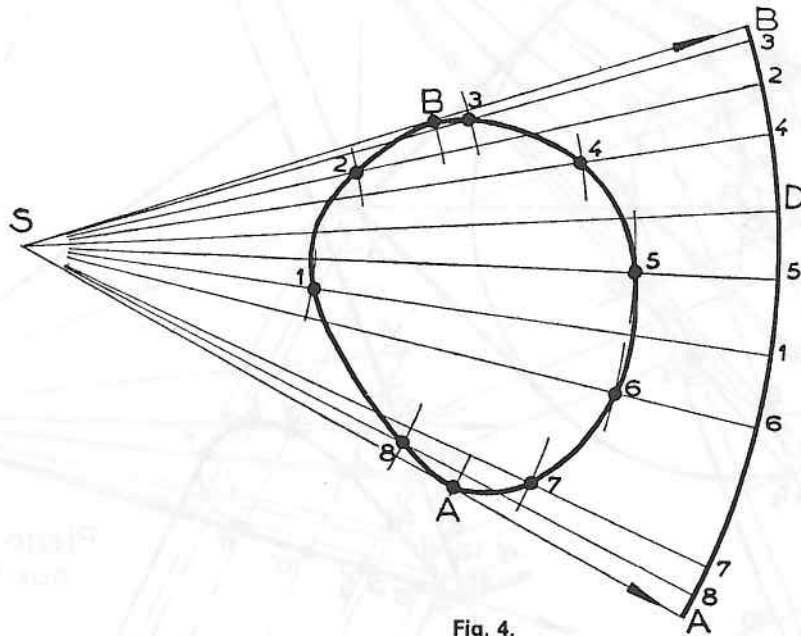


Fig. 4.

DESARROLLO DEL CONO (Fig. 4)

Buscar las proyecciones de las generatrices límites A y B de la intersección (generatrices contenidas en planos tangentes al cilindro), trazando por m las tangentes a la elipse (Fig. 3); trazar estas tangentes antes de construir la elipse.

Referir la situación de una generatriz, D por ejemplo, con relación a la generatriz de unión. Llevar desde esta generatriz las transformadas de los arcos de base d_1b_1 y d_1a_1 en DB y DA ; trazar las generatrices sobre las que se llevan las verdaderas magnitudes, tomadas en $s'1, s'2, \dots S-8$ (Fig. 3).

Cilindro cortado según
una sección recta que pasa por x'

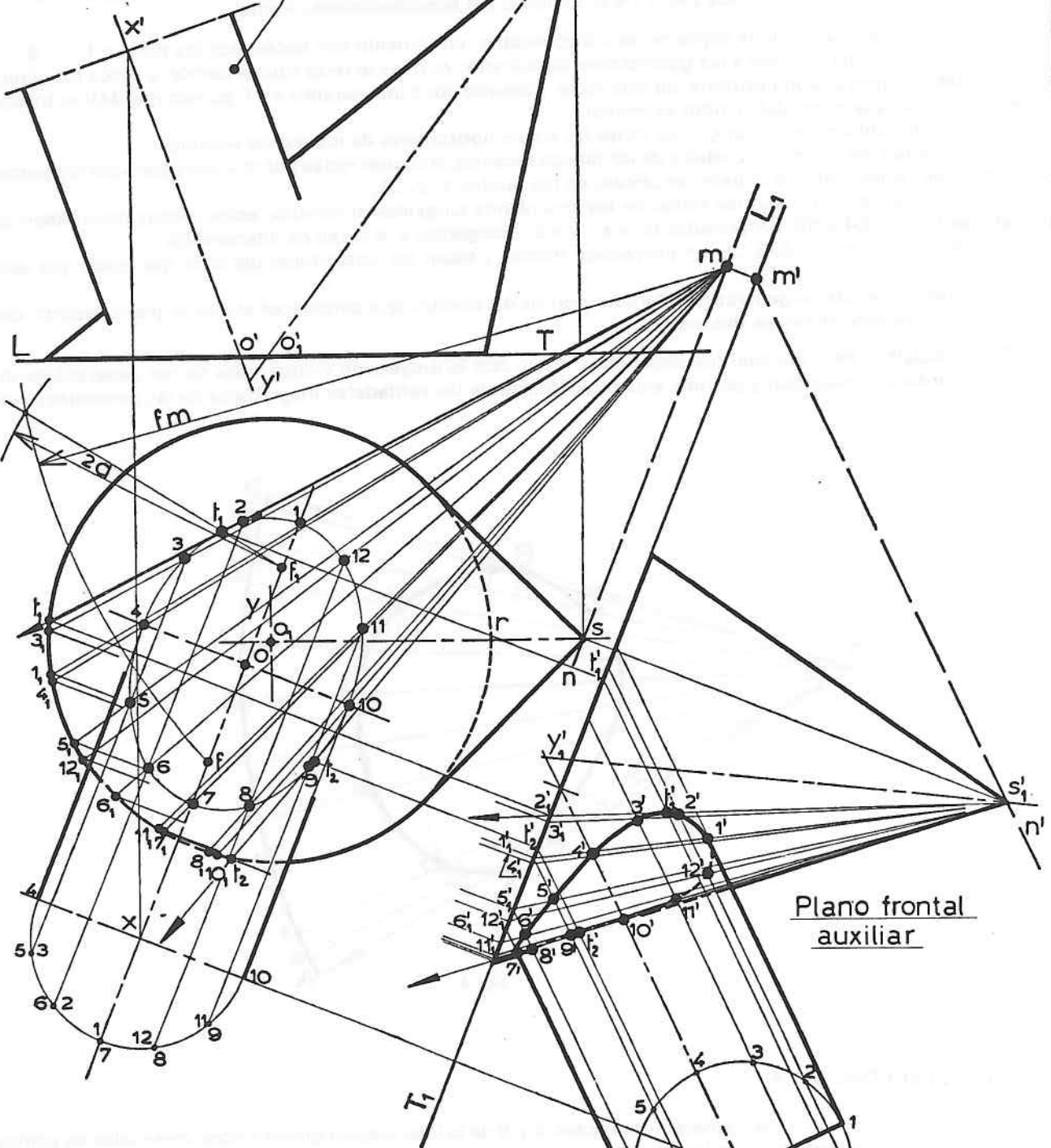


Fig. 1.
 mt_1 y mt_2 : tangentes a la elipse
(trazas horizontales de los planos
tangentes al cilindro).

Fig. 2.
 $L_1 T_1 \parallel xy$
 $S'_1 m' \parallel x'_1 y'_1$

II. INTERSECCION DE UN CONO OBLICUO CON UN CILINDRO DE REVOLUCION, CUYO EJE ES OBLICUO A TODOS LOS PLANOS DE PROYECCION

A. DISEÑO

Hacer frontal el cilindro, proyectándolo sobre un plano frontal auxiliar (Fig. 2), paralelo a su eje XY .

En la nueva vista frontal, la línea de tierra auxiliar L_1T_1 es paralela a xy ; puesto que la base superior del cilindro es una sección recta (indicada en la Fig. 1), se proyecta en esta vista en escorzo total, es decir, según un diámetro.

Construir la proyección frontal de la recta común a todos los planos secantes, o sea $n'm'$, paralela a $x'y'_1$; proyectar el punto M en m , sobre la paralela a xy , que pasa por s . Construir la elipse de centro o .

Construir las trazas horizontales de los planos secantes, uniendo m con los puntos 1-2-3... etc. de la elipse; estas trazas cortan al círculo de la base del cono en los puntos $1_1-2_1-3_1$, etc., orígenes de las generatrices del cono determinadas por estos mismos planos. Construir las proyecciones frontales de las generatrices del cono; sus intersecciones con las generatrices del cilindro son puntos de la intersección de los dos sólidos.

Desarrollos. a) **del cilindro:** sus generatrices se ven en verdadera magnitud en el plano frontal auxiliar (Fig. 2). La figura 3 da el desarrollo, para el trazado exterior.

b) **del cono:** no presenta nada de particular. Dividir el arco t_1rt_2 en partes iguales y hacer pasar unas generatrices por estos puntos. Para dar más claridad al diseño, no hacer las proyecciones de estas generatrices, cuya verdadera magnitud se encontrará por el método de «dibujo aparte», simplificación del método que da la recta frontal.

Se encuentran las verdaderas magnitudes de las generatrices $t_1-3_1-1_1...t_2$, interceptadas por las del cilindro, utilizando un «plano al lado», simplificación, ya del método que hace la recta frontal, ya del que hace la recta horizontal, puesto que las proyecciones frontales están trazadas; en ese caso, tomar las diferencias de alejamiento en las generatrices correspondientes del cilindro, lo que evita la construcción de la proyección horizontal de la penetración.

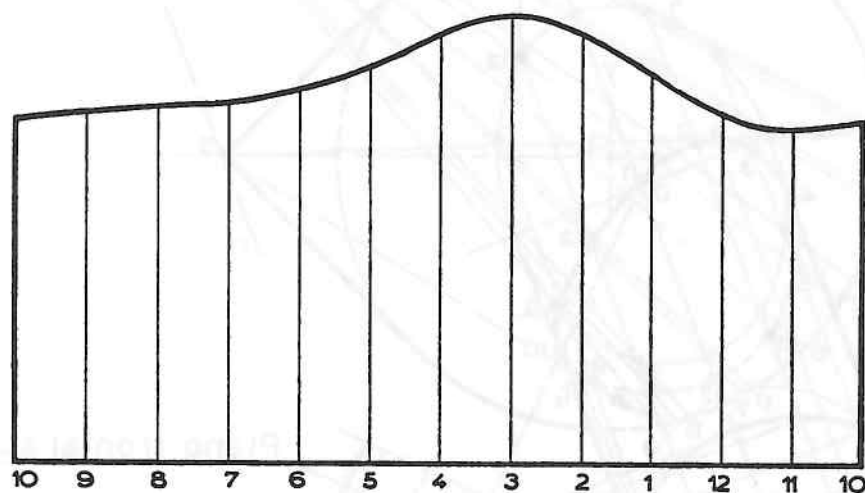


Fig. 3.

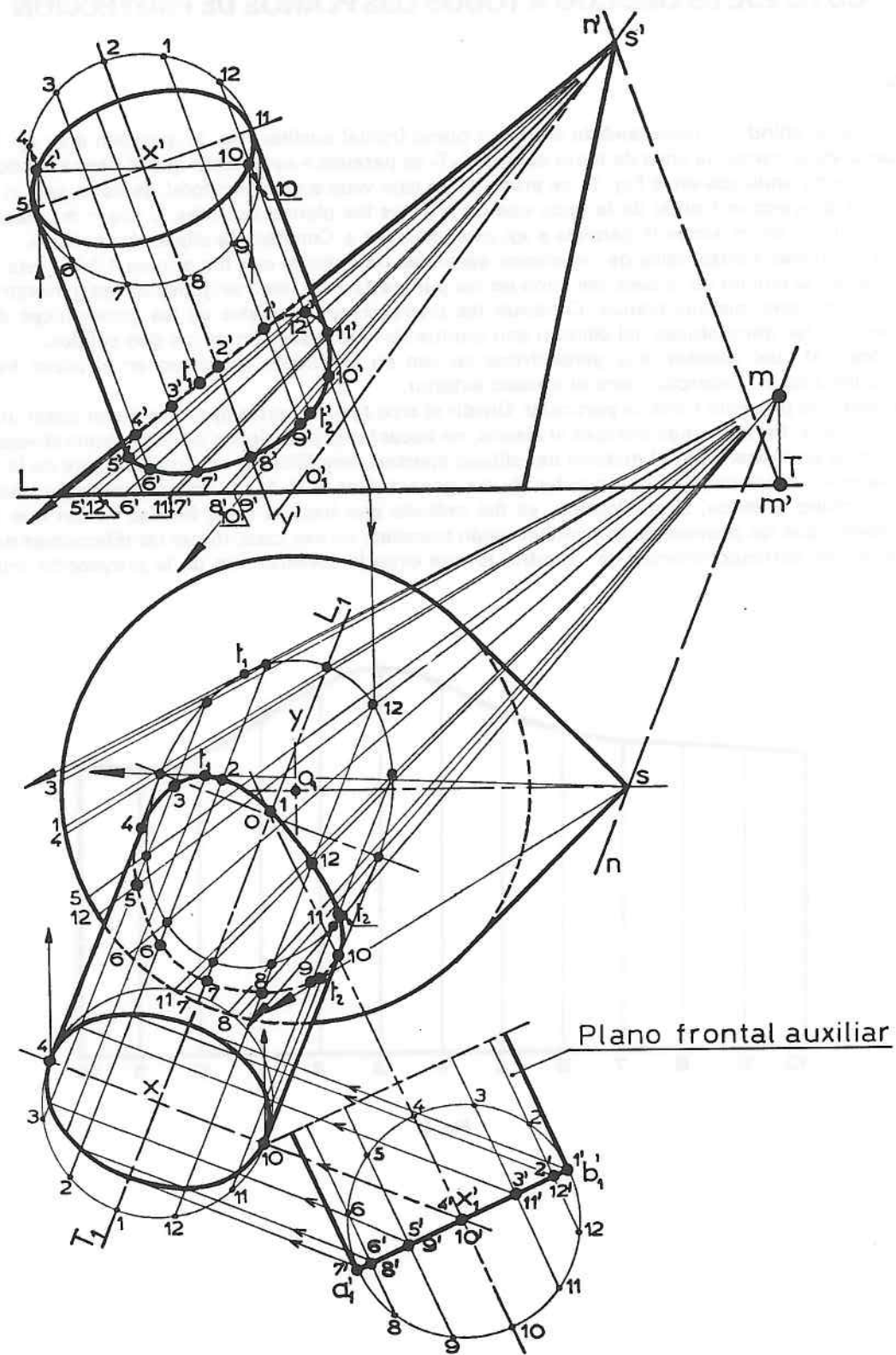


Fig. 4.

B. CONSTRUCCION DE LAS VISTAS DE FRENTE Y DE ARRIBA

NOTA. Estudiar esta parte después del estudio del **sistema regular de generatrices** (página 147).

Si se quiere representar (Fig. 4) la intersección sin hacer los desarrollos, no hace falta realizar un cambio de plano; se puede obtener directamente la proyección de la intersección en las dos vistas.

Construcción de las proyecciones de MN, charnela de los planos secantes que, en este caso, es oblicua a los dos planos de proyección:

- a) **Proyección frontal:** por s' trazar $s'm'$ paralela a $x'y'$.
- b) **Proyección horizontal:** por s trazar sm paralela a xy . Deducir m de m' .

Trazar las proyecciones horizontales, y después las frontales, de las generatrices del cilindro, con el fin de obtener los puntos de la elipse de centro o ; *ejemplo* para el punto 12.

OBSERVACIONES. 1. Dado que el cilindro es oblicuo a los dos planos de proyección, el sistema regular de generatrices en las dos vistas se construye por el método indicado en la página 149.

2. Excepcionalmente, en la figura 4 las proyecciones frontales de las generatrices se confunden dos a dos, pero en orden diferente al de la figura 1; *ejemplo:* la generatriz 4 se confunde con la generatriz 6, mientras que en la figura 1 la generatriz 4 se confunde con la generatriz 10.

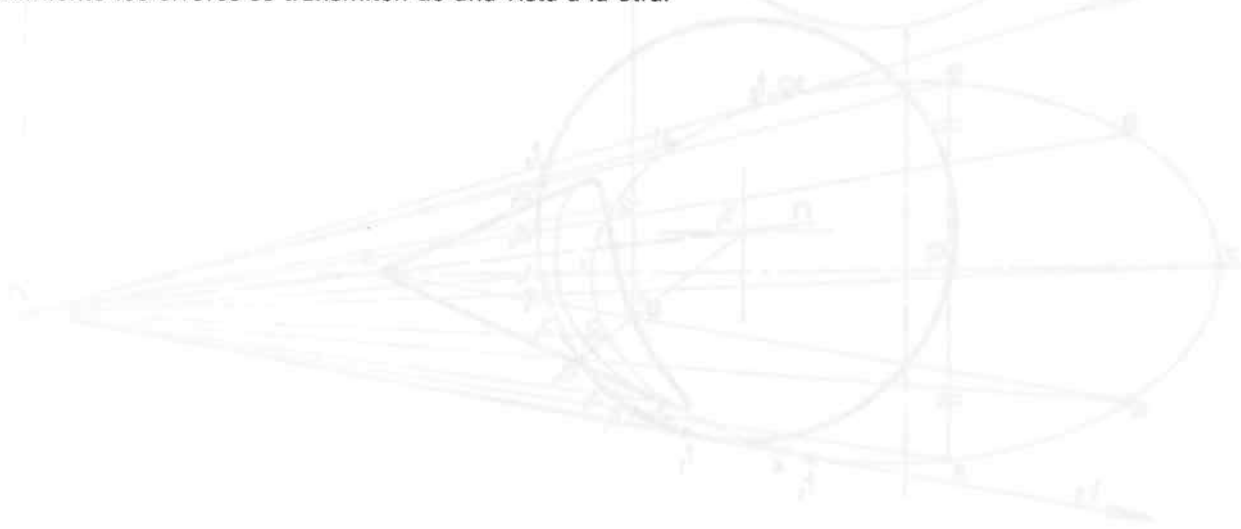
Después proceder igual que anteriormente para construir las generatrices del cono por las que pasan los planos secantes; es decir, trazar las proyecciones horizontales de los planos secantes, uniendo el punto m a los puntos de la elipse determinados por la intersección de las generatrices del cilindro con el plano horizontal. Prolongar estas semirrectas hasta su encuentro con la base del cono; se obtienen así los puntos de origen de las generatrices buscadas. Llevar estos puntos a la proyección frontal y unirlos con el vértice s' .

Las intersecciones de las generatrices del cono y del cilindro que llevan el mismo número dan los puntos de la intersección, ya en proyección frontal (Fig. 4), ya en proyección horizontal.

Las tangentes a la elipse mt_1 y mt_2 son las trazas horizontales de los planos secantes tangentes al cilindro; dichas tangentes permiten determinar los puntos t'_1 y t'_2 por los que pasan las proyecciones frontales de las generatrices del cono tangentes a la curva de intersección. Igualmente st_1 y st_2 , proyecciones horizontales de estas generatrices, son tangentes a la proyección horizontal de la intersección.

Para encontrar las proyecciones de la base superior del cilindro, hacer un cambio de plano frontal de éste para convertirlo en frontal, con el fin de que la sección recta que pasa por X sea «de canto», es decir, en escorzo total. Para simplificar la construcción, tomar xy como línea de tierra secundaria L_1T_1 . Un sistema regular de generatrices permite construir la proyección horizontal de la base.

La proyección frontal se construye, ya a partir de la proyección horizontal, ya transportando las cotas de los puntos 1-2-3-..., etc., medidos en el plano frontal auxiliar. Es preferible el segundo procedimiento, porque así un error de la proyección horizontal no se transmite necesariamente a la proyección frontal, mientras que con el primer procedimiento los errores se transmiten de una vista a la otra.





III. INTERSECCION DE DOS CONOS DE REVOLUCION, CUYOS EJES SON OBLICUOS ENTRE SI Y NO CONCURRENTES

El eje de un cono de vértice S_1 es vertical, el otro es frontal: cono de vértice S .

NOTA. Siempre se puede hacer frontal el eje del cono S , mediante un cambio de plano frontal.

Los planos que cortan a cada cono según dos generatrices (caso general) pasan siempre por el vértice de cada uno de ellos. Todos pasan por la recta MN , que une los dos vértices S y S_1 ; el punto M es la traza horizontal de esta recta, que puede ser considerada como charnela de los planos secantes.

1.º Construir las proyecciones frontal y horizontal de la recta MN .

Todos los planos secantes tienen una traza horizontal que pasa por M ; por otra parte, puesto que estos planos pasan por generatrices de cada cono, sus trazas horizontales cortan a las bases de los conos en los puntos de origen de estas generatrices; por lo tanto:

2.º Prolongar el cono penetrante S hasta su encuentro con el plano horizontal.

El cono S corta al plano horizontal según una elipse. Como en el ejemplo precedente, no se necesita la elipse entera, sino solamente los puntos por los que pasan los planos secantes, planos que determinan un sistema regular de generatrices, de donde:

3.º Abatir una semisección recta del cono S sobre el plano frontal, dividirla en partes iguales y trazar las generatrices.

4.º Para obtener los puntos de la elipse en proyección horizontal, buscar el alejamiento de cada uno de ellos, haciendo un semiabatimiento frontal de la sección recta que pasa por cada punto.

EJEMPLO. Búsqueda de los alejamientos de los puntos 5 y 9. La proyección frontal de la sección recta, que pasa por 5 y 9 es la perpendicular trazada por $5'-9'$ al eje $s'x'$, o sea $p'r'$; abatir la sección, o simplemente una parte, trazando un círculo (o una parte) de centro $o'5$ y de diámetro $p'r'$. La perpendicular $5'5''$ a $p'r'$ es el alejamiento buscado: $q5 = q9 = 5'5''$.

5.º Unir todos los puntos de la elipse a m , obteniéndose así las trazas horizontales de los planos secantes; trazar también las tangentes a la elipse mt_1 y mt_2 , trazas horizontales de los planos tangentes al cono S .

Los puntos de intersección de estas trazas con el círculo de base del cono S_1 son los puntos de origen de las generatrices interceptadas en el cono.

Trazar las proyecciones frontales de las generatrices 1, 2,... 12. El punto de corte de dos generatrices que lleven el mismo número es un punto de la intersección de los dos conos, puesto que las dos generatrices pertenecen al mismo plano. Se obtiene así la proyección frontal de la intersección.

Se tiene suficiente, para desarrollar los dos sólidos, con la proyección frontal, que permite encontrar las verdaderas magnitudes de las generatrices.

Comprobación: hacer las proyecciones horizontales de las generatrices de los dos conos para determinar la proyección horizontal de la intersección. Las dos proyecciones de un punto deben encontrarse en una perpendicular a la línea de tierra.

EJEMPLO. Las proyecciones horizontales de las generatrices que pasan por el punto 6 de la intersección son: S_1-6_1 y $S-6$. Los puntos $6''$ y $6'$ están en la misma perpendicular a LT .

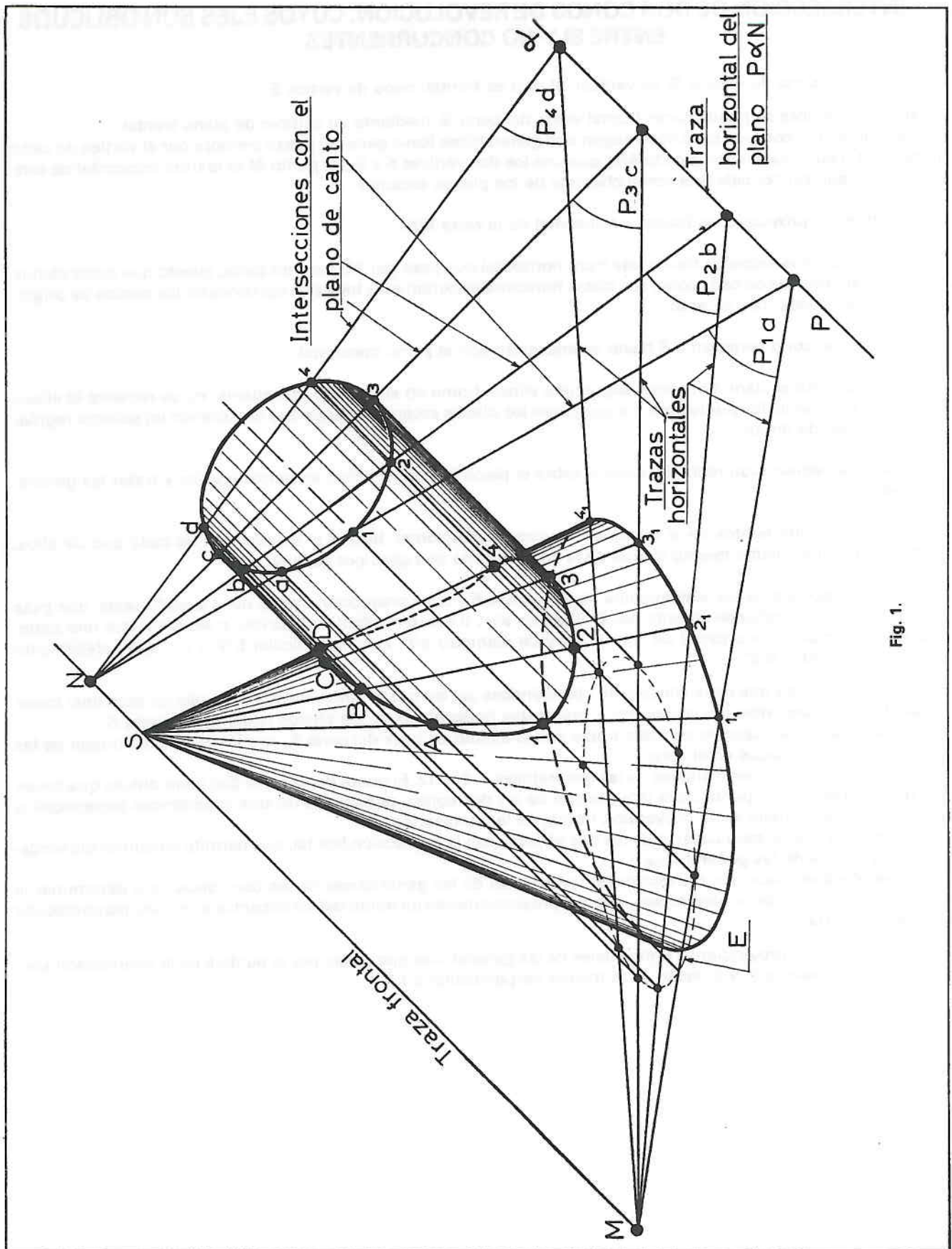


Fig. 1.

IV. BUSQUEDA DE LA INTERSECCION MEDIANTE ABATIMIENTO DEL PLANO DE CANTO, QUE CONTIENE LA SECCION RECTA DEL SOLIDO PENETRANTE

Método aplicable cuando el sólido penetrante (cilindro o cono) es recto y su eje frontal. Interesa su aplicación, cuando la base elíptica no puede proyectarse sobre el plano horizontal.

Examínese la figura 1, en la que se ha limitado cada plano secante a los tres lados de un triángulo. Cada uno de estos triángulos tiene un lado situado:

- 1.º en un plano frontal: todos los planos secantes pasan, efectivamente, por MN , que es frontal;
- 2.º en un plano horizontal, donde todas las trazas de estos planos salen del punto M ;
- 3.º en un plano de canto, que contiene la sección recta del cilindro: todos los lados situados en ese plano pasan por el punto N .

Se observa que todos estos triángulos tienen un vértice situado en la traza de punta $P\alpha$ del plano de canto que contiene la sección del cilindro.

Si se abate el plano de canto $P\alpha N$ sobre el plano horizontal tomando como eje de rotación $P\alpha$, se puede construir el diagrama sin trazar la elipse E .

DISEÑO (Fig. 2)

- a) Abatir el plano de canto que contiene la base del cilindro y el punto N sobre el plano horizontal. El centro O se proyecta en o'_1 y o_1 ; N se proyecta en n'_1 y n_1 .
- b) Dividir el círculo en partes iguales y trazar las proyecciones horizontales y frontales de las generatrices que pasan por los puntos de división.
- c) Desde n_1 hacer pasar unas rectas por cada punto de división hasta $P\alpha$; se obtienen así los puntos $1''$, $2''$, $3''$, $4''$.
- d) Unir los puntos $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ con m para obtener las trazas horizontales de los planos secantes. Estos planos cortan a la base del cono en los puntos 1_1 , 2_1 , 3_1 , 4_1 y determinan las generatrices salidas de estos puntos. Proceder después igual que anteriormente (Fig. 3, página 108).

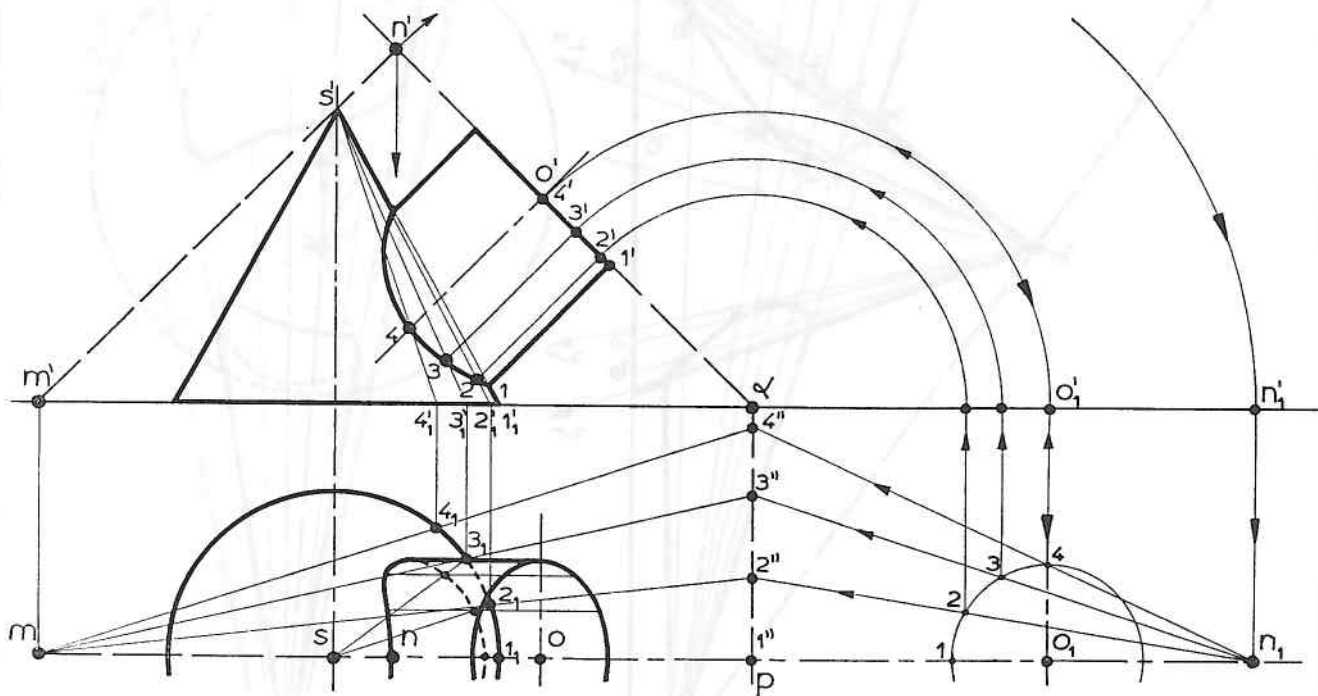
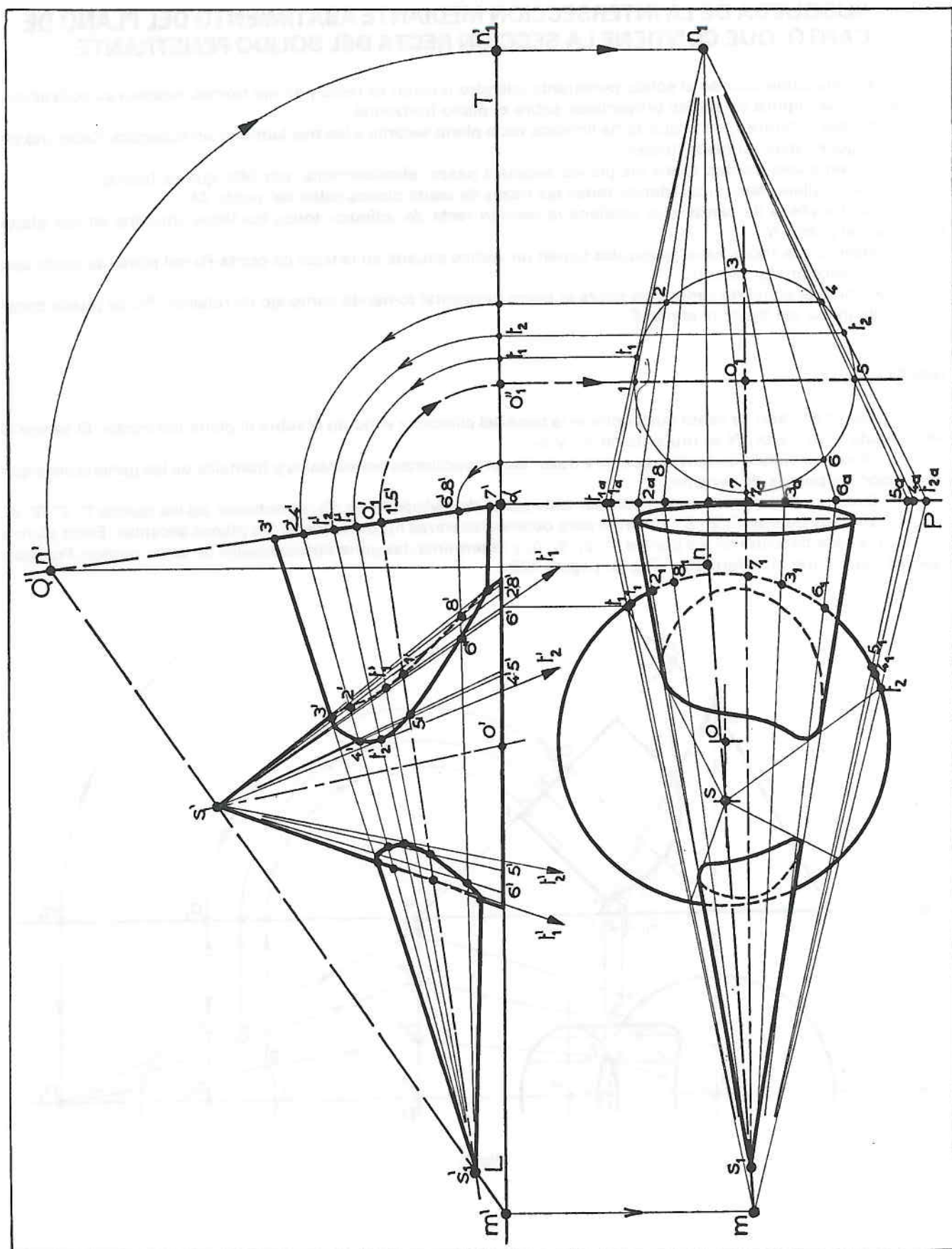


Fig. 2.



V. INTERSECCION DE UN CONO OBLICUO DE BASE CIRCULAR Y DE UN CONO DE REVOLUCION

Si es posible, hacer un cambio de plano frontal para colocar la base del cono de revolución en un plano de canto.

- Representar las trazas, horizontal y frontal, del plano de canto que contiene la base del cono (Fig. 1).
- Construir las proyecciones, horizontal mn y frontal $m'n'$, de la recta MN , que pasa por los vértices S y S_1 de los conos; el punto M está en el plano de la base del cono oblicuo, y N en el plano de la base del cono de revolución.
- Abatir el plano de canto $P\alpha Q'$ sobre el plano horizontal (eje de rotación $P\alpha$). N viene a n'_1 y n_1 . O_1 viene a o''_1 y o_1 . Con centro en o_1 trazar el círculo de la base del cono S_1 y dividirlo en partes iguales.
- Unir n_1 a los puntos de división del círculo de la base y prolongar hasta el encuentro con $P\alpha$; se obtienen así los abatimientos de las intersecciones de los planos secantes con el plano $P\alpha Q'$. Construir también las tangentes n_1t_1 y n_1t_2 , correspondientes a los planos límites, tangentes al cono S_1 .
- Unir m con los puntos $1_a, 2_a, 3_a$, etc., para obtener las trazas horizontales de los planos secantes.
- Trazar las proyecciones frontales de las generatrices del cono S_1 que pasan por los puntos de división 1, t_1 , 2, 3, etc. de su base, después de haber subido éstos a la línea de tierra, y después a $\alpha Q'$.

Trazar las proyecciones frontales de las generatrices del cono S , después de referir $t_1, 1_1, 2_1, 3_1$, etc. en la línea de tierra.

Las intersecciones de las generatrices de S y S_1 que tienen el mismo número dan los puntos de la curva de intersección en proyección frontal.

NOTA. Para construir los desarrollos, no hace falta la proyección de la intersección en la vista de arriba.



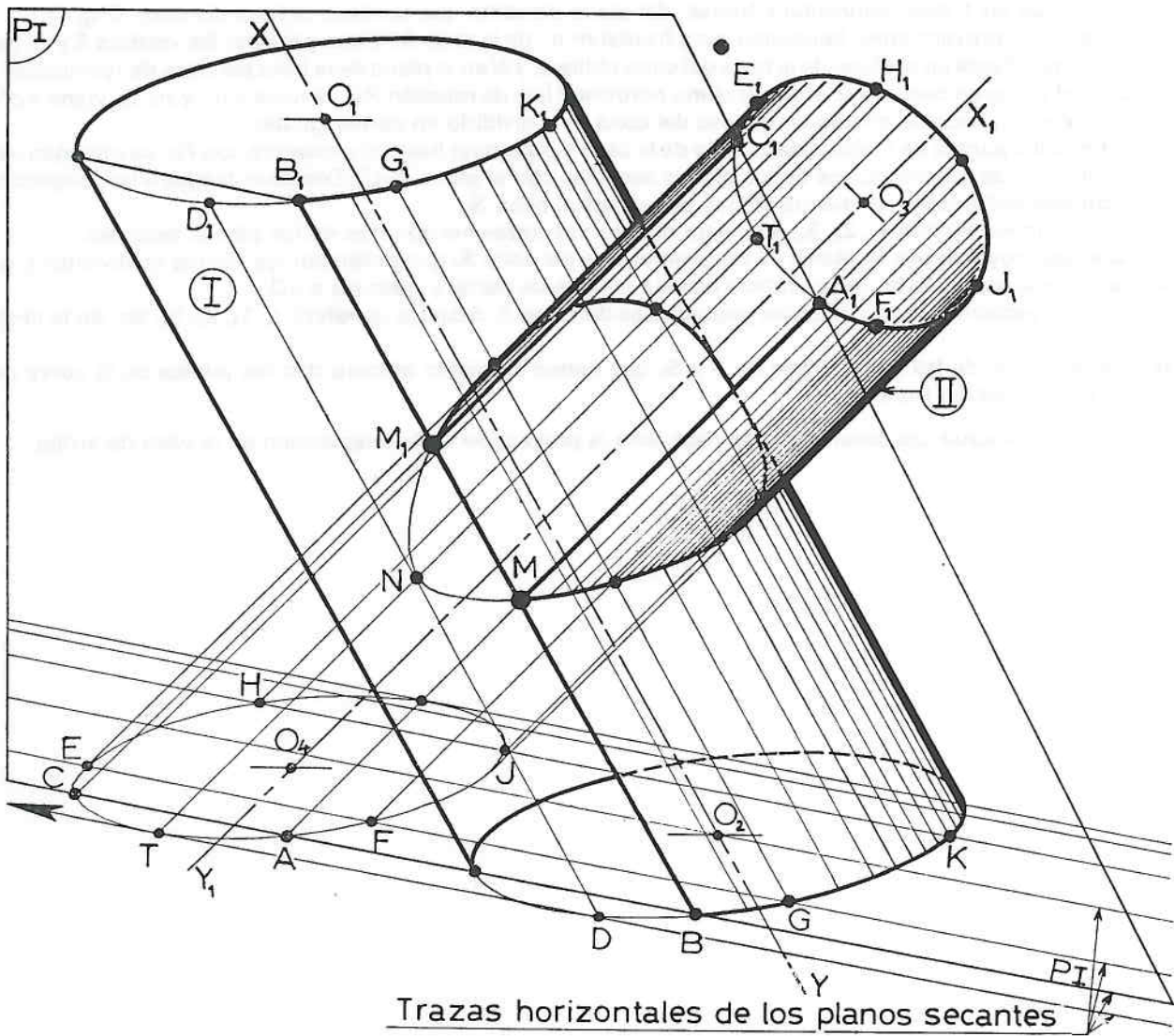


Fig. 1.

Intersección de un cilindro oblicuo de bases elípticas (I) y de un cilindro de revolución (II).
Perspectiva de la figura 3.

VI. INTERSECCION DE DOS CILINDROS DE EJES CUALESQUIERA Y NO CONCURRENTES

PRINCIPIO DE DETERMINACION DE LA INTERSECCION

Se puede hacer pasar, por cada punto de la intersección, un plano que corte a cada cilindro por una generatriz, puesto que dos rectas concurrentes determinan un plano.

Del hecho de que todas las generatrices de un cilindro son paralelas entre sí se deduce que todos los planos secantes que contienen una generatriz de cada cilindro son paralelos entre sí.

Si los dos cilindros se prolongan y se cortan en su intersección con el plano horizontal, la traza horizontal de un plano secante determina en las secciones horizontales de los cilindros los puntos de origen de las generatrices interceptadas por este plano (Fig. 1).

Búsqueda de la traza horizontal de un plano secante que contiene las dos generatrices que pasen por un punto de la intersección.

Sea M un punto de la intersección (Fig. 1) y AA_1 y BB_1 las generatrices que pasan por este punto; la traza horizontal del plano PI que contiene estas dos generatrices pasa por CB . Se observa que este plano corta a cada cilindro según dos generatrices, de las que solamente nos interesa una, la BB_1 de I , pero el cilindro II está cortado también según la generatriz CC_1 , que pasa por el punto M_1 de la intersección.

Un plano tangente al cilindro II contiene una sola generatriz TT_1 de este cilindro; éste corta al cilindro I en una sola generatriz útil DD_1 y determina el punto N . La generatriz DD_1 del cilindro I es tangente a la curva de intersección en el punto N .

OBSERVACION. Todas las trazas horizontales TD , CB , EG , HK , etc. de los planos secantes son paralelas entre sí, pero no son paralelas a la línea de los centros O_4O_2 ; en efecto, los ejes XY y X_1Y_1 no pueden pertenecer al mismo plano, puesto que no son concurrentes.

Diseño. Por un punto M cualquiera, proyectado en m y m' (Fig. 2), trazar las proyecciones frontal y horizontal: a) de una recta AB paralela a las generatrices del cilindro II ; b) de una recta CD paralela a las generatrices del cilindro I . Prolongar las proyecciones frontales de estas rectas hasta la línea de tierra en a' y d' . Referir estos dos puntos en la proyección horizontal. La recta ad es la traza horizontal del plano secante que contiene las generatrices AB y CD .

Todo plano secante que corta a cada cilindro en unas generatrices tiene por traza horizontal una paralela a ad .

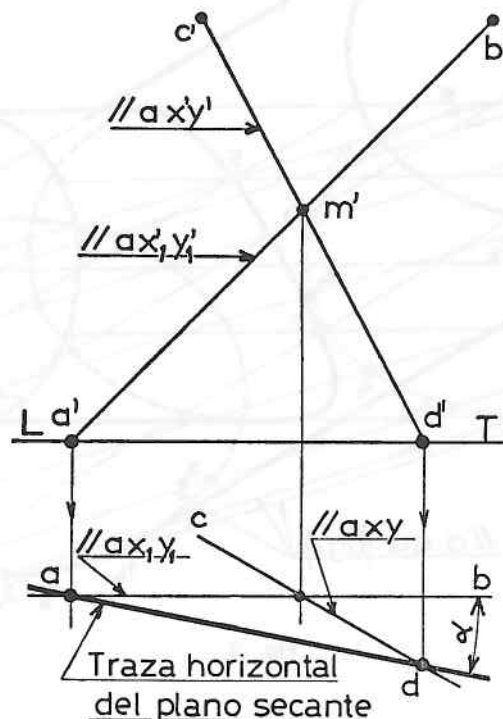


Fig. 2.

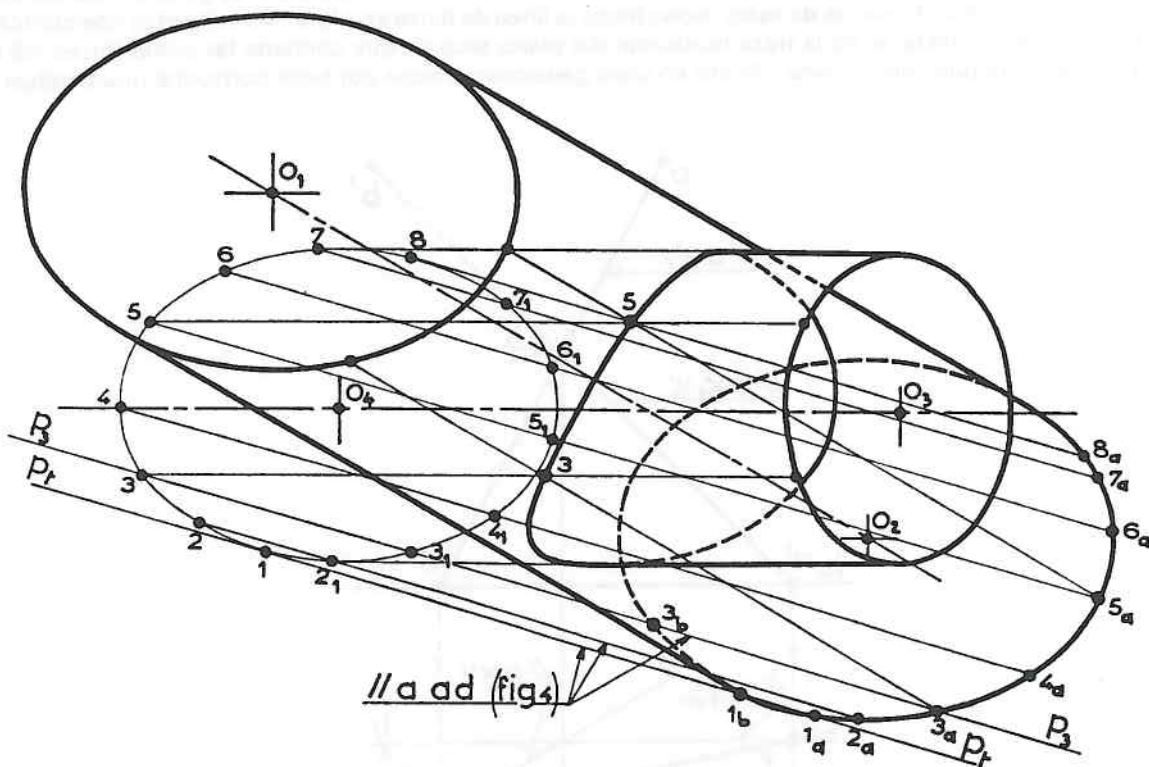
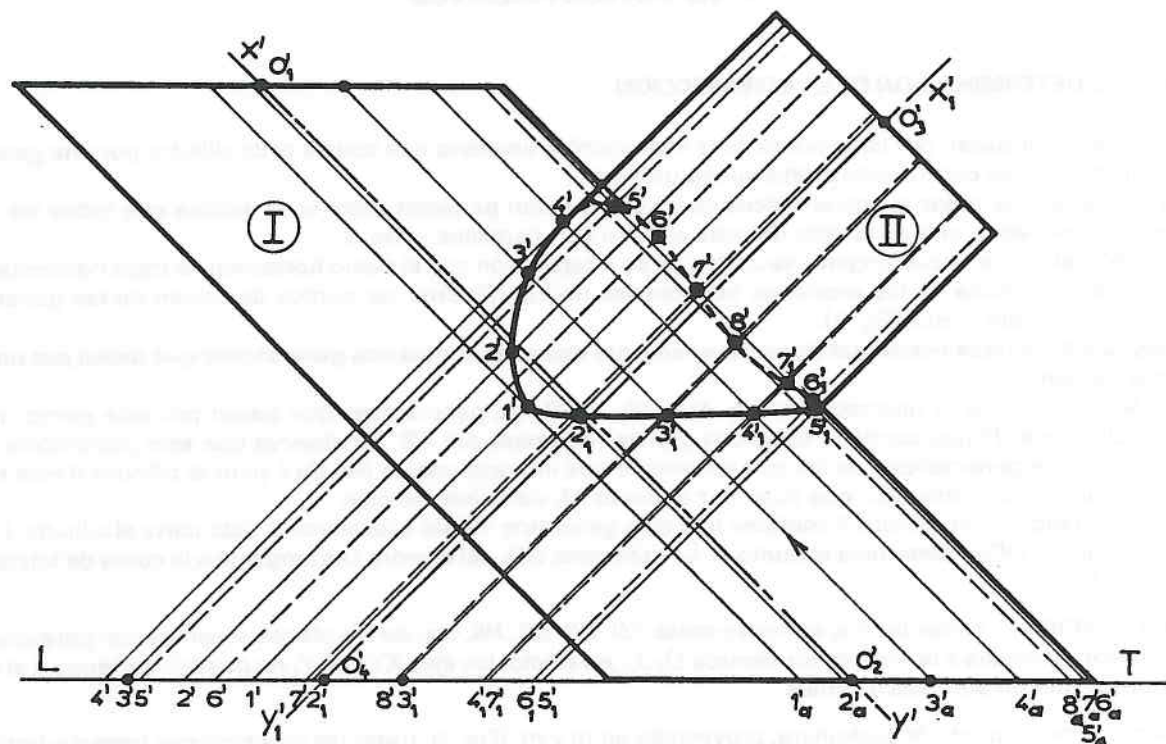


Fig. 3.

VII. INTERSECCION DE UN CILINDRO OBLICUO DE BASES ELIPTICAS Y DE UN CILINDRO DE REVOLUCION

Una vez establecido el diseño de los dos cilindros (Fig. 3), construir una figura auxiliar (Fig. 4), como se ha indicado en la figura 2 para obtener la dirección de las trazas horizontales de los planos secantes. Esta dirección viene dada por la recta ad .

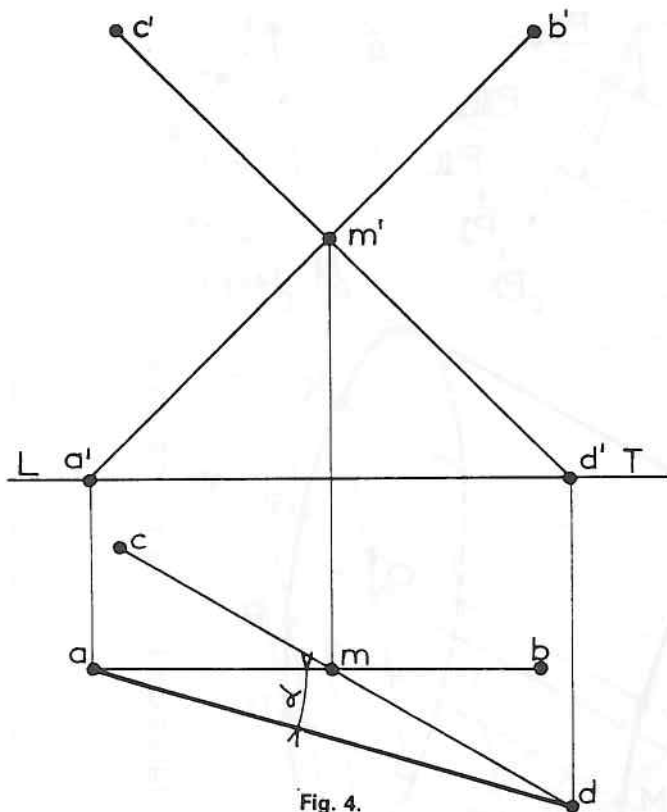


Fig. 4.

Cortar las bases de centro O_4 y O_2 mediante rectas paralelas a ad . Estas rectas cortan a las bases en puntos situados en las generatrices determinadas por los planos secantes. Referir todos estos puntos 1-2-3... etc. y $1_a, 2_a, 3_a$, etc., sobre la proyección frontal y trazar las generatrices correspondientes. El punto de intersección de dos generatrices que llevan el mismo número es un punto de la curva de intersección.

Hacer la traza horizontal de un plano P_t tangente a la base O_4 en 1, es decir, tangente al cilindro II; su simétrico respecto a O_4 dará el punto 8.

Ejemplo de determinación de un punto de la intersección. El plano P_3 corta a la base O_4 en los puntos 3 y 3_1 , y a la base O_2 en los puntos $3a$ y $3b$ (como el cilindro II está limitado a su parte superior, solamente nos interesa el punto $3a$). Referir los puntos 3 y 3_1 sobre la vista frontal en $3'$ y $3'_1$; hacer pasar por estos puntos unas generatrices. Referir igualmente $3a$ en $3'a$ y hacer pasar una generatriz por este punto. La generatriz $3'a$ corta a las generatrices $3'$ y $3'_1$ en los dos puntos $3'$ y $3'_1$ de la curva de intersección.

Para construir la proyección horizontal de la intersección, trazar las proyecciones horizontales de las generatrices de uno de los cilindros, el II por ejemplo, y referir sobre cada generatriz el punto correspondiente de la proyección frontal.

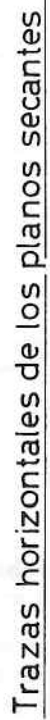
Comprobación: Los puntos de la intersección deben encontrarse también sobre las generatrices del cilindro I, llevando el mismo número, *ejemplo:* 3 y 5.

OBSERVACION. Una paralela a ad es tangente a la elipse de centro O_4 en el punto 1 y corta a la elipse de centro O_2 en los puntos $1a$ y $1b$; es la traza de un plano tangente (P_t) al cilindro II. Si la traza del plano P_t fuese también tangente a la elipse O_2 , los dos cilindros formarían una *intersección límite*. Si la traza del plano P_t no cortase a la elipse de base del cilindro I, no habría intersección completa, sino *mordedura*.

Desarrollos. Dado que el cilindro II es frontal, todas sus generatrices se proyectan en verdadera magnitud sobre la vista frontal.

Para encontrar la verdadera magnitud del cilindro I, hacerlo *frontal* proyectándolo sobre un plano frontal auxiliar que le sea paralelo. La nueva línea de tierra L_1T_1 será, pues, paralela a la proyección horizontal del eje O_1O_2 . Después de haber trazado las generatrices, referir sobre éstas los puntos de la intersección.

2



Fig

Otro método que ahorra una construcción de elipse

Método aplicable cuando el cilindro penetrante es de revolución y frontal (se le puede hacer siempre frontal, mediante un cambio de plano).

La figura 5 muestra que las intersecciones de los planos P_t , P_l , P_{II} ... etc. con el plano de canto que contiene la sección recta del cilindro II son paralelas entre sí y pasan por los puntos de intersección t , 1 , 2 ... etc., de las trazas horizontales de los planos secantes y de la traza horizontal P_α del plano de canto.

Para construir el diseño se abate el plano de canto con las rectas T_1t , C_11 , E_12 ..., etc., sobre el plano horizontal, haciéndolo girar alrededor de su traza horizontal P_α .

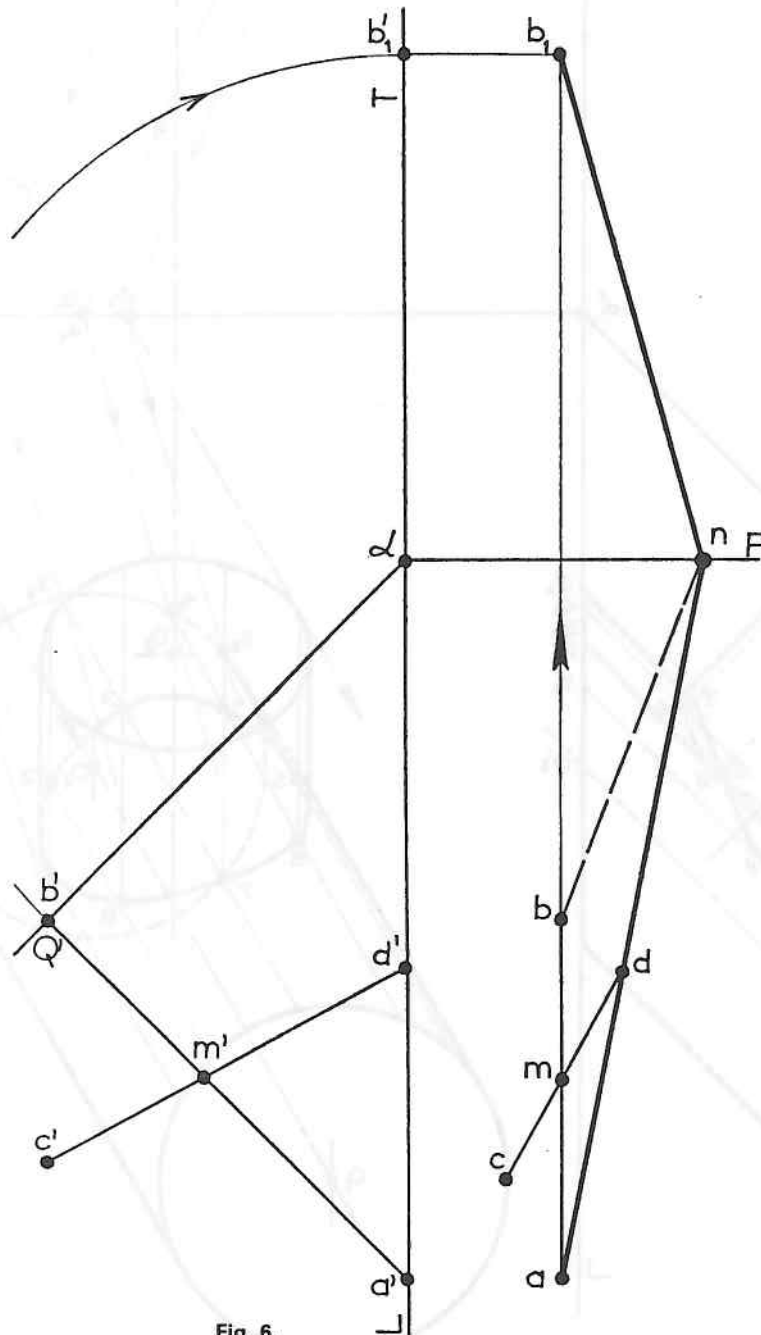


Fig. 6.

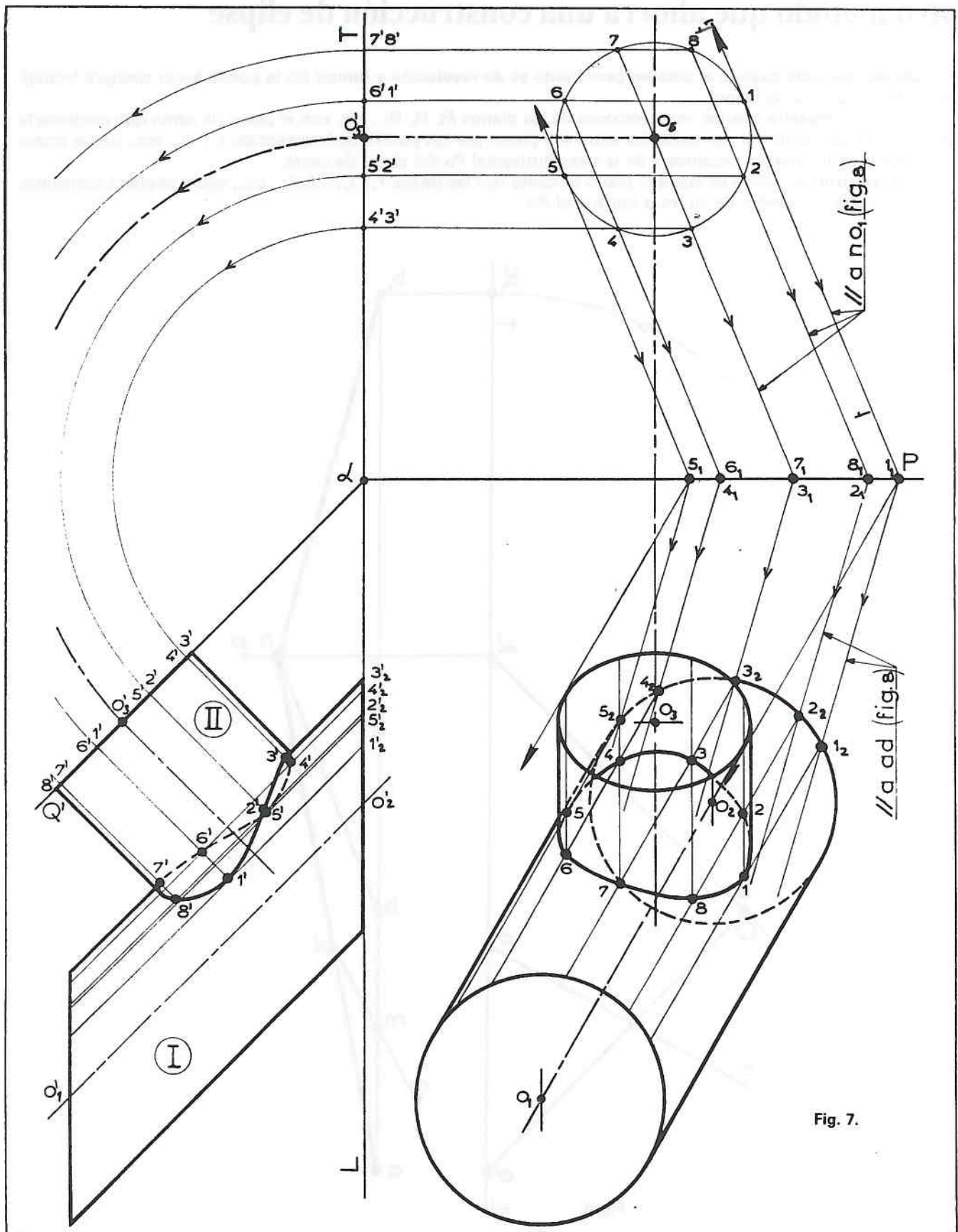


Fig. 7.

Búsqueda de la dirección de las intersecciones de los planos secantes con el plano de canto, después del abatimiento sobre el plano horizontal (Fig. 6, ver página 125).

- a) Determinar la dirección de la traza horizontal de los planos secantes, igual que anteriormente.
- b) Construir las trazas de un plano de canto $P\alpha Q'$, perpendicular a AB ($\alpha Q'$ es perpendicular a $a'b'$).
- c) Prolongar la traza horizontal ad hasta su encuentro con $P\alpha$ en n . La recta nb es la proyección horizontal de la intersección del plano secante que pasa por M y del plano de canto que contiene la sección recta del cilindro II.
- d) Abatir b' en b'_1 y referir b en b_1 . La recta nb_1 , verdadera magnitud de NB , da la dirección de las intersecciones de los planos secantes con el plano de canto, después del abatimiento sobre el plano horizontal.

VIII. INTERSECCION DE UN CILINDRO OBLICUO DE BASES CIRCULARES Y DE GENERATRICES OBLICUAS RESPECTO A LOS PLANOS DE PROYECCION CON UN CILINDRO DE REVOLUCION DE EJE FRONTAL

- a) Mediante una construcción (Fig. 8) análoga a la de la figura 6, buscar las direcciones:
 - 1.º de las trazas horizontales de los planos secantes;
 - 2.º de los abatimientos de las intersecciones de estos mismos planos con el plano de canto, que contiene la sección recta del cilindro II.Las primeras vienen dadas por la recta ad , las segundas por la recta no_1 .
- b) Abatir el centro O_3 sobre el plano horizontal en o'_5 y o_5 , tomando a $P\alpha$ como eje de rotación. Con centro en o_5 , trazar el círculo de sección recta.
- c) Trazar la tangente tt_1 al círculo o_5 paralelo a no_1 , que corresponde al plano secante límite, tangente al cilindro II. Dicha tangente determina el punto 1 en la sección recta; se obtiene, igualmente, su simétrico y el punto 5.
- d) Dividir la sección recta en partes iguales y hacer pasar, por cada punto de división, un plano secante paralelo a no_1 (en la figura 7 estos planos se confunden dos a dos: 3 y 7, 4 y 6, 2 y 8).

Los planos secantes cortan al cilindro II según unas generatrices que se trazan en alzado, refiriendo los puntos 1, 2, 3, etc., en la línea de tierra, después en la sección recta.

Las paralelas a no_1 cortan a $P\alpha$ en los puntos $1_1, 2_1, 3_1$, etc. Trazar por estos puntos paralelas a ad ; proyecciones de las trazas horizontales de los planos secantes. Estas paralelas cortan a la base del cilindro I en los puntos $1_2, 2_2, 3_2$, etc. Referir estos puntos en el alzado y trazar las generatrices salidas de estos puntos.

La intersección de dos generatrices que lleven el mismo número es un punto de la curva de intersección.

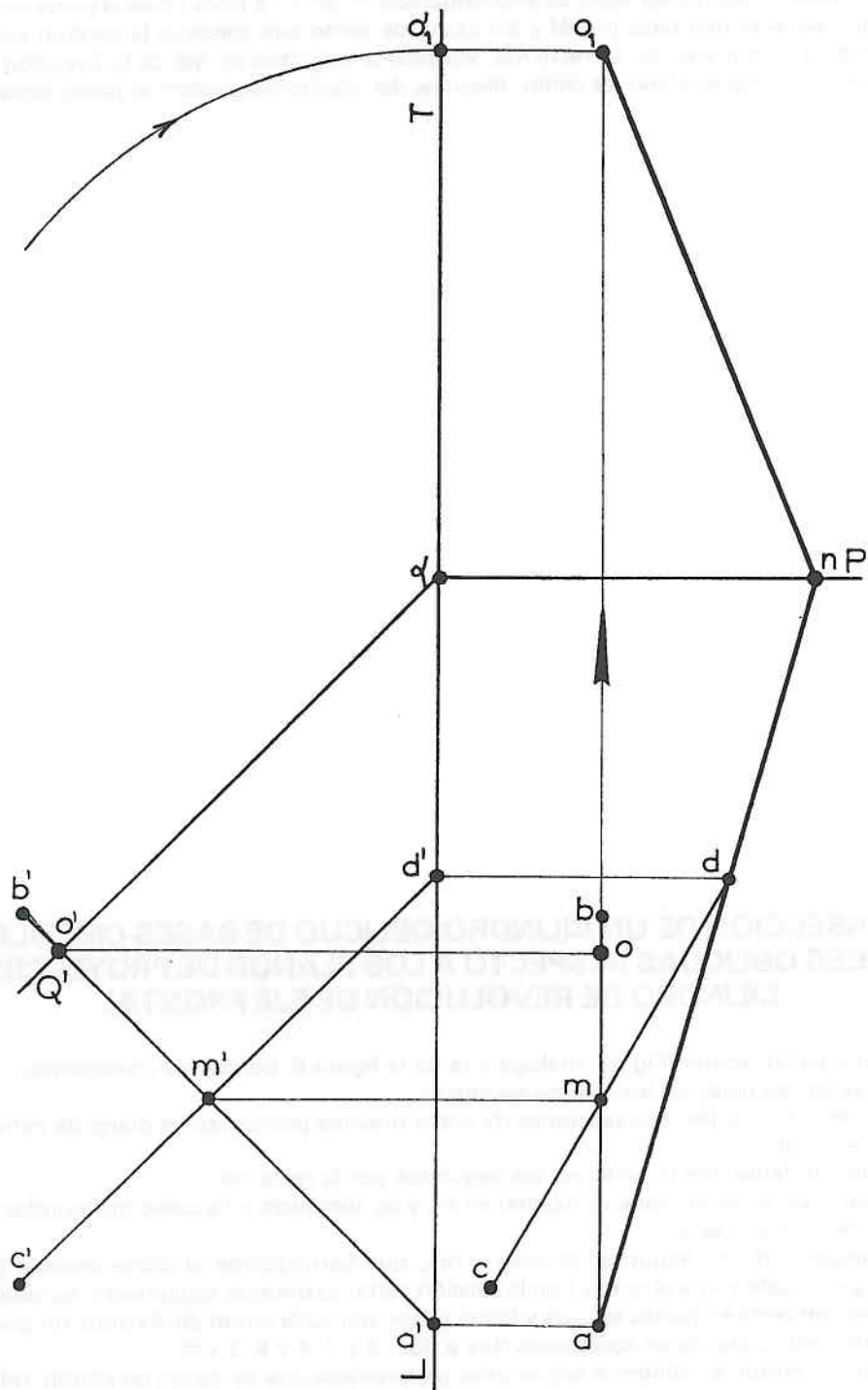


Fig. 8.

Otro método

Después de hacer un cambio de plano horizontal, no es necesario construir la esfera y el cilindro C_1 para trazar las proyecciones frontales de las generatrices del cono.

Se puede:

- proyectar la base del cono sobre el plano horizontal auxiliar (Fig. 4);
- hacer pasar unas generatrices del cono por los puntos de intersección 1, 2, 3, ... 8;
- alzar a la proyección frontal los puntos de intersección de las generatrices del cono con su base. Ejemplos: generatrices T , $6G$, T_1 .

OBSERVACION. Como la proyección horizontal de la base del cono es una elipse, la precisión de los puntos t , $6g$, t_1 , etc., depende de la precisión con la que se haya trazado la elipse, precisión que no es nunca rigurosa. Por esta razón es preferible emplear la esfera auxiliar.

Este último método ofrece, sin embargo, la ventaja de poder aplicarse a todos los conos, rectos u oblicuos, de base circular o cualquiera.

Otro método para determinar la intersección de un cono de revolución y de un cilindro cuyos ejes no son concurrentes

Método que utiliza una esfera auxiliar tangente al cono, lo que implica que es de revolución. El cilindro puede ser de base cualquiera.

PRINCIPIO (Fig. 1)

Construir una esfera inscrita en el cono S de radio variable, pero de valor tal que un cilindro C_1 , circunscrito a la esfera y de eje paralelo al del cilindro C , contiene a este último.

Construir el cilindro C_1 .

Cortar al cono y al cilindro C_1 mediante un plano P , que pasa por una generatriz G del cono y es paralela a los ejes de los cilindros. Este plano corta al cilindro C_1 según dos generatrices G_2 y G_3 (corta igualmente al cono según una generatriz G_1). Este plano corta también al cilindro C según dos generatrices G_4 y G_5 .

El cilindro C_1 y el cono S son tangentes a la misma esfera, por lo que el plano secante P corta a estos dos sólidos en dos puntos M y M_1 , situados en su intersección (elipse).

Si, en el diseño, se determinan las proyecciones del punto M , se puede construir las proyecciones de la generatriz G , que incluye dos puntos (6 y 9) de la intersección del cono y del cilindro C .

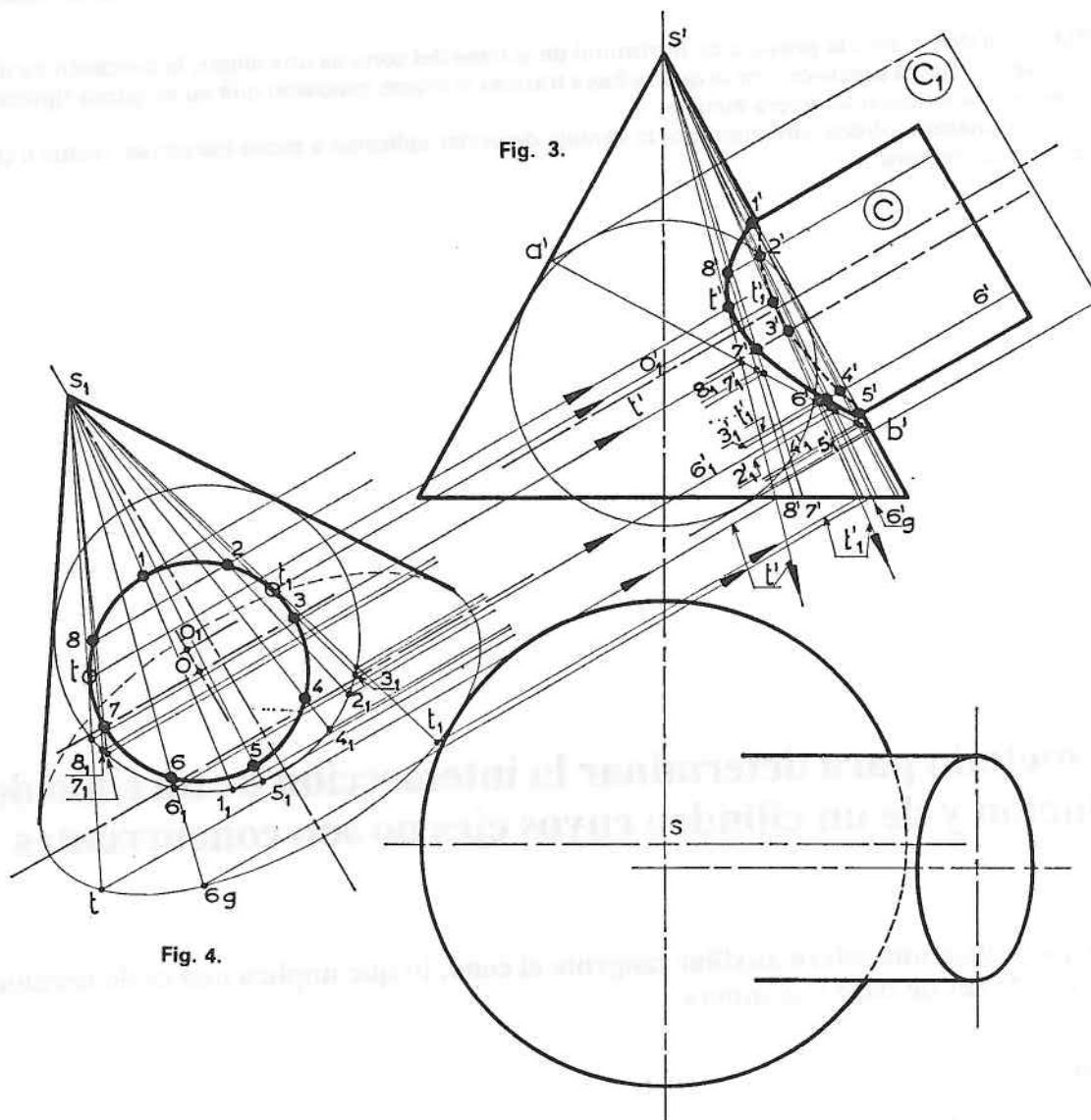


Fig. 4.

Fig. 2.

Fig. 3.

DISEÑO (Fig. 2, 3, 4)

Realizar un cambio de plano horizontal para hacer vertical el cilindro C (Fig. 4). La proyección horizontal de la intersección de los dos sólidos se confunde, de esta manera, con la proyección del cilindro, o sea un círculo de centro o .

Construir un círculo o'_1 (Fig. 3) tangente a las generatrices del contorno aparente del cono. Este círculo es la proyección frontal de una esfera tangente al cono. Hacer la proyección horizontal de esta esfera: círculo de centro o_1 (Fig. 4).

Construir la proyección frontal del cilindro C_1 , trazando tangentes al círculo o'_1 , paralelas al eje del cilindro C .

La proyección horizontal del cilindro C_1 se confunde con la de la esfera, es decir, el círculo o_1 . Este círculo es también la proyección de la intersección del cono y del cilindro C_1 . Unir $a'b'$ para construir la proyección frontal de la intersección del cono y del cilindro C_1 .

Un plano secante vertical que pasa, por ejemplo, por la generatriz 6 del cilindro C y el vértice del cono, corta a éste según una generatriz $S6$. El punto 6₁ es, por ejemplo, la proyección horizontal del punto M de la figura 1, situado en la elipse de intersección del cono y del cilindro C_1 . Refiriendo este punto sobre la proyección frontal $a'b'$, se obtiene el punto 6'₁, proyección frontal del punto 6₁ o M .

Uniendo s' con 6'₁, se construye la proyección frontal de la generatriz G del cono (Fig. 1), que incluye los dos puntos de la intersección 6 y 9.

La proyección horizontal de cada punto de intersección se confunde con la proyección de la generatriz del cilindro C , que lo contiene. Por lo tanto, para obtener la proyección frontal 6' del punto 6, es preciso construir la proyección frontal de la generatriz 6 del cilindro; su intersección con la generatriz 6 del cono da el punto 6'.

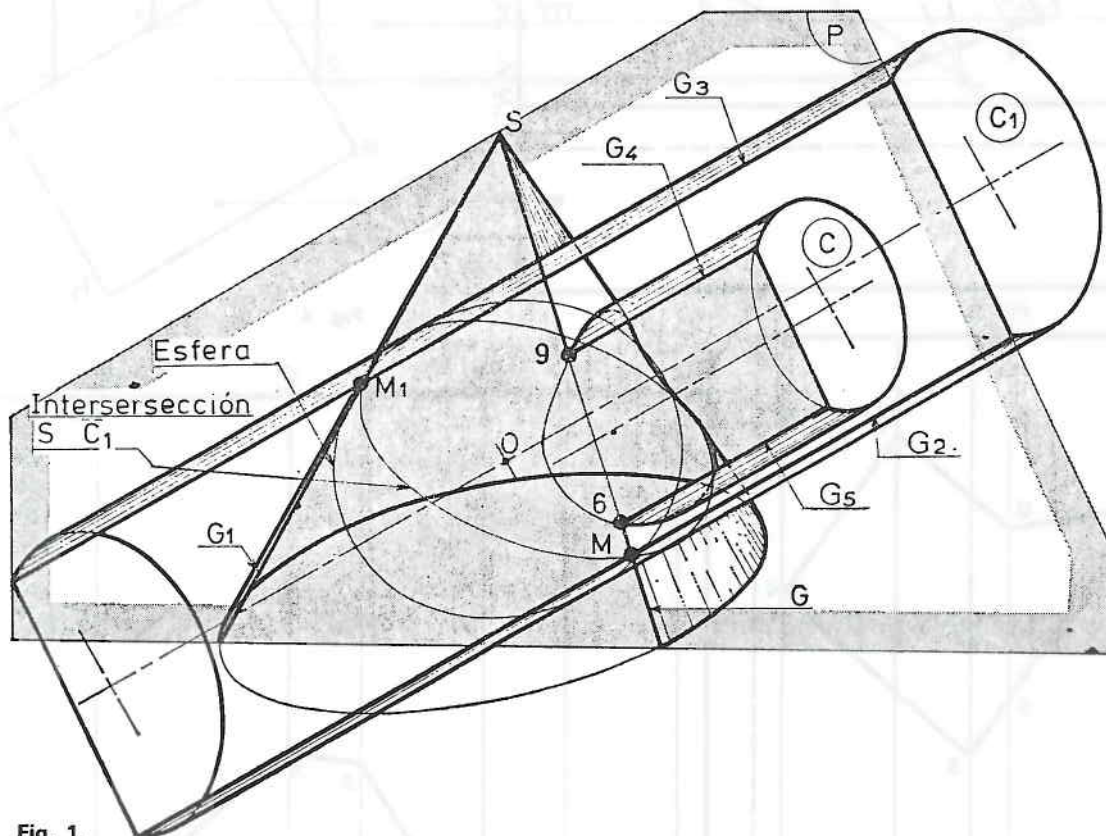
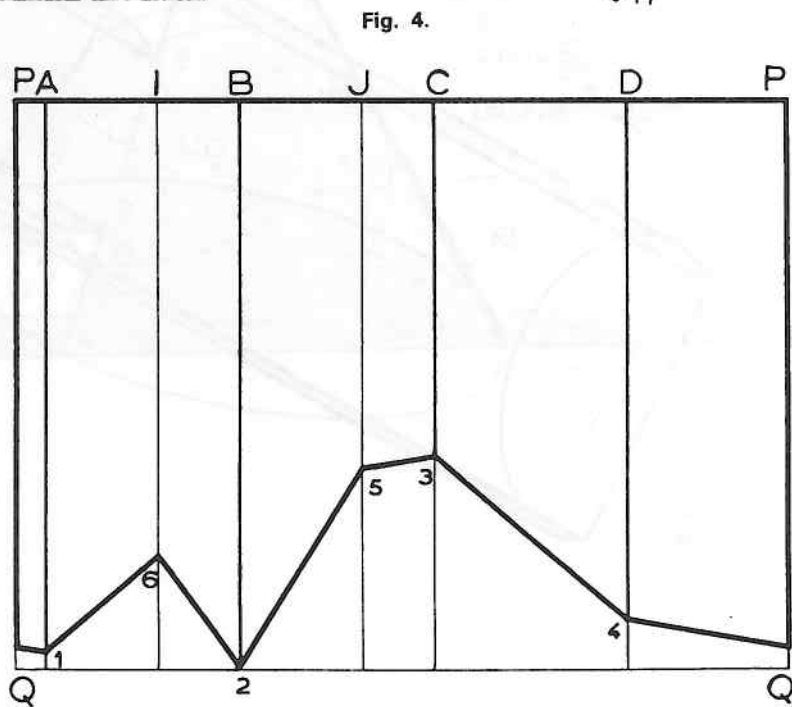
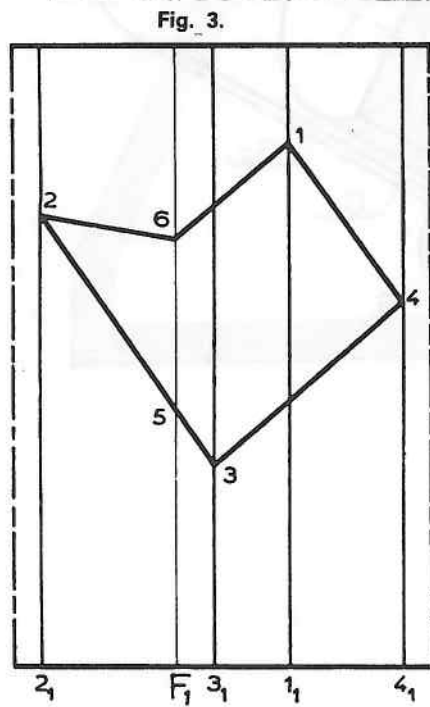
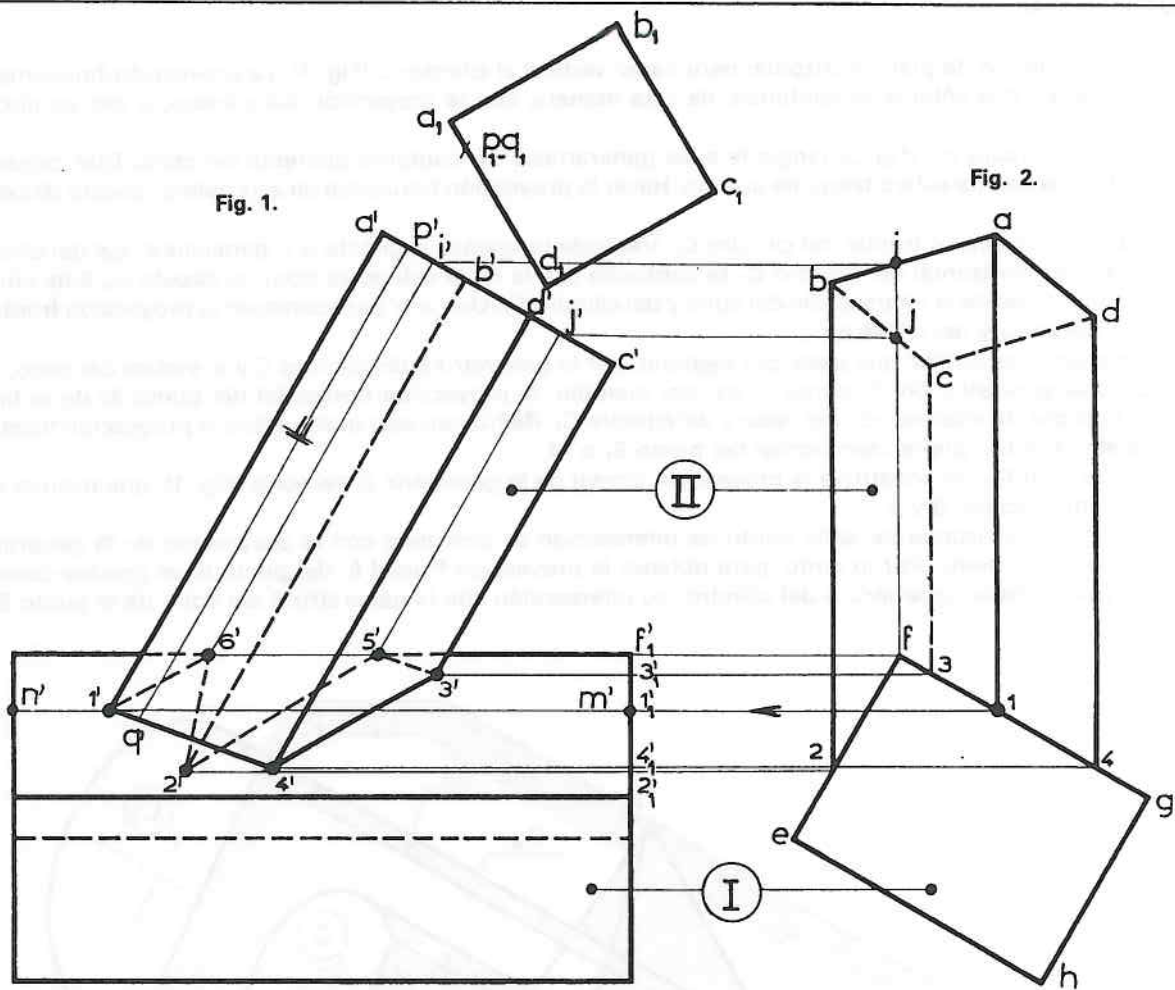


Fig. 1.



Intersecciones de poliedros

GENERALIDADES

Ya se trate de la intersección de dos prismas, de una pirámide y un prisma o de dos pirámides, la intersección se compone siempre de una o dos (si uno de los poliedros penetra al otro de lado a lado) líneas poligonales, en las que:

- Cada lado es la intersección de una cara del poliedro penetrante con una cara del poliedro penetrado;
- Cada vértice es la intersección de una arista de uno de los poliedros (penetrante o penetrado) con una cara del otro.

La búsqueda de la intersección puede, pues, descomponerse de la siguiente manera:

- Distinguir las aristas de cada poliedro que cortan uno o dos caras del otro;
- Encontrar las trazas de cada una de estas aristas en las caras del otro poliedro en las que penetran aquéllas;
- Unir convenientemente los puntos obtenidos.

I. INTERSECCION DE DOS PRISMAS

Se ha visto (tomo I) que un cilindro puede ser asimilado a un prisma, al que se le multiplican las aristas hasta el infinito; esta similitud permite tratar la intersección de dos prismas como la de dos cilindros. Se emplean, pues, planos secantes que son paralelos a la vez a las aristas de uno y otro prisma. Según las posiciones de los prismas respecto a los planos de proyección, se emplean: *los planos horizontales, frontales, de perfil o cualesquiera.*

DISEÑO

Sea un prisma I de sección rectangular, cuyas aristas son horizontal-frontales y un prisma II de sección cuadrada y de aristas frontales.

En una vista de perfil el prisma I se proyecta de canto y la intersección se confunde con una parte de dos de sus lados, de donde:

Empleo de planos secantes frontales.

1.º Los planos que pasan por las aristas *ABCD* del prisma II cortan a las caras del prisma I según rectas frontal-horizontales, cuyas proyecciones en la vista de izquierda (Fig. 2) son los puntos 1-2-3-4, y en la vista de frente rectas paralelas a las aristas.

EJEMPLO. Un plano secante que pase por la arista *A* del prisma II corta al prisma I según una recta proyectada en 1 (Fig. 2) y según *m'n'* (Fig. 1). El punto de corte de la proyección frontal de la arista *A* con *m'n'* es un punto 1', que pertenece a la intersección.

2.º La figura 2 muestra que la arista *F* del prisma I corta a las caras *AB* y *BC* del prisma II. Un plano secante frontal que pase por la arista *F* corta al prisma II según dos rectas frontales proyectadas en *fi* y *fj* (Fig. 2) y *i'6'* y *j'5'* (Fig. 1). Los puntos 6' y 5' situados en la arista *f'* son otros dos puntos de la intersección.

Para unir convenientemente los puntos de la intersección, referir bien la posición respectiva de cada plano secante; así; refiriéndose a la figura 2, se ve que el orden es 4-1-6 (en *if*), 2-5 (en *jf*) 3-4. Recordar después que un lado visible de la intersección tiene que unir dos vértices, ambos visibles.

DESARROLLOS

La parte del prisma I que incluye la penetración se representa en la figura 3. El trazado es interior. La figura 4 es el desarrollo (trazado interior) del prisma II.

Fig. 1.

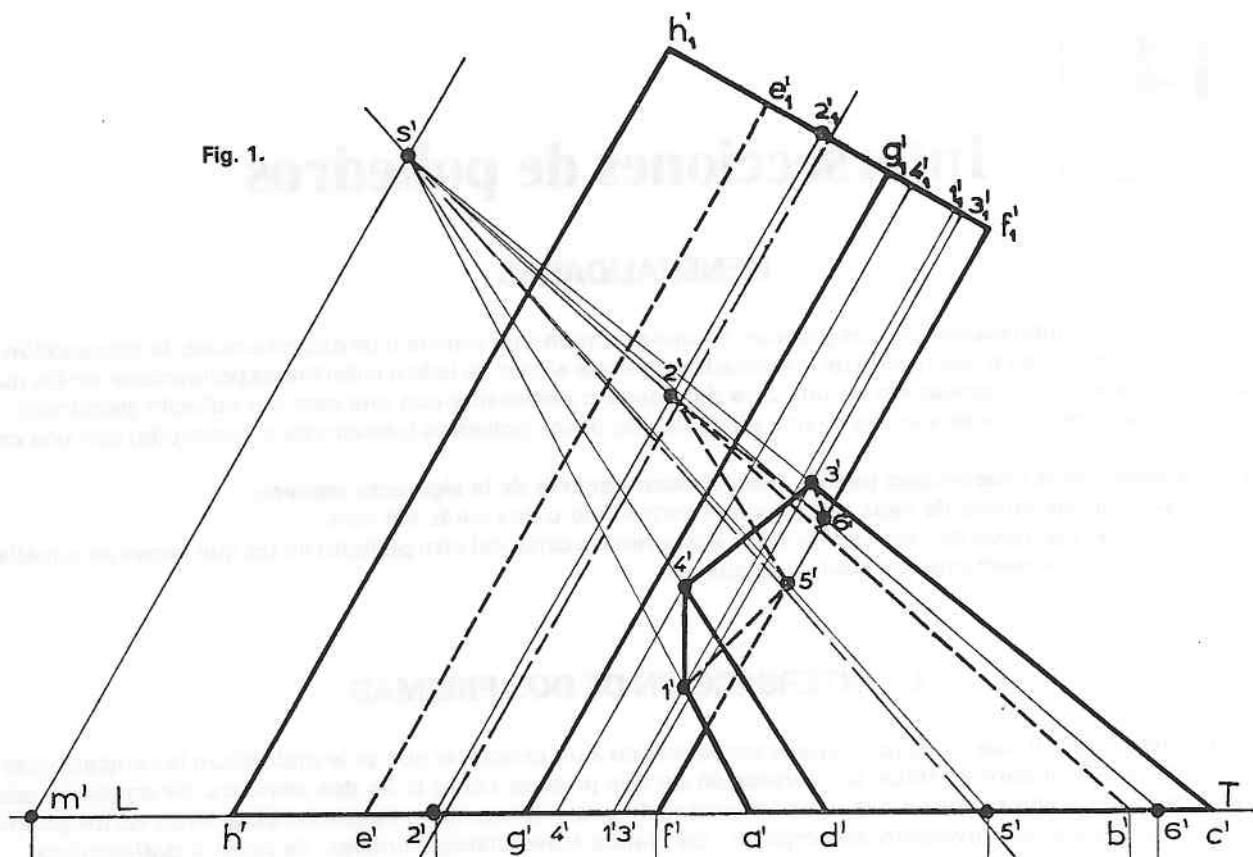
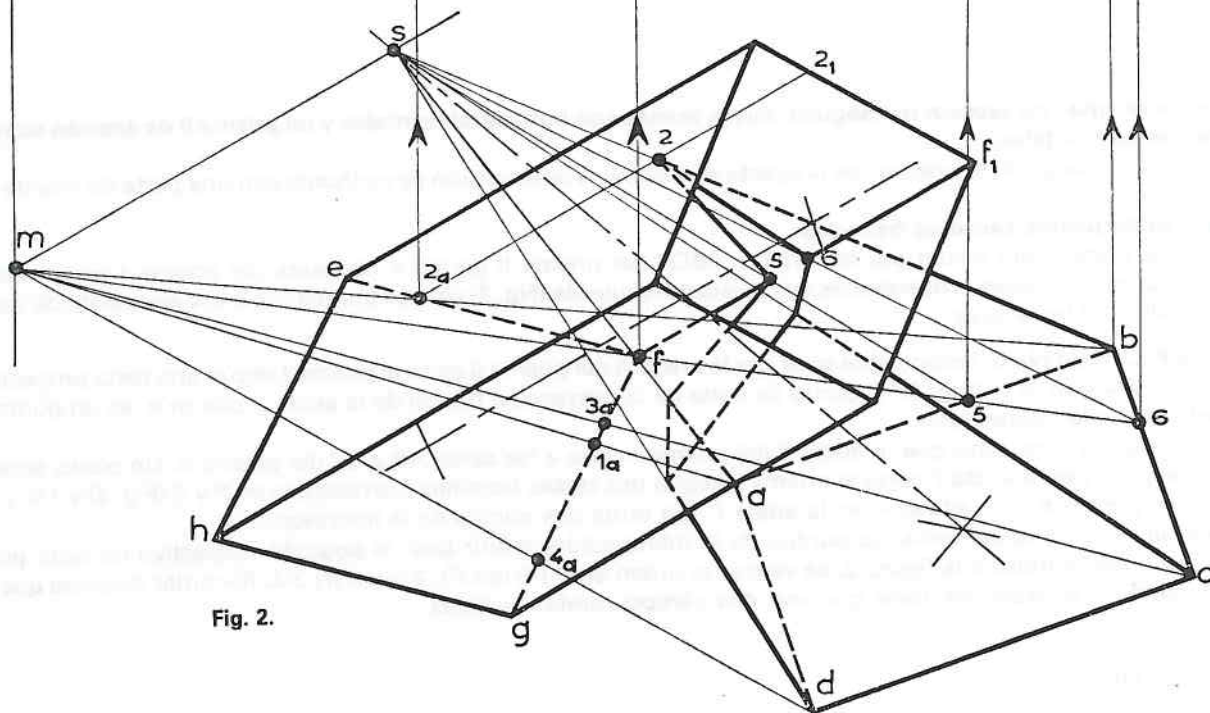


Fig. 2.



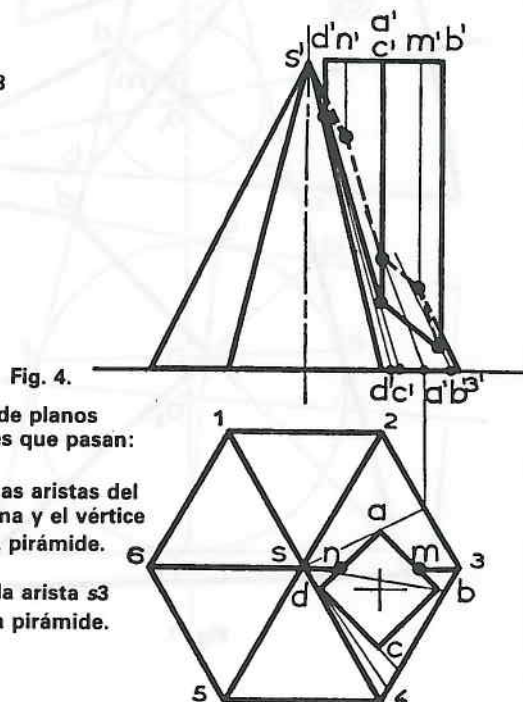
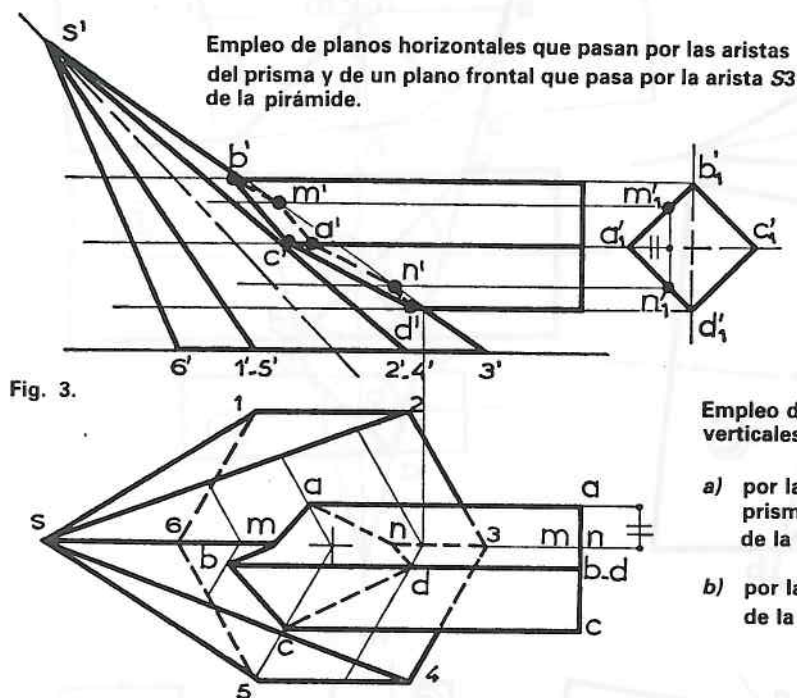
Intersección de una pirámide oblicua de base rectangular con un prisma oblicuo cuya base es un paralelogramo.

II. INTERSECCION DE UN PRISMA Y DE UNA PIRAMIDE

La intersección de una pirámide y un prisma se puede asimilar a la de un cono y un cilindro.

Según la posición de los dos poliedros respecto a los planos de proyección, se puede emplear ya los planos horizontales (Fig. 3), ya los planos verticales (Fig. 4), ya el método general.

No siendo el prisma de la figura 1 ni horizontal ni frontal, se emplea el método general: planos secantes paralelos a las aristas del prisma y que pasan por el vértice de la pirámide. Estos planos tienen como «charnela» la recta SM , proyectada en $s'm'$ y sm (ver intersección de cono y cilindro, página 112).



DISEÑO

Unir el punto m con cada uno de los cuatro vértices $abcd$ de la base de la pirámide; las rectas ma, mb, mc, md son las trazas horizontales de los planos secantes que pasan por las aristas SA, SB, SC, SD de la pirámide.

Es preciso hacer pasar también un plano secante por la arista F del prisma; la traza horizontal de este plano es la recta $mf-5-6$.

NOTA. Las otras aristas $E-G-H$ del prisma no afectan a la intersección; en efecto, las trazas me, mh, mg no cortarían la base de la pirámide; únicamente las caras EF y FG del prisma están interceptadas por la pirámide limitada a su entrada en el prisma.

Ejemplos de determinación de puntos de la intersección.

a) El plano que pasa por la arista B tiene por traza horizontal $m2_a b$ y corta al prisma según una recta paralela a sus aristas, cuya proyección frontal es $2'2'_1$. El punto de corte de esta recta y de la arista $s'b'$ es un punto $2'$ de la intersección.

b) El plano que pasa por la arista F del prisma tiene por traza horizontal $m.f. 5-6$. Dicho plano corta a la pirámide según dos rectas concurrentes en el vértice S , proyectadas en $s'5'$ y $s'6'$, cuyos puntos de corte con la proyección frontal de la arista F son los puntos $5'$ y $6'$ de la intersección.

La proyección horizontal se deduce de la proyección frontal.

Comprobación: Los puntos 1-2-3-4 de la intersección están situados en las aristas de la pirámide y en unas paralelas a las aristas del prisma; *ejemplos:* el punto 2 está en la intersección de la arista sb y de la paralela al eje del prisma que pasa por 2_a ; los puntos 5 y 6 están a la vez en la arista ff_1 del prisma y en las rectas $s5$ y $s6$.

OBSERVACION. Se habría podido empezar por construir la proyección horizontal de la intersección y deducir de ella la proyección frontal.

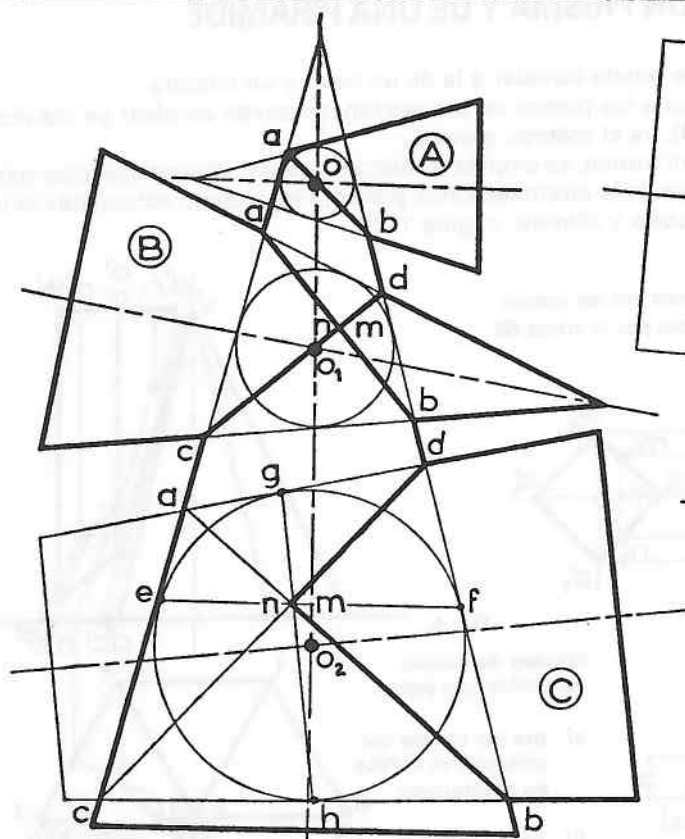


Fig. 1.

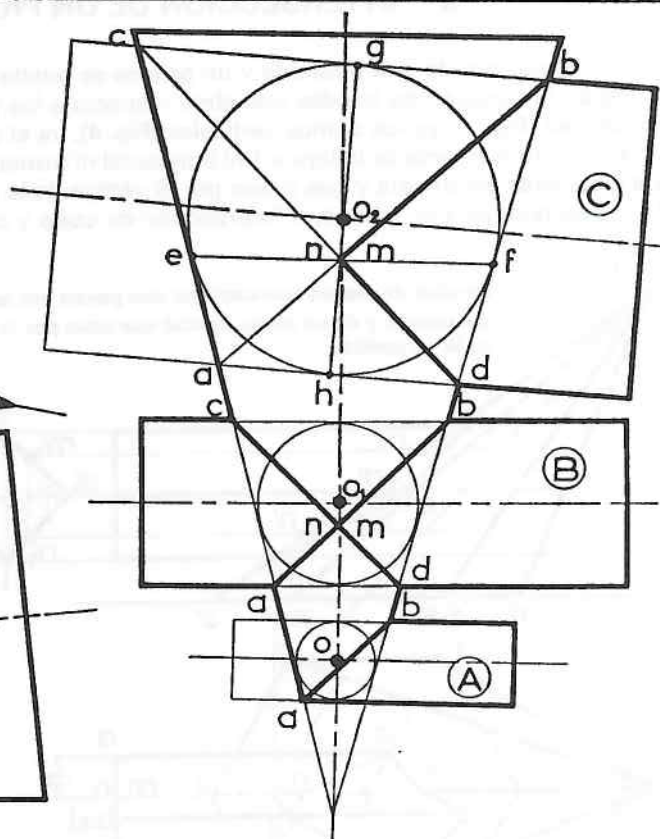


Fig. 2.

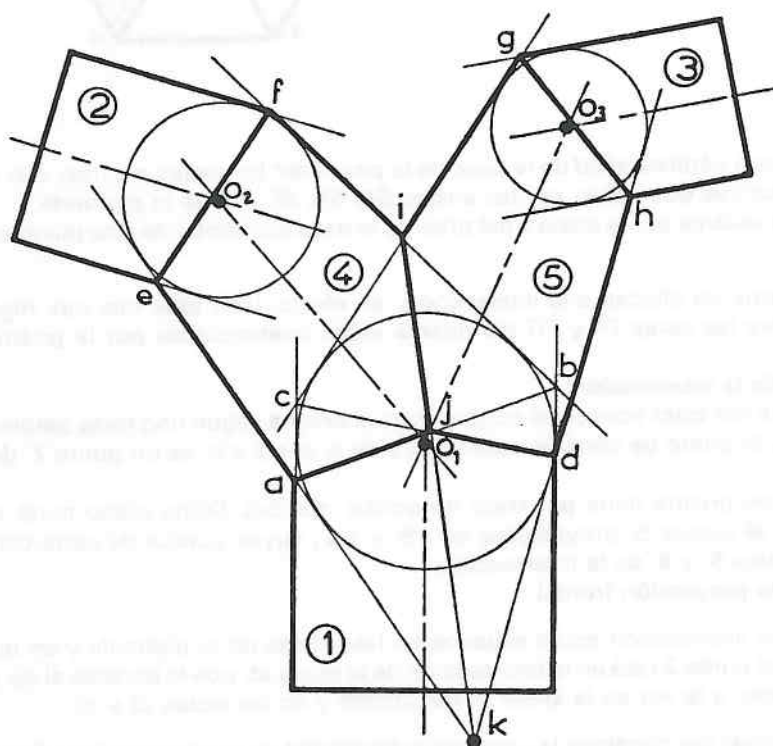


Fig. 3.

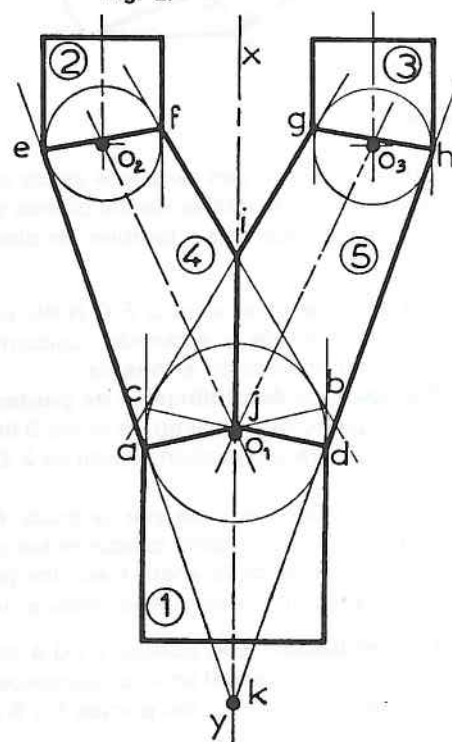


Fig. 4.

15

Intersecciones de cilindros y de conos circunscritos al mismo sólido de revolución

I. Cono y cilindro circunscritos a la misma esfera

Han sido ya estudiadas en el tomo I algunas aplicaciones de estas intersecciones: *Los codos cilíndricos* de dos o más de dos elementos y los codos cónicos formados de elementos de cono de revolución.

También se han estudiado casos particulares en el capítulo de las intersecciones simples de cilindros (Fig. 6, página 60) y en el capítulo de las intersecciones de cilindros y de conos de revolución (Figs. 1-2-3, página 66).

La figura 2 agrupa las diversas intersecciones de conos y de cilindros de revolución.

La figura 1 agrupa las diversas intersecciones de conos de revolución.

Todas estas intersecciones son elipses (ab y cd) o trozos de elipses (mb y md), porque son a la vez secciones planas de cilindros y secciones planas de conos, a los que se corta todas sus generatrices.

Las intersecciones AB y CD se cortan en los mismos puntos M y N (mn) que los círculos EF y GH de contacto de la esfera y las dos superficies circunscritas. *Las dos superficies tienen el mismo plano tangente en M y N .*

Algunos *pantalones* y algunas *mangas de aire* son aplicaciones de las intersecciones de cilindros y de conos circunscritos a la misma esfera.

A. PANTALONES

Un pantalón es una pieza que reúne varios elementos cilíndricos (caso general) o cónicos.

TRAZADO DE PANTALONES POR EL METODO DE LAS ESFERAS INSCRITAS

Sea unir el cilindro 1 con los dos cilindros 2 y 3 (Fig. 3).

NOTA. En principio la sección del cilindro 1 debe ser igual a la suma de las secciones de los cilindros 2 y 3.

Se dan: los diámetros y los ejes de los cilindros, así como los centros $o_1o_2o_3$ de las esferas inscritas.

Con cada uno de los centros $o_1o_2o_3$ trazar el círculo de proyección de la esfera igual al del cilindro correspondiente. Trazar las tangentes comunes a los círculos o_1 y o_2 por una parte y a los círculos o_1 y o_3 , por otra. Unir las intersecciones de las generatrices del contorno aparente; se obtienen así las rectas ab , cd , ef , gh , proyecciones de las elipses de intersección. El punto j (punto doble) está en la intersección de ab y cd . Unir ij , intersección de los dos elementos cónicos y proyección de un arco de elipse (la prolongación de ij pasa por k , punto de corte de las generatrices del contorno aparente ea y hd , y corta a todas las generatrices de cada cono).

El pantalón se compone de los elementos siguientes:

dos cilindros (2 y 3) cortados por un plano de canto; un cilindro (1) cortado por dos planos de canto; dos conos de revolución (4 y 5) cortados por tres planos de canto.

OBSERVACION. Si las dos esferas O_2 y O_3 son iguales y simétricas respecto al eje XY (Fig. 4), el pantalón tiene dos planos de simetría: uno frontal, como anteriormente, que contiene los tres centros, y otro de perfil, que pasa por XY . La intersección IJ está situada sobre este plano de simetría. Los dos cilindros 2 y 3 son simétricos, así como las dos superficies cónicas 4 y 5, lo que facilita los desarrollos.

Desarrollos de los elementos cónicos. Se realizan de la misma manera que el del codo cónico (tomo I, página 139).

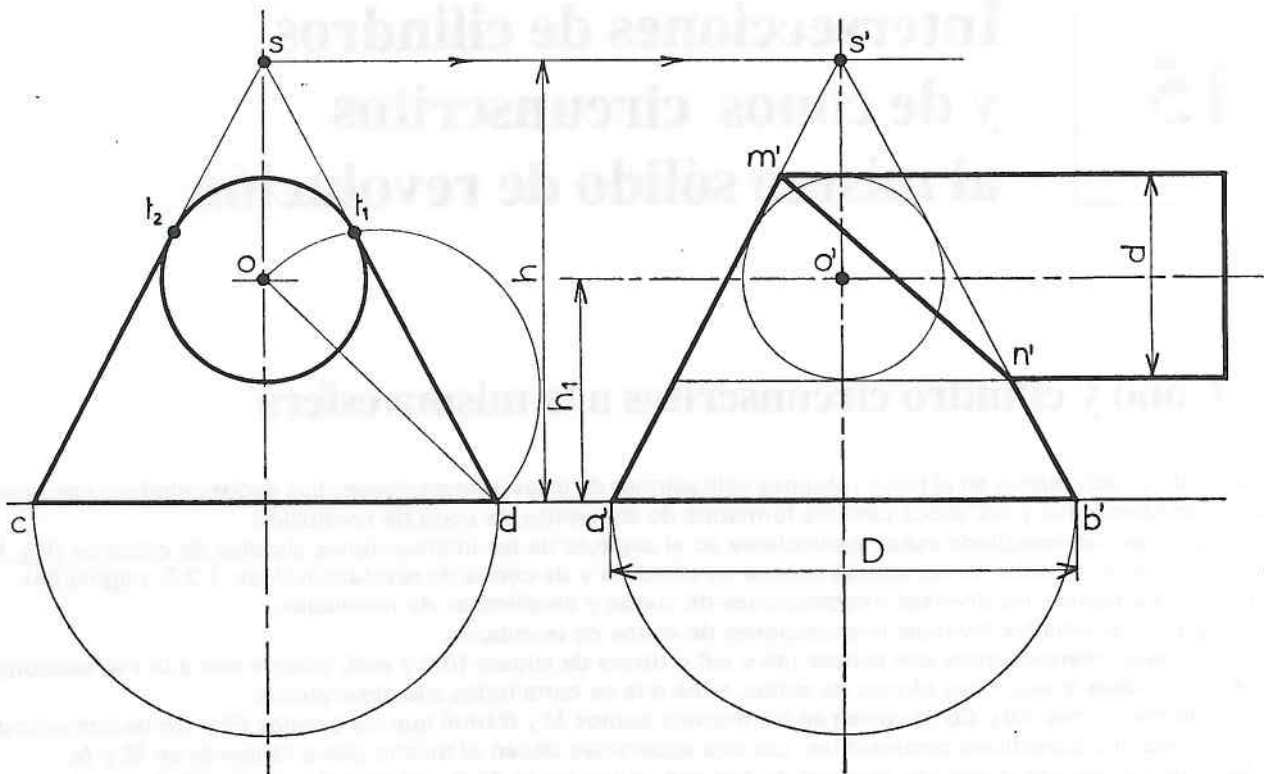


Fig. 1.

Fig. 2.

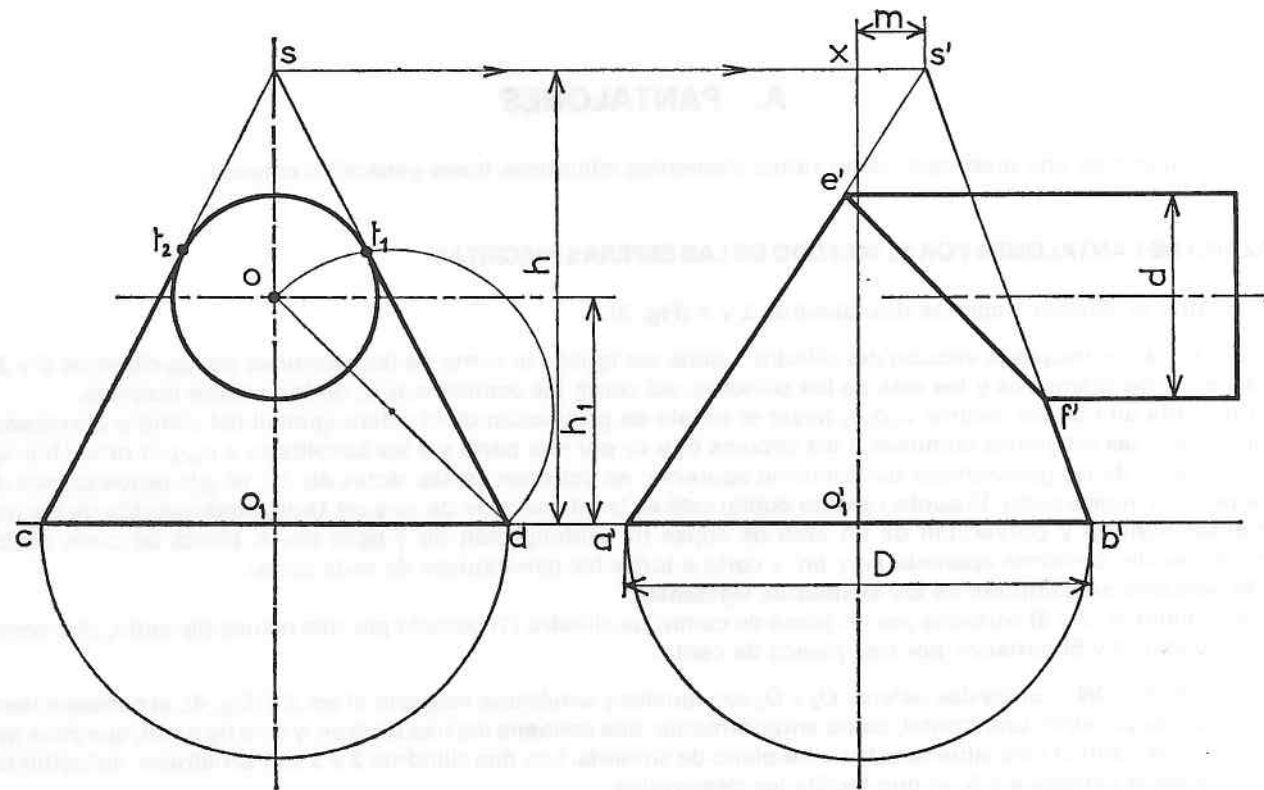


Fig. 3.

Fig. 4.

B. MANGAS DE AIRE

Estos aparatos, destinados a la ventilación de los barcos, se componen de dos elementos: uno cónico, otro cilíndrico. El cilindro es de revolución, lo que permite la rotación de la manga para orientarla convenientemente. La base del cono se llama «embocadura»; generalmente es circular o elíptica.

LA EMBUCADURA ES CIRCULAR; EL ELEMENTO CONICO ES UN CONO DE REVOLUCION

Datos: D, d, h_1 (Fig. 2).

No se puede fijar arbitrariamente la altura h del cono. En efecto, puesto que el cono y el cilindro deben ser tangentes a la misma esfera, en cada caso hay solamente un cono que pueda cumplir esta condición.

Búsqueda del vértice del cono. Establecer una vista en la que el cilindro se proyecte de canto, es decir, según un círculo; este círculo es también la proyección de la esfera inscrita en los dos sólidos.

Por los puntos c y d (Fig. 1) trazar dos tangentes al círculo; el punto de intersección s de estas dos tangentes es el vértice del cono; las rectas cs y ds son las proyecciones de los planos tangentes comunes al cono y al cilindro. Son también las generatrices del contorno aparente del cono. Referir s en s' y construir la proyección del cono $a's'b'$. Unir $m'n'$. El segmento de recta $m'n'$ es la proyección en verdadera magnitud del eje mayor de la elipse de intersección, cuyo eje menor es igual al diámetro del cilindro.

II. Cono y cilindro circunscritos al mismo elipsoide de revolución

El **elipsoide de revolución** es el sólido engendrado por la rotación de una elipse alrededor de uno de sus ejes. Si el eje de rotación es el eje mayor de la elipse, el elipsoide es alargado (balón de rugby). Si el eje de rotación es el eje menor de la elipse, el elipsoide es achatado (planeta Tierra, mandarina).

En calderería, estas intersecciones se encuentran en la construcción de las mangas de aire, cuyo elemento cónico es, ya un trozo de cono oblicuo de base circular, ya un trozo de cono recto de base elíptica, ya incluso un trozo de cono oblicuo de base elíptica. En todos los casos, el elipsoide inscrito es siempre un elipsoide alargado, cuyo eje menor es igual al diámetro del cilindro.

A. MANGA DE AIRE DE EMBUCADURA CIRCULAR. EL ELEMENTO CONICO ES UN CONO OBLICUO DE BASE CIRCULAR

Datos: Como en el caso del cono de revolución: D, d, h_1 , y, además, una cota m (Fig. 4) por ejemplo, que permita situar el vértice del cono después de haber determinado, por construcción, su altura.

Construcción del cono. Como anteriormente, hacer una vista que represente el cilindro «de canto», es decir, según un círculo. Este círculo es también la proyección del elipsoide de revolución tangente al cono y al cilindro.

Por las extremidades del diámetro cd (Fig. 3), trazar unas tangentes ct_2 y dt_1 al círculo o , para obtener la proyección de la manga de aire.

Prolongando las tangentes, se obtiene la proyección s del vértice S ; se determina así la altura h del cono. La proyección s' del vértice está, pues, situada en la horizontal salida de s . La longitud $xs' = m$ da este punto (Fig. 4). Se puede entonces trazar las proyecciones de las generatrices del contorno aparente del cono. Uniéndolos los puntos de intersección $e'f'$ de las generatrices del contorno aparente de los dos sólidos, se obtiene la proyección de la intersección (elipse) del cono y del cilindro.

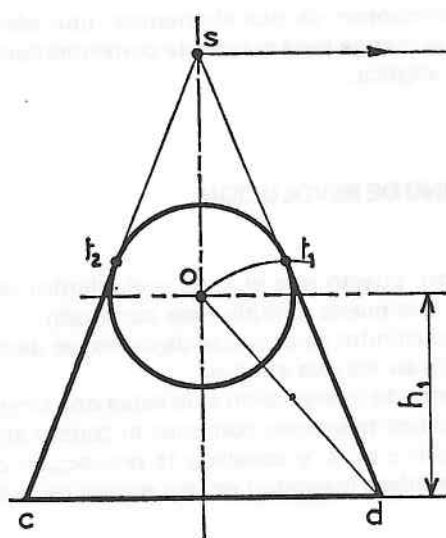


Fig. 5.

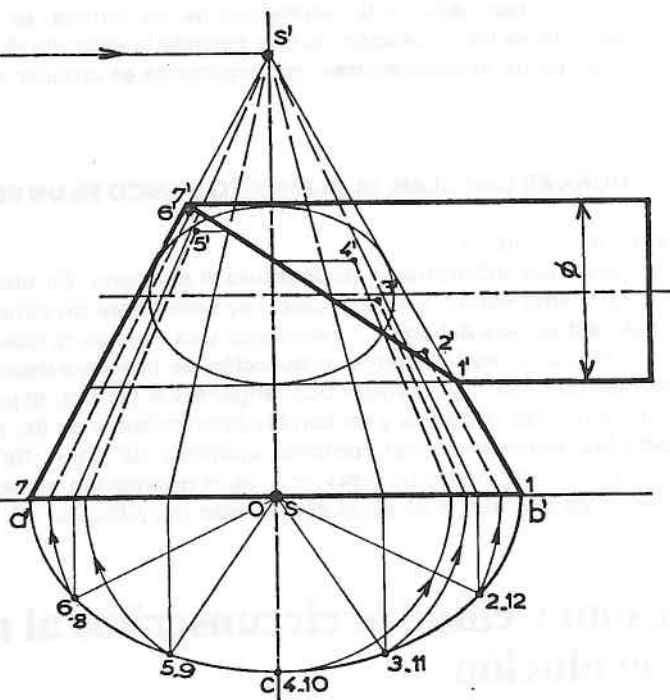


Fig. 6.

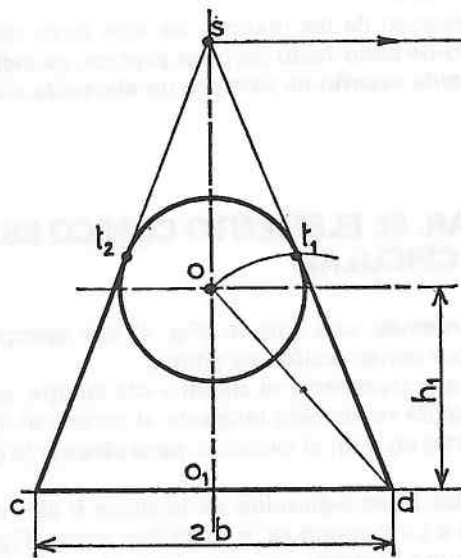


Fig. 8.

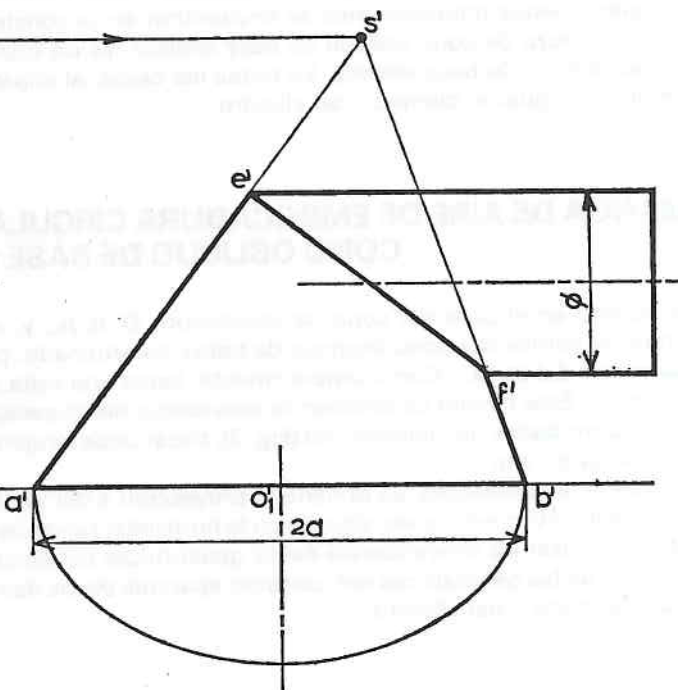


Fig. 9.

B. MANGA DE AIRE DE EMBOCADURA ELIPTICA

Construcción del cono. Ya sea recto (Fig. 6) u oblicuo (Fig. 9), el cono se construye como el de las mangas de embocadura circular.

Diagrama y desarrollo de la embocadura. En la figura 6, la base se ha dividido en 12 partes iguales. Por cada punto de división pasa una generatriz, cuya verdadera magnitud (de trazo interrumpido) se ha encontrado mediante rotación alrededor de un eje vertical que pasa por el centro o , confundido con la proyección s del vértice.

La figura 7 de más abajo da el desarrollo de esta embocadura. **No olvidarse de comprobar y corregir, en caso necesario, la transformada de la base:** durante el desarrollo cuarto a cuarto y después en el total.

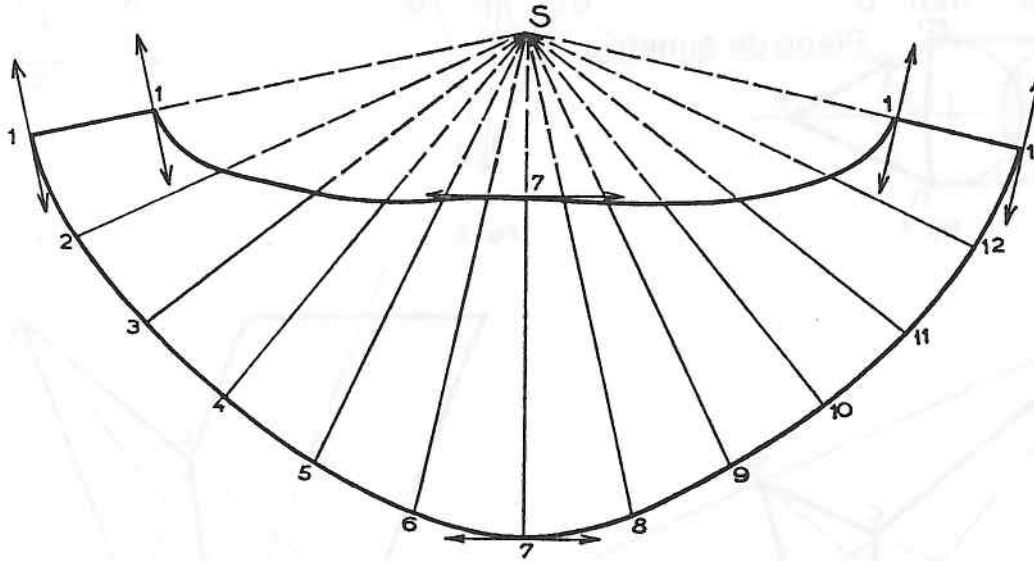


Fig. 7.



16

Intersecciones de cilindros y de conos que tienen una base común

I. GENERALIDADES

Se demuestran los teoremas siguientes:

1. Si dos cilindros o un cilindro y un cono tienen una base común circular, se cortan según una elipse o un círculo.
2. Si dos conos tienen una base común circular, se cortan según una cónica.
3. Si dos superficies, cilíndricas o cónicas, tienen una base común, son tangentes en dos puntos, que son los puntos de intersección de las dos líneas de intersección (puntos m y n , Fig. 1).

Si existe un plano de simetría, común a las dos superficies cilíndricas o cónicas, y si este plano es frontal, la intersección, que admite también este plano como plano de simetría, está situada en un plano de canto, como el del círculo común de la base. Al ser de canto, la intersección se proyecta en escorzo total, es decir, según una recta (Fig. 1).

1.º INTERSECCION DE DOS CILINDROS

La elipse de intersección se proyecta según cd (Fig. 2), recta que une los puntos de corte c y d de las generatrices del contorno aparente. La intersección, limitada a la base ab , es, por lo tanto, una parte de elipse. El punto e está en la mitad de ab , porque el cuadrilátero $abcd$ es un paralelogramo y sus diagonales ab y cd se cortan en su punto medio.

2.º INTERSECCION DE DOS CONOS

a) Los dos conos tiene la misma altura. El punto e está también en la mitad de ab (Fig. 3). En efecto, el plano tangente a los dos conos (teorema 3) pasa por los dos vértices; contiene, pues, la frontal-horizontal s_1s_2 ; su traza horizontal es también una frontal-horizontal t_1t_2 , tangente en e_1 a la semisección abatida.

El punto e , deducido de e_1 , está también en el punto medio de ab .

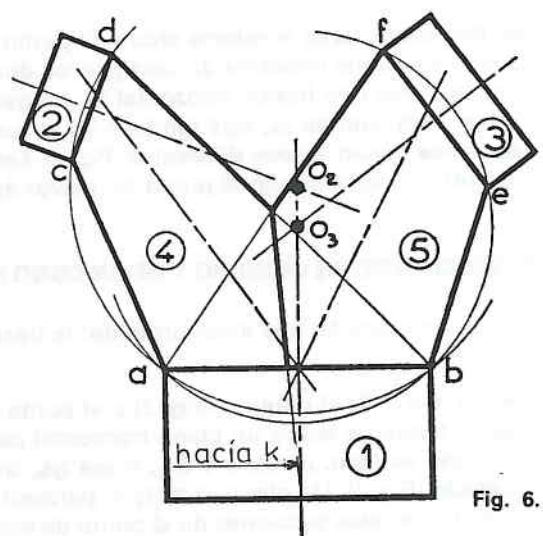
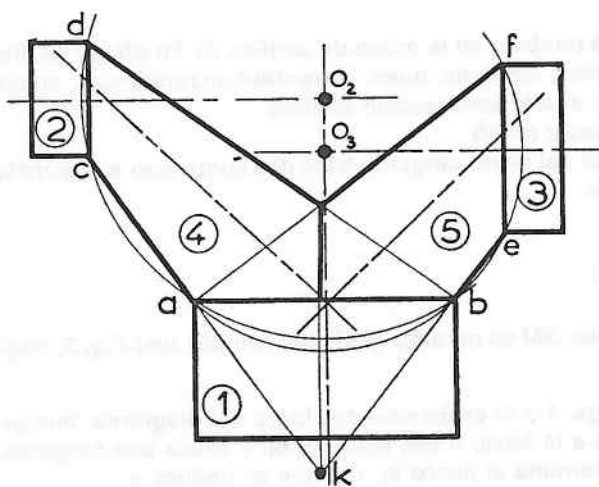
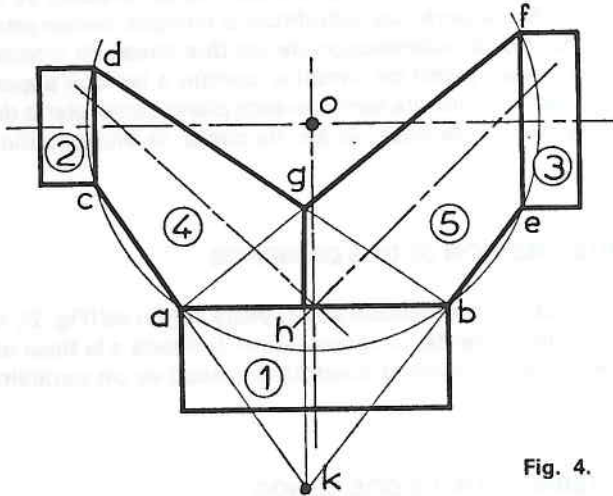
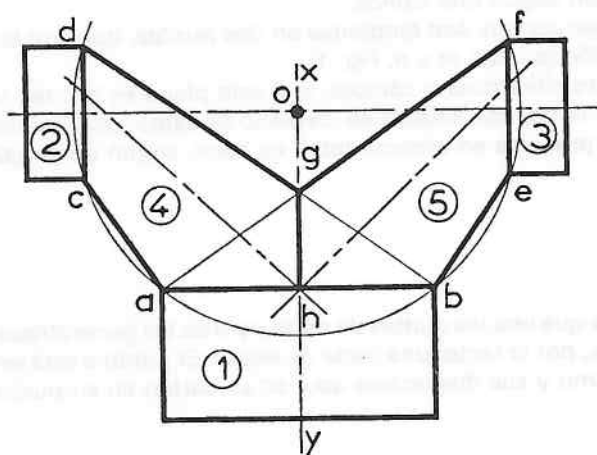
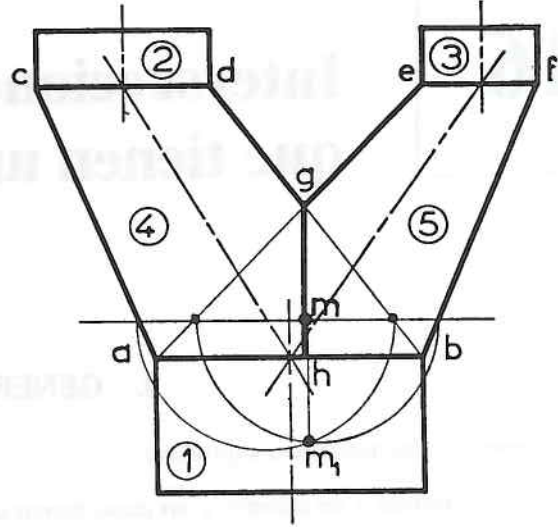
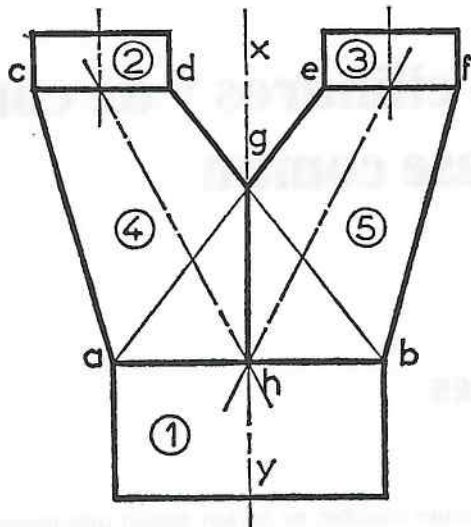
b) Los conos tienen alturas diferentes (Fig. 4). Las trazas del plano tangente a los dos conos son s_1m y mt (ver Fig. página 114) que determinan el punto e_1 ; elevar éste a e .

3.º INTERSECCION DE UN CILINDRO Y DE UN CONO (Fig. 5)

La misma construcción que anteriormente; la traza frontal SM es paralela al eje del cilindro (ver Fig. 3, página 108).

OBSERVACION. Si el punto d (Fig. 2) o el punto m (Figs. 4 y 5) están situados fuera del diagrama, buscar la traza del plano tangente sobre un plano horizontal paralelo a la base, o sea t_1t_2 (Fig. 6), y trazar una tangente al círculo de la base abatido, paralelo a t_1t_2 , o sea t_3t_4 , que determina el punto e_1 , del que se deduce e .

Otro método (Fig. 7). Un plano secante P , paralelo a la base, determina en cada sólido una sección circular. Un semiatamiento de estas secciones da el punto de encuentro m_1 que, elevado a m , es un punto de la intersección. La recta cm prolongada es la intersección buscada.



II. PANTALONES CUYOS ELEMENTOS CONICOS SON TROZOS DE CONOS OBLICUOS

1. LOS TRES EJES DE LOS CILINDROS ESTAN SITUADOS EN EL MISMO PLANO Y PARALELOS ENTRE SI

a) Los cilindros 2 y 3 tienen el mismo diámetro y están colocados simétricamente respecto al eje del cilindro 1.

Se conocen las tres secciones rectas: ab , cd , ef . Unir ca , ea y fb . La intersección gh es perpendicular en el punto medio a ab ; XY es el segundo plano de simetría del culote.

b) Los cilindros 2 y 3 tienen diferente diámetro (Fig. 2). La intersección gh es oblicua a ab .

2. LOS CILINDROS 2 Y 3 SON PERPENDICULARES AL CILINDRO 1

a) Los ejes son concurrentes (Fig. 3); fijarse en la base ab y, con centro en o , describir un círculo que pase por ab y que corta a las generatrices del contorno aparente de los cilindros 2 y 3 en los puntos c , d , e , f . Los elementos 4 y 5 son troncos de cono oblicuo de secciones antiparalelas.

Si los diámetros de los cilindros 2 y 3 son iguales, la intersección gh es perpendicular en el punto medio a ab y los dos troncos de cono 4 y 5 son simétricos. Si los diámetros de 2 y 3 son diferentes, la intersección gh es oblicua a ab (Fig. 4).

b) Los tres ejes no son concurrentes; si la sección ab está dada, describir dos arcos de círculo, que pasen ambos por ab , uno de centro o_2 , el otro de centro o_3 (Fig. 5 y 6). Los elementos 4 y 5 son también troncos de cono oblicuos de secciones antiparalelas.

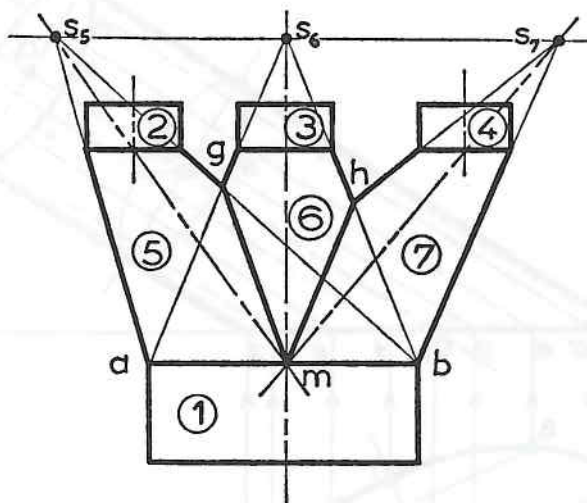


Fig. 7.

3. PANTALONES DE CUATRO ORIFICIOS

Los diámetros de los cilindros 2, 3 y 4 son iguales (Fig. 7). En ese caso los tres conos 5, 6 y 7 tienen la misma altura, y la recta s_5s_7 es paralela a la base común ab ; los dos planos tangentes a los tres conos determinan, pues, los puntos M y N , que se proyectan en m , punto medio de ab (ver Fig. 3, página 142). En el caso de la figura 7, el elemento 6 es un tronco de cono de revolución cortado por dos planos de canto; los elementos 5 y 7 son troncos de cono oblicuo cortados por un plano de canto.

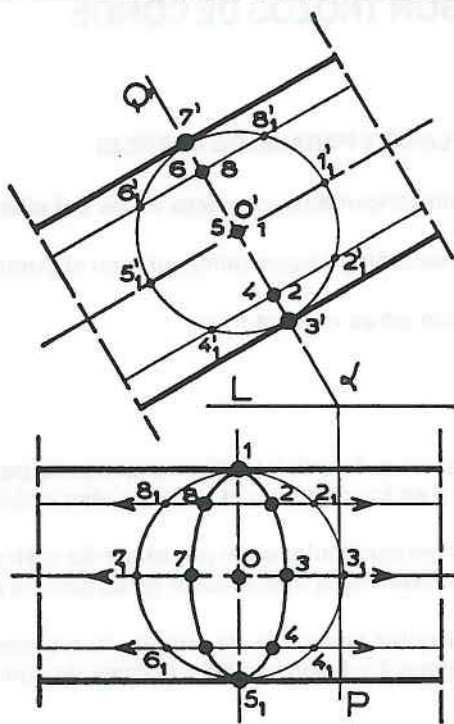


Fig. 1.

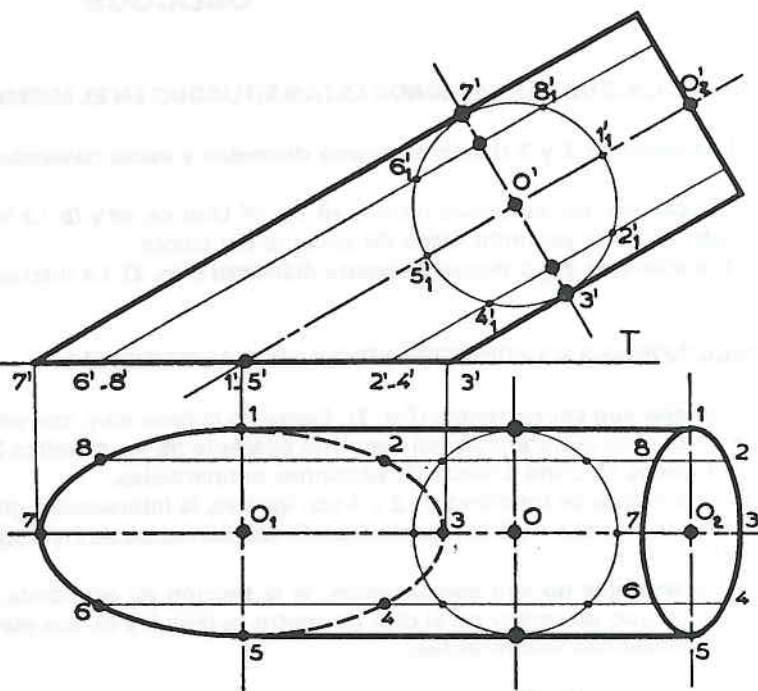


Fig. 2.

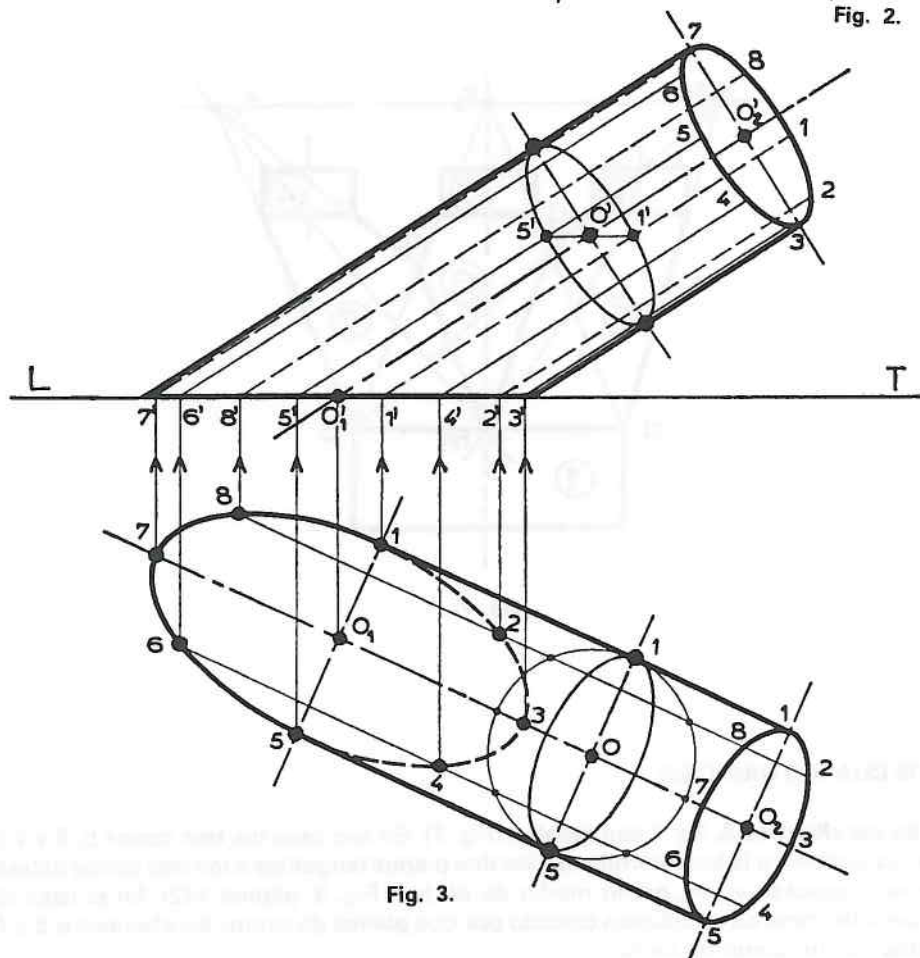


Fig. 3.

El sistema regular de generatrices en el cilindro de revolución

I. El eje del cilindro es paralelo a un plano de proyección

Se ha visto (tomo I) que, para establecer un sistema regular de generatrices, se abate sobre cada vista una sección recta, que se divide en partes iguales.

EJEMPLO. El cilindro es frontal y oblicuo al plano horizontal (Fig. 1). La sección recta, situada en un plano de canto $P\alpha Q'$, se proyecta en escorzo total en la vista frontal y en escorzo parcial (elipse) en la vista de arriba. *Se abate la sección recta sobre el plano frontal, haciéndola girar alrededor de un diámetro frontal 3'-7'*. Todos los puntos de la sección se desplazan describiendo cuartos de círculo sobre unos planos de canto paralelos al eje del cilindro. Se divide (en número par, generalmente múltiplo de cuatro) el círculo de la sección recta, tomando el diámetro 3'-7' como eje de simetría. Los puntos 1'-2'-4'-5'-6' de la sección recta abatida se proyectan perpendicularmente a 7'-3' en 1'-2'-4'-5'-6' etc.; pero, como las generatrices son también perpendiculares a 7'-3', se pueden trazar directamente las generatrices trazando por los puntos 2'-4'-6'-8', paralelas al eje del cilindro.

Se abate la sección recta sobre el plano horizontal, haciéndola girar alrededor del diámetro horizontal 1-5. Durante el movimiento de rotación, la proyección horizontal es una elipse, cuyo eje mayor es invariable (eje de rotación), pero cuyo eje menor aumenta progresivamente hasta igualar al eje mayor cuando la sección recta es horizontal. La elipse se transforma, por tanto, en un círculo (V.M.); simultáneamente, las proyecciones de los puntos de división se han desplazado perpendicularmente al eje de rotación, es decir, *paralelamente al eje del cilindro*.

De estas construcciones se puede entresacar:

- a) que el eje de rotación de la sección recta es paralelo al plano de proyección; este eje es siempre un diámetro;
- b) que, durante el abatimiento de la sección recta, todos sus puntos se desplazan paralelamente al eje del cilindro;
- c) que, si se comienza la partición por el extremo de un eje de rotación, y si el número de puntos es múltiplo de 4, las generatrices del contorno aparente forman parte del sistema regular en las dos vistas, con un desfase de 90° ;
- d) que todas las proyecciones de las generatrices (en número múltiplo de 4) se confunden dos a dos en las dos vistas;
- e) que, si el cilindro se prolonga hasta el plano horizontal (Fig. 2), las generatrices del contorno aparente pasan por los extremos de los ejes de la elipse (sección del cilindro cortado por el plano horizontal) en las dos vistas.

II. El cilindro es oblicuo a todos los planos de proyección

Haciendo girar el cilindro de la figura 2 alrededor de un eje vertical que pasa por O_1 , se le convierte en oblicuo a los dos planos de proyección (Fig. 3). La sección recta se proyecta entonces según una elipse en las dos vistas.

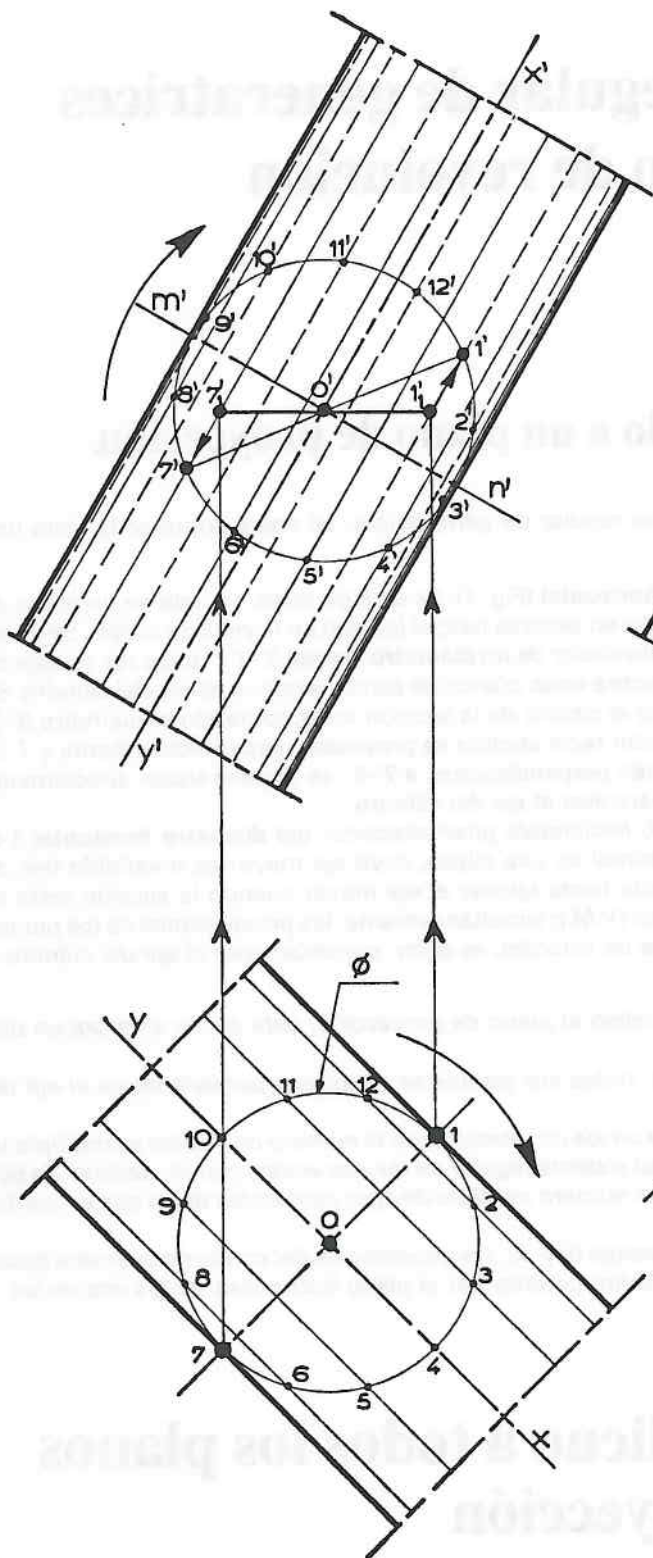


Fig. 4.

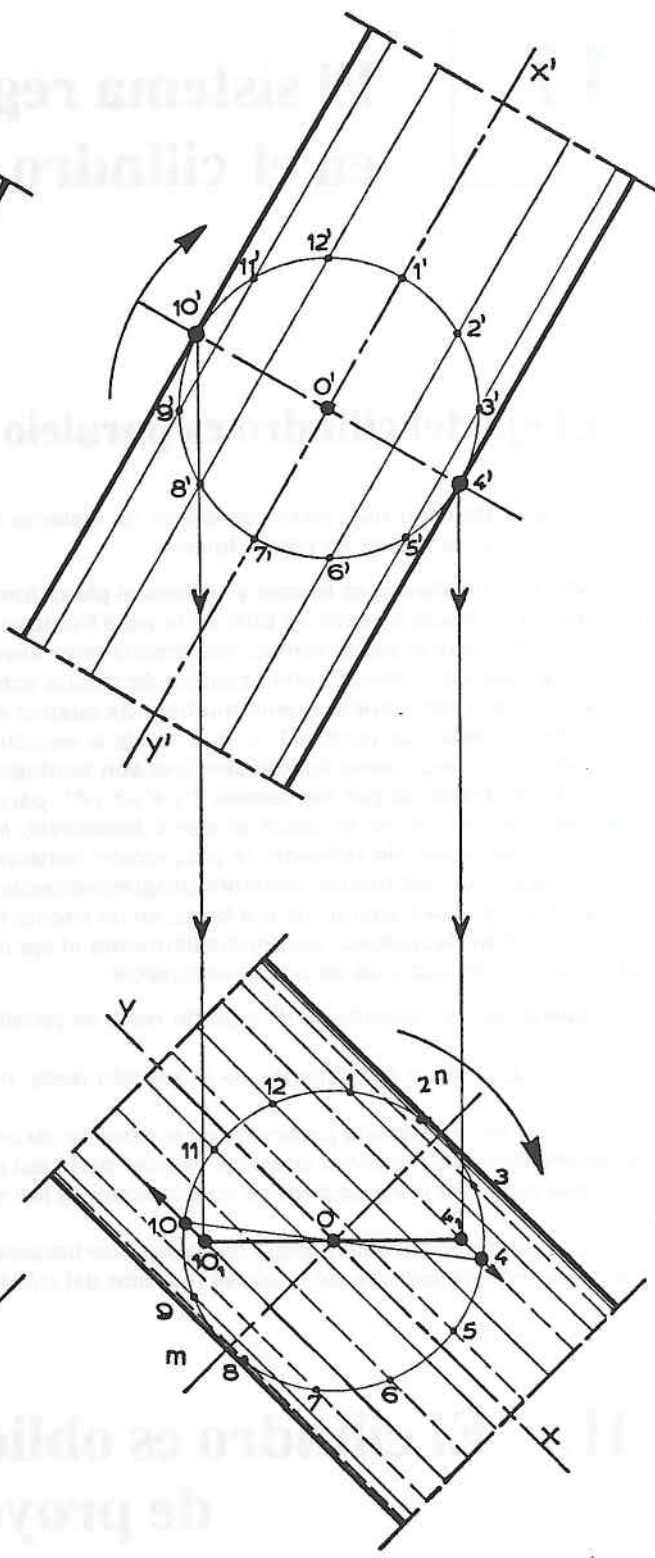


Fig. 5.

BUSQUEDA DE LAS PROYECCIONES DE LAS GENERATRICES

1. Se puede abatir la sección recta sobre un plano horizontal, tomando también, como eje de rotación, el diámetro 1-5, que se ha mantenido horizontal. Las proyecciones horizontales de las generatrices se confunden también dos a dos y las generatrices del contorno aparente forman parte del sistema regular.

2. Se pueden trazar las proyecciones frontales de las generatrices refiriendo los puntos 1-2-3, etc. de la elipse en 1'-2'-3', etc., y trazando por estos puntos paralelas al eje del cilindro.

SE OBSERVA: a) que las generatrices del contorno aparente no forman parte del sistema regular (o, si formasen parte, no serían las generatrices 7 y 3, como en la figura 2).

b) que las proyecciones de las generatrices sobre dicho plano no se confunden dos a dos.

CONSTRUCCION DE LAS GENERATRICES POR ABATIMIENTO DE LA SECCION RECTA SOBRE LAS DOS VISTAS

Sea un cilindro de revolución definido por su diámetro $\varnothing$ y su eje XY (Fig. 4).

Recordar que, cualquiera sea la posición del cilindro de revolución, las proyecciones de sus generatrices de contorno aparente están siempre a una distancia igual a la longitud de un diámetro.

1.º CONSTRUCCION DE LAS GENERATRICES COMENZANDO POR LA PROYECCION HORIZONTAL

a) Dividir la sección recta, abatida alrededor del diámetro horizontal 1-7, en partes iguales y hacer pasar las generatrices por los puntos de división.

b) **Construcción de las generatrices en la vista frontal.** Referir o en o' . Trazar por el punto o' una perpendicular a $x'y'$; esta perpendicular $m'n'$ es un diámetro *frontal*. En efecto, siendo igual al diámetro del cilindro, $m'n'$ es la proyección en verdadera magnitud de un diámetro paralelo al plano de proyección. Tomando MN como eje de rotación, se puede, pues, abatir la sección recta sobre el plano frontal.

Si se conoce, en la sección recta, el punto de paso de dos generatrices diametralmente opuestas, se podrá determinar después el conjunto de las generatrices; la vista de arriba nos da las proyecciones de dos generatrices 1 y 7, que responden a esta condición. Sabiendo que 1-7 es un diámetro *horizontal*, se obtiene las proyecciones $1'_1$ y $7'_1$, refiriendo 1 y 7 sobre una paralela a la línea de tierra que pase por o' . $1'_1$ y $7'_1$ son dos puntos de la elipse, proyecciones de la sección recta. Cuando se abate la sección recta sobre el plano frontal, haciéndola girar alrededor de $m'n'$, los puntos $1'_1$ y $7'_1$ se desplazan paralelamente al eje del cilindro y se proyectan finalmente en $1'$ y $7'$.

Comprobación: estos dos puntos deben ser diametralmente opuestos.

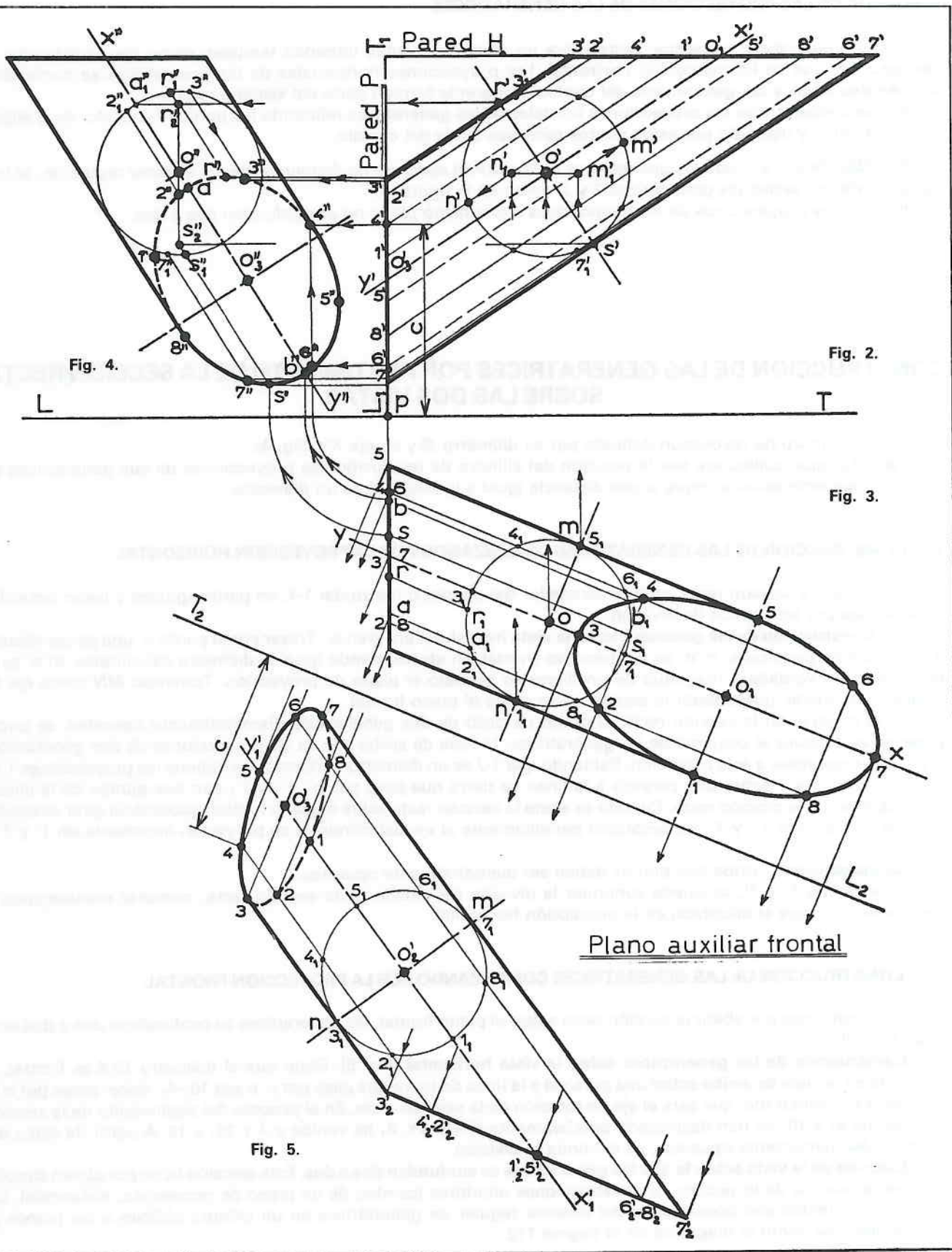
Conociendo $1'$ y $7'$, se puede continuar la división del círculo de la sección recta; numerar manteniendo el mismo sentido que el adoptado en la proyección horizontal.

2.º CONSTRUCCION DE LAS GENERATRICES COMENZANDO POR LA PROYECCION FRONTAL

Si se comienza por abatir la sección recta sobre el plano frontal, las generatrices se confundirán dos a dos en la vista frontal.

Construcción de las generatrices sobre la vista horizontal (Fig. 5). Dado que el diámetro 10-4 es frontal, se proyecta en la vista de arriba sobre una paralela a la línea de tierra que pasa por o , o sea 10₁-4₁. Hacer pasar por o un diámetro horizontal mn , que será el eje de rotación de la sección recta. En el proceso del abatimiento de la sección, los puntos 4₁ y 10₁ se han desplazado paralelamente al eje XY, 4₁ ha venido a 4 y 10₁ a 10. A partir de estos dos puntos, diametralmente opuestos, se continúa la división.

Elección de la vista sobre la que las generatrices se confunden dos a dos. Esta elección tiene por objeto simplificar, en la medida de lo posible, la construcciones ulteriores (cambio de un plano de proyección, desarrollo). Los diseños siguientes son aplicaciones del sistema regular de generatrices en un cilindro oblicuo a los planos de proyección, así como el diagrama de la página 112.



I. Unión de dos paredes ortogonales mediante un tubo cilíndrico

METODO DE EJECUCION

El cilindro (Fig. 1), cortado por dos superficies planas, presenta dos secciones elípticas.

Una vista de arriba da la verdadera magnitud y la orientación de la elipse de penetración en la pared H . Una vista de perfil da la verdadera magnitud y la orientación de la elipse de penetración en la pared P . Después de haber realizado la vista de arriba, se encuentra la verdadera magnitud del tubo mediante un cambio de plano frontal.

Para efectuar el desarrollo se necesita un sistema regular de generatrices. Las intersecciones de las generatrices con los planos H y P determinan los puntos de las dos elipses.

Puesto que se hace un cambio de plano frontal, se conservan la proyección horizontal y las cotas; es conveniente, pues, comenzar la construcción de las generatrices en la vista de arriba, con el fin de tener en esta vista las generatrices confundidas dos a dos.

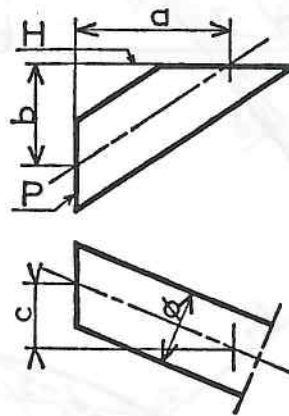


Fig. 1.

DISEÑO

1. Proyección horizontal y verdadera magnitud de la sección superior del cilindro (Fig. 3).

El diámetro horizontal MN se proyecta en mn , $m'n'_1$ y, después del abatimiento sobre el plano frontal de la sección recta alrededor de RS , en $m'n'$. Dividir el círculo o' en partes iguales y trazar las generatrices. Referir los puntos $1'-2'-3'...$ etc. sobre las generatrices correspondientes en la vista de arriba; se tienen, así, ocho puntos de la elipse.

Comprobación. El eje mayor de la elipse se confunde con la proyección xy . El eje menor $5-1$ debe pasar por o_1 . Las rectas $4-2$, $6-8$ deben ser perpendiculares al eje.

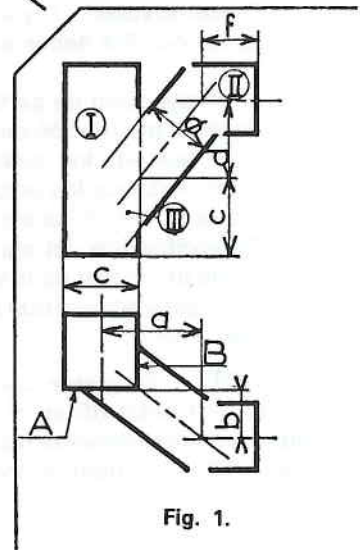
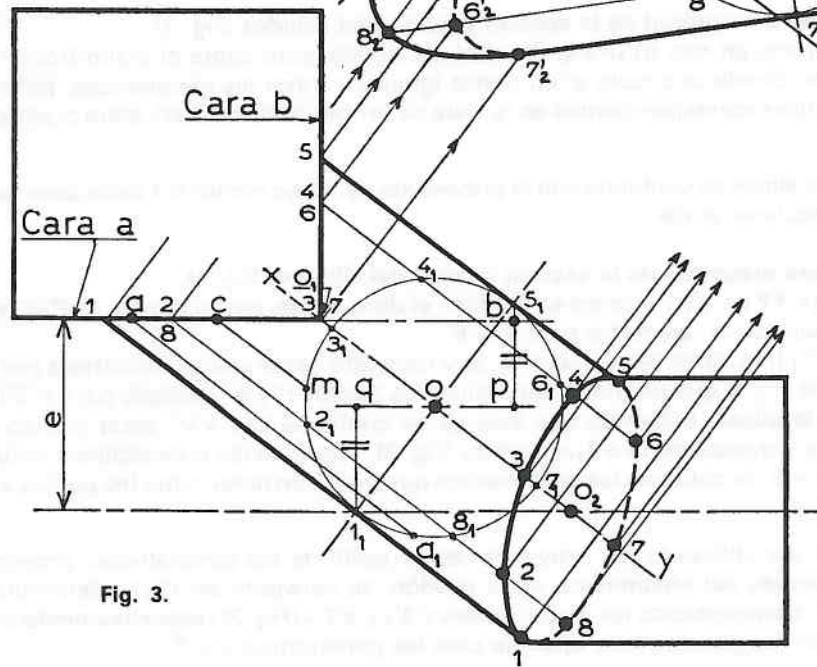
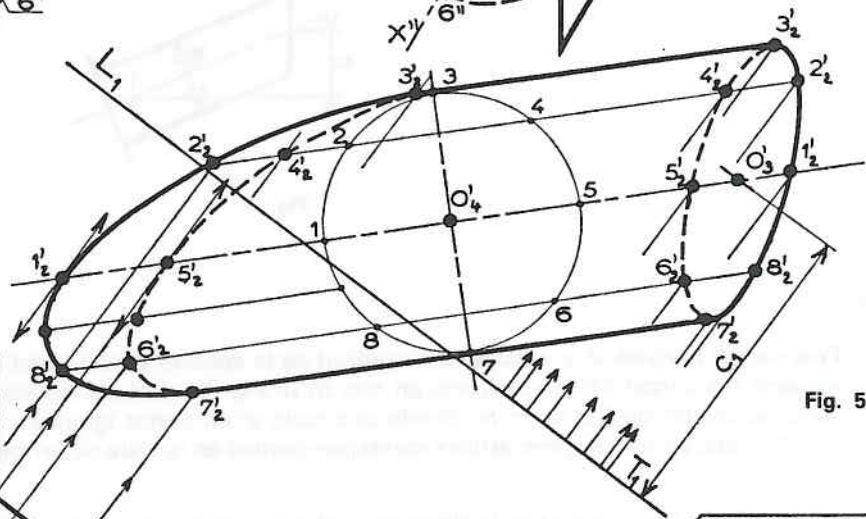
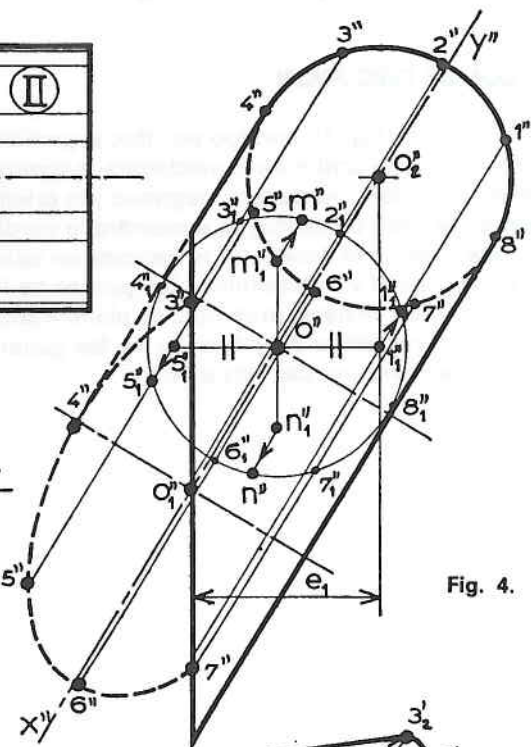
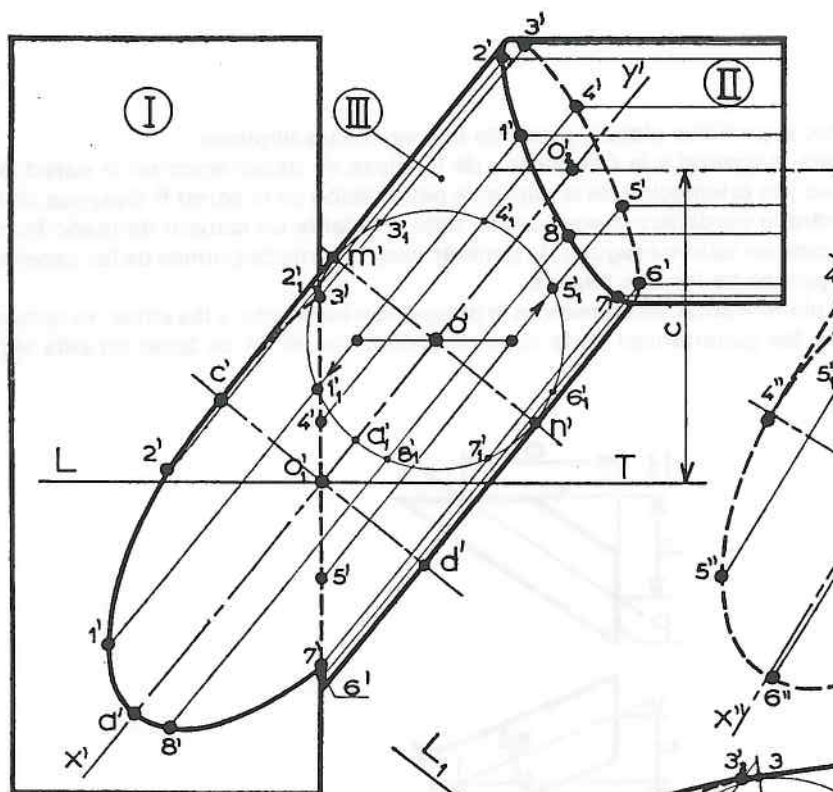
2. Proyección de perfil y verdadera magnitud de la sección inferior del cilindro (Fig. 4).

Hacer la proyección de perfil del eje XY en $x''y''$; este eje es también el de la elipse, cuyos puntos $1''-2''-3''$, etc. se obtienen llevando los alejamientos respectivos; *ejemplos* para $4''$ y $6''$.

Transportando los arcos $r'3'_1$ y $s'7'_1$ (Fig. 2) en 3_1r_1 y 7_1s_1 (Fig. 3) y haciendo pasar unas generatrices por estos puntos, se obtienen los alejamientos de R y S , que permiten determinar los puntos r'' y s'' ; *ejemplo* para s'' (Fig. 4).

Determinación del eje mayor de la elipse. Sabiendo que este eje se confunde con $x''y''$, sacar el arco $2''_1a''_1$ (Fig. 4) de un círculo de la sección recta y transportarlo a 2_1a_1 y a 6_1b_1 (Fig. 3). Trazando las proyecciones horizontales de las generatrices que pasan por A y B , se obtienen los alejamientos que permiten determinar los puntos a'' y b'' ; *ejemplo* para b'' .

NOTA. Se puede construir la elipse utilizando las proyecciones de perfil de las generatrices: proyectar el diámetro frontal RS en $r''_2s''_2$ que, después del abatimiento de la sección, se convierte en $r''_1s''_1$; determinar los puntos diametralmente opuestos $3''-7''$, transportando los arcos iguales $r'3'_1$ y $s'7'_1$ (Fig. 2) respectivamente en $r''_13''_1$ y en $s''_17''_1$. Continuar la división y trazar las generatrices; *ejemplo* para las generatrices 3 y 7.



3. **Verdadera magnitud del tubo.** Para hacer frontal al cilindro tomar una línea de tierra L_2T_2 (Fig. 5) paralela a xy y llevar las cotas tomadas de la figura 2; *ejemplo* para el punto 4 de la base inferior.

Comprobación. Todos los puntos de las dos elipses deben encontrarse sobre generatrices.

II. Unión de un prisma recto y de un cilindro de revolución mediante un tubo cilíndrico

METODO DE EJECUCION

- a) La intersección del cilindro III con el prisma I (Fig. 1) se confunde en la vista de arriba con la proyección de I.
- b) Puesto que el cilindro III es oblicuo a los dos planos de proyección, su intersección con el cilindro II se proyecta según una elipse en las dos vistas, elipse que es preciso construir.
- c) La verdadera magnitud de III se obtiene mediante un cambio de plano (frontal, por ejemplo).
- d) El cilindro II, horizontal-frontal, se proyecta en verdadera magnitud en las dos vistas.
- e) La vista de frente de la verdadera magnitud (trozo de elipse) de la penetración de III en la cara A de I.
- f) Una vista de perfil da la verdadera magnitud de la penetración (también un trozo de elipse) de III en la cara B de I.

DISEÑO

1. **Intersección de III con I.** Establecer un sistema regular de generatrices en las proyecciones frontal y horizontal. Llevar los puntos 1-2-3-4-5-6-7-8 (Fig. 3) a $1'-2' \dots 7'-8'$, en la figura 2.

Construcción de los ejes de la elipse de la cara A. El eje mayor se confunde con la proyección frontal de XY.

a) **Búsqueda del punto a' , extremo del eje mayor:** trazar la proyección horizontal de la generatriz A, transportando $8'_1a_1$ en 8_1a_1 ; referir el punto a en a' .

b) **Búsqueda del eje menor CD:** el centro de la elipse se proyecta horizontalmente en o_1 , porque o_1 es el punto medio de ab , proyección del eje mayor de la elipse que se obtendría cortando todas las generatrices. $c'd'$ es, pues, la perpendicular a $x'y'$, que pasa por o'_1 .

Comprobación: la proyección horizontal mc de la generatriz M del contorno aparente ($\widehat{m2'_1}$ (Fig. 3) = $\widehat{m'2'_1}$ (Fig. 2)) determina el punto c, que se refiere en c' .

2. **Construcción de las proyecciones de la intersección de los cilindros II y III.** En una vista de perfil, esta intersección se confunde con la proyección del cilindro II, o sea un círculo.

Hacer una vista de perfil izquierdo del cilindro II, transportando e en e_1 y establecer un sistema regular de generatrices (Fig. 4).

La construcción de las generatrices en la vista de perfil se puede hacer de dos maneras: 1.º proyectando el diámetro horizontal 1_1-5_1 en $1''_1-5''_1$ mediante el traslado de los alejamientos $p5_1 = q1_1$ (Fig. 3) a $o''5''_1, o''1''_1$. Llevar estos puntos a la sección recta abatida y continuar la división, subrayando que *el sentido de numeración sea el inverso de los precedentes*. 2.º proyectando el diámetro frontal MN y, después del abatimiento de la sección recta, transportando los arcos $m'2'_1 = n'6'_1$ (Fig. 2), respetando el sentido de numeración, en $m''2''_1$ y $n''6''_1$.

Después del trazado de las generatrices llevar los puntos de intersección $1''-2'' \dots 8''$ a las proyecciones frontales de las generatrices del mismo número.

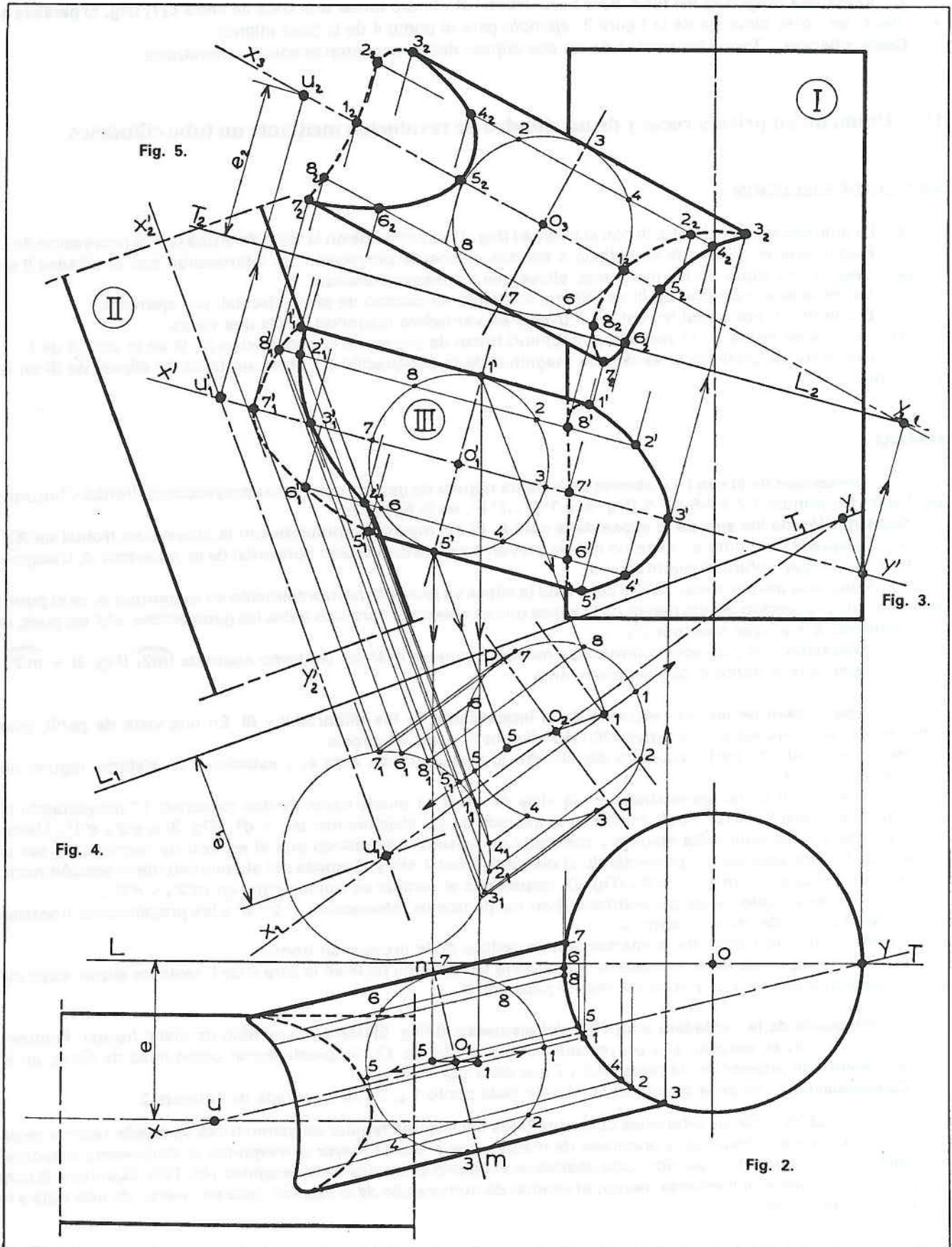
La proyección horizontal de la intersección se deduce de la proyección frontal.

La vista de izquierda da en verdadera magnitud la penetración de III en la cara B de I: trozo de elipse, cuyo eje mayor se confunde con $x''y''$ y cuyo eje menor pasa por o''_1 .

3. **Búsqueda de la verdadera magnitud del elemento III** (Fig. 5). Hacer un cambio de plano frontal: la nueva línea de tierra L_1T_1 es paralela a la proyección horizontal del eje XY. Se puede tomar como línea de tierra, en el primer sistema de proyección, la horizontal LT que pasa por o'_1 (Fig. 2).

Comprobación: se debe encontrar la cota de cada punto $1'_2, 2'_2 \dots 8'_2$, tomada de la figura 2.

OBSERVACION. De las diferentes construcciones del sistema regular de generatrices se puede sacar la regla siguiente: *cuando el cilindro está orientado de manera que a la cota mayor corresponde el alejamiento mayor, el sentido de numeración de la sección recta abatida es el mismo en las dos vistas* (páginas 148, 150). *Cuando, a la cota mayor corresponde el alejamiento menor, el sentido de numeración de la sección recta es inverso de una vista a la otra* (Fig. 4, de al lado).



III. Unión de dos cilindros de revolución mediante un tubo cilíndrico

Según los datos (Fig. 1), el cilindro I es vertical, el cilindro II es frontal y el acoplamiento III es oblicuo a todos los planos de proyección.

METODO DE EJECUCION

- La intersección de III con I:** se proyecta sobre el plano horizontal según un arco de círculo de centro c (Fig. 2); disponiendo de un sistema regular de generatrices se puede construir la proyección frontal.
- La intersección de III con II:** es un arco de la proyección del cilindro II sobre un plano perpendicular a su eje; de ahí la necesidad de una proyección sobre un plano horizontal auxiliar, de la que se deduce la proyección frontal.
- Verdadera magnitud del tubo III:** como las dos intersecciones están construidas sobre la vista frontal, se obtiene la verdadera magnitud del tubo, proyectándolo sobre un plano horizontal auxiliar, que le es paralelo.

DISEÑO

Puesto que se utiliza la vista frontal para la búsqueda de la magnitud real, comenzar por abatir y dividir una sección recta en esta vista.

1. **Intersección de III con I:** el diámetro frontal $1'-5'$ se proyecta en 1-5 en la vista de arriba (Fig. 2). Abatir la sección recta sobre el plano horizontal haciéndola girar alrededor de mn , dividirla en partes iguales y trazar las generatrices. Referir los puntos 1-2-3... etc. sobre la vista frontal (Fig. 3).

2. **Intersección de III con II:** tomar una línea de tierra secundaria L_1T_1 perpendicular al eje X_2Y_2 de II. Trazar el eje de III sobre el nuevo plano horizontal, transportando e (Fig. 2) en e_1 (Fig. 4). El diámetro frontal $1'-5'$ se proyecta en 1-5 (Fig. 4); abatir la sección recta alrededor de pq , dividirla en partes iguales y trazar las generatrices; subir los puntos $1_1-2_1-3_1...$, etc. a las generatrices correspondientes en la vista frontal.

OBSERVACION. Para efectuar el desarrollo, no es indispensable la proyección horizontal de esta intersección.

3. **Búsqueda de la verdadera magnitud de III:** Con el fin de disponer el tubo horizontal, trazar una línea de tierra L_2T_2 paralela al eje XY de III. Hacer la proyección del eje XY sobre el nuevo plano horizontal, transportando e (Fig. 1) en e_2 (Fig. 5). Abatir una sección recta, dividirla en 8 partes iguales y trazar las generatrices, que se confunden dos a dos. Referir los puntos $1'-2'-3'$, etc. y $1_1'-2_1'-3_1'$, etc. sobre las generatrices correspondientes.

Comprobación: Los alejamientos de todos los puntos de la figura 5 deben ser iguales a los de la figura 2.

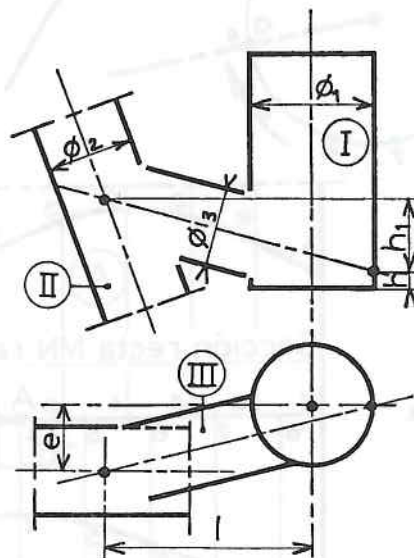


Fig. 1.

Fig. 1.

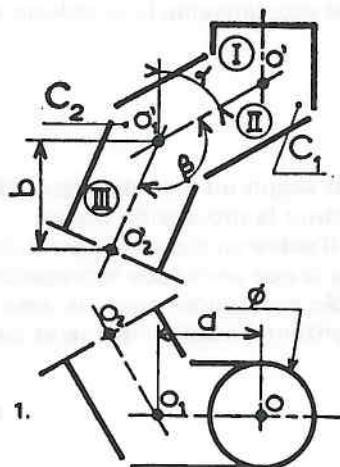


Fig. 2.

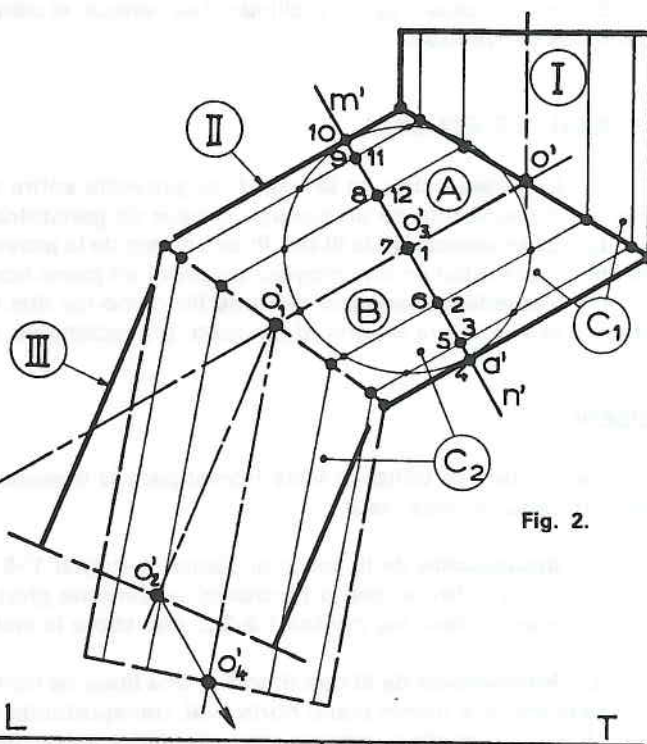


Fig. 4.

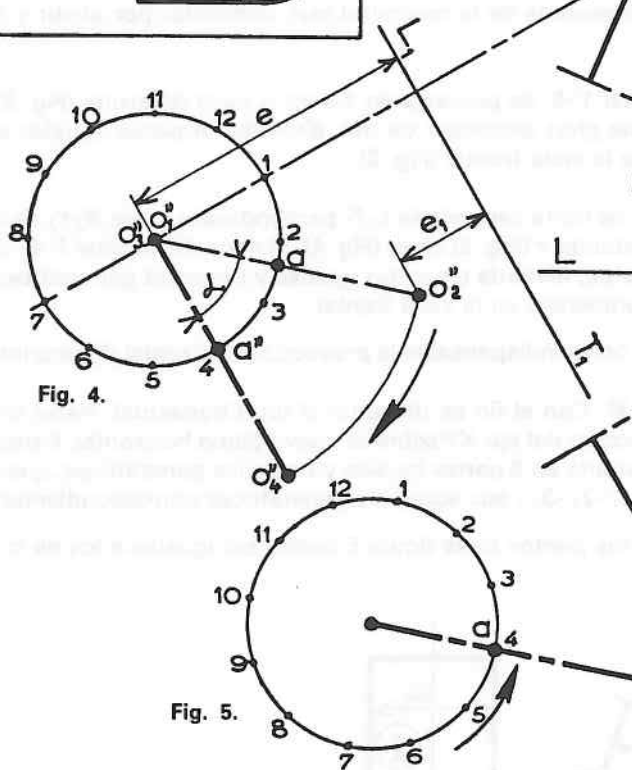


Fig. 5.

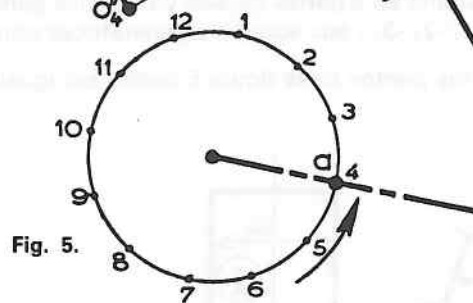


Fig. 3.

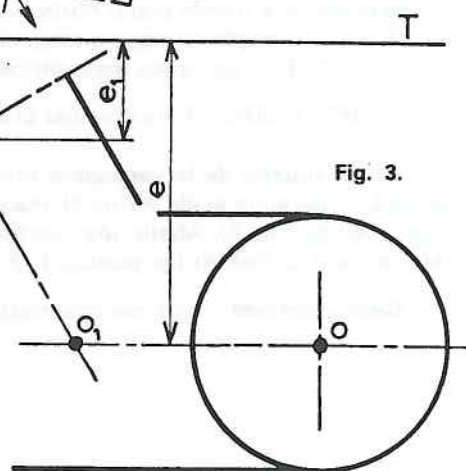
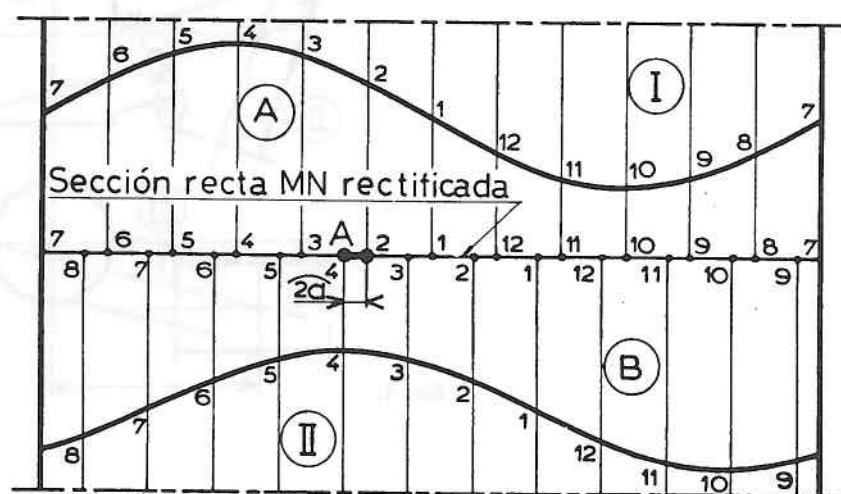


Fig. 6.



18

Resolución de intersecciones por el método de rotación llamado «del ángulo de desfase»

DOBLE CODO CILINDRICO, CON DOS ELEMENTOS DE EJES SITUADOS EN PLANOS DIFERENTES

Según los datos (Fig. 1), se ve que los ejes de I y de II están en el mismo plano frontal. La elipse de intersección es entonces de canto, y por tanto en escorzo total en la proyección frontal. El eje del elemento II es frontal, el eje del elemento III es oblicuo a todos los planos de proyección; la intersección de estos dos elementos es, pues, oblicua a los dos planos de proyección, sobre los que se ve en escorzo parcial (elipse).

El diseño del codo C_2 puede construirse aplicando el método del «sistema regular de generatrices», que necesita las construcciones siguientes:

1. Cambio de plano horizontal, que hace vertical al cilindro II, con el fin de confundir la proyección horizontal de la intersección de II con III con la del cilindro.
2. Construcción de un sistema regular de generatrices.
3. Determinación de la proyección frontal de la elipse de intersección.
4. Búsqueda de la verdadera magnitud de III, mediante un segundo cambio de plano horizontal, que haga horizontal al cilindro.

Método del ángulo de desfase

DISEÑO

1. Cortar al elemento II por una sección recta MN , que lo divida en dos partes A y B (Fig. 2).
 2. Hacer una proyección horizontal sobre un plano auxiliar perpendicular al eje de II, construyendo una línea de tierra secundaria L_1T_1 , perpendicular a la proyección $o'o'_1$. El elemento II y la intersección de II y III se proyectan según un círculo (Fig. 4).
 3. Construir la proyección horizontal del eje O_1O_2 de III en $o''_1o''_2$ (Fig. 4).
 4. Hacer girar el codo C_2 alrededor del eje vertical O_1-O_3 en el sentido de la flecha (Fig. 4), hasta que el eje de III sea frontal. El eje O_1-O_2 , después de dicha rotación, se proyecta en $o''_1-o''_4$ y $o'_1-o'_4$.
- Como los dos elementos del codo C_2 son frontales, su intersección se ve en escorzo total en el plano frontal, igualmente que la base del cilindro III. Completar la proyección frontal, en la que el codo C_2 se ve en magnitud real.
5. Construir las generatrices (las de I y las de III no son indispensables).

DESARROLLO DEL ELEMENTO II (Fig. 6)

- a) **Desarrollo de la parte A;** corregir la sección recta MN , dividirla en doce partes iguales, trazar las generatrices y llevar sobre ellas las verdaderas magnitudes, tomadas de la figura 2.
- b) **Desarrollo de la parte B;** las generatrices se proyectan en magnitud real en la figura 2, pero no están en su sitio. Para colocar el codo C_2 en la posición requerida, es preciso girarlo en sentido inverso y con la misma amplitud (ángulo α) que la rotación que lo hizo frontal. Después de esta rotación las generatrices se proyectan como en la figura 5.

La medida del ángulo α es la del arco $4a$ (Fig. 4) de la sección recta. Para construir las generatrices de B en el desarrollo, es preciso, pues, **desfasar** (de ahí el nombre del método) las generatrices de A del valor del arco $4a$ rectificado.

Se observa en las figuras 4 y 5, que la generatriz 4 ocupa, después de ser colocada en su sitio, la posición de a; basta, por tanto, referir exactamente la posición de este punto; hay que destacar (Fig. 4) que dicho punto está situado entre las generatrices 2 y 3 del elemento A. En el desarrollo, el punto A se obtiene llevando desde 2, y hacia 3, el arco rectificado $2a$. Una vez en su sitio el punto A, correspondiente a la generatriz 4, trazar todas las generatrices, numerarlas y llevar sus verdaderas magnitudes, tomadas de la figura 2.

El método del ángulo de desfase es más rápido que el del sistema regular de generatrices, estudiado en el capítulo anterior; es también más sencillo y, por lo tanto, más preciso.

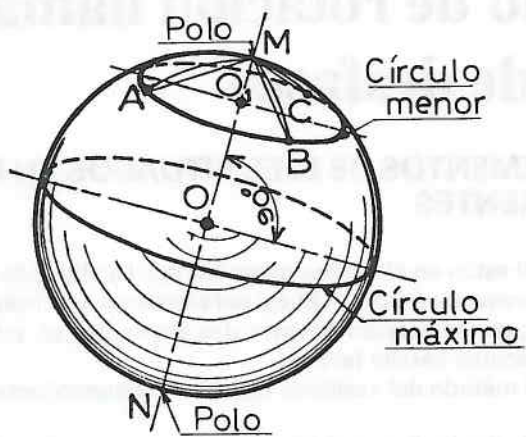


Fig. 1.

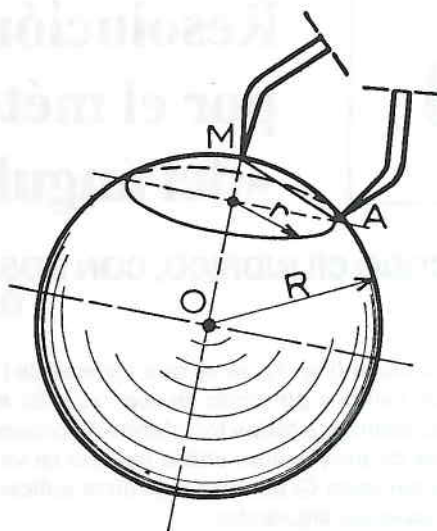


Fig. 2.

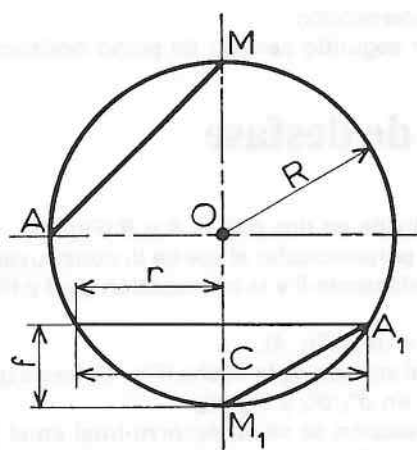


Fig. 3.

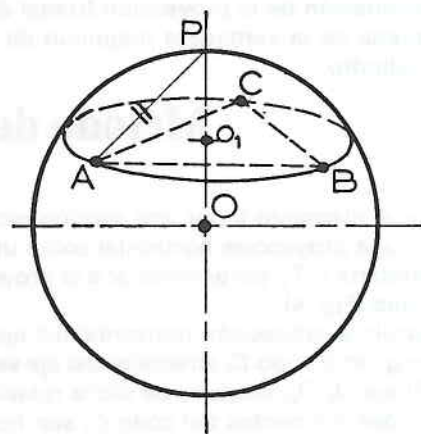


Fig. 4.

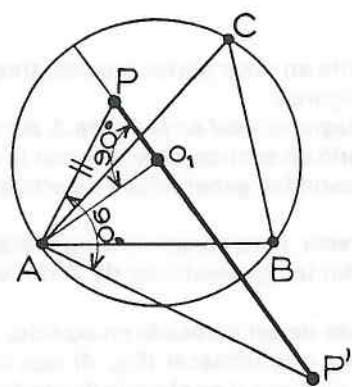


Fig. 5.

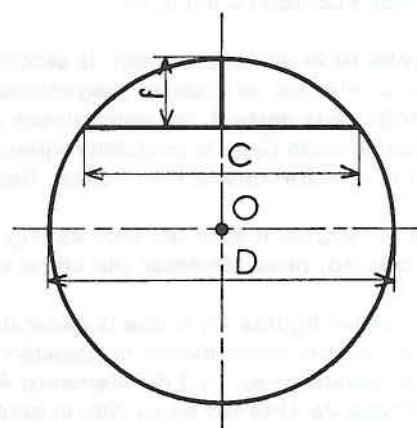


Fig. 6.

La esfera

I. GENERALIDADES

DEFINICION

Una esfera se engendra mediante la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro. **La esfera es de revolución respecto a uno cualquiera de sus diámetros** (una infinitud) (Fig. 1).

La esfera es el sólido que, para una superficie dada, presenta el volumen mayor.

Todas las secciones planas de la esfera son círculos; cuando el plano secante pasa por su centro, el radio del círculo es igual al de la esfera: es un *círculo mayor*; todas las demás secciones son *círculos menores*.

Los polos de un círculo son las extremidades del diámetro de la esfera perpendicular al plano del círculo. Los polos de un círculo de la esfera son equidistantes de los puntos del círculo, ya se mida la distancia en línea recta, ya por el arco de un círculo mayor que pasa por el polo. (Todas estas distancias son oblicuas que se separan lo mismo del pie de la perpendicular): $MA = MB = MC$ $\widehat{MA} = \widehat{MB} = \widehat{MC}$ (Fig. 1).

APLICACIONES.

1. **Empleo del compás esférico** (compás de brazos curvos o acodados) para el trazado de círculos sobre la esfera: el centro es el polo y el radio de abertura del compás es la **distancia polar** MA (Fig. 2). Para un círculo mayor

$MA = R\sqrt{2}$. En un círculo menor $M_1A_1 = \sqrt{r^2 + f^2}$ (Fig. 3) $f = R - \sqrt{R^2 - \frac{C^2}{4}}$.

2. **Búsqueda del diámetro de una esfera por el método «del círculo menor»** (Fig. 4 y 5).

Describir un círculo menor cualquiera sobre la superficie esférica. Con ayuda del compás esférico transportar los lados del triángulo ABC , inscrito en el círculo menor; construir este triángulo sobre un plano y determinar el centro o_1 del círculo menor. Conociendo Ao_1 y AP (distancia polar) se puede construir: 1° el triángulo rectángulo Ao_1P y 2° el triángulo rectángulo PAP' , trazando una perpendicular a AP por A . PP' es el diámetro de la esfera.

Cálculo del diámetro D de una esfera, conociendo la cuerda C y la flecha f (Fig. 6) $D = f + \frac{C^2}{4f}$.

Planos tangentes: Todo plano tangente a la esfera está en contacto con ella solamente en un punto y es perpendicular en su extremo al radio que corresponde al punto de contacto.

Superficie y volumen de la esfera

$$S = 4\pi R^2 \text{ o } \pi D^2 \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ o } \frac{\pi D^3}{6}.$$

ZONA ESFERICA

Es la porción de la **superficie** de la esfera comprendida entre dos planos paralelos (Fig. 7). Su superficie tiene por medida el producto de los números que expresan el perímetro de un círculo mayor y de su altura (Fig. 8):

$$S = 2\pi Rh$$

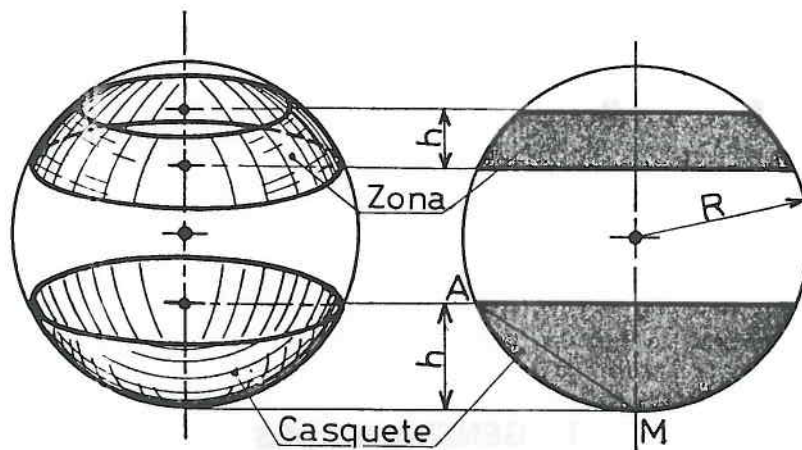


Fig. 7.

Fig. 8.

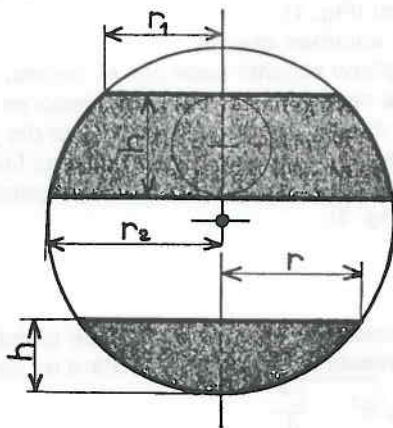


Fig. 9.

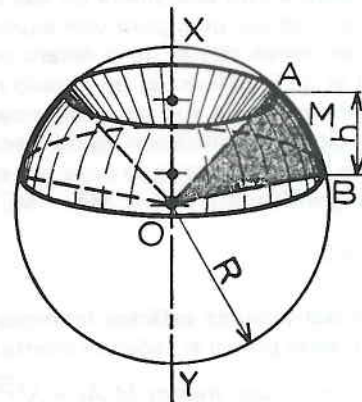


Fig. 10.

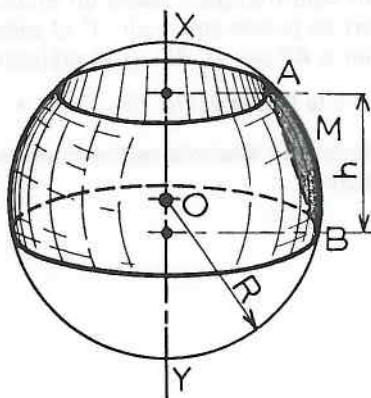


Fig. 11.

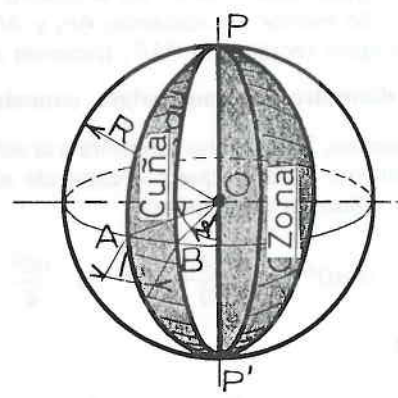


Fig. 12.

CASQUETE ESFERICO

Si uno de los planos secantes que determinan una *zona* se hace tangente, la *zona* toma el nombre de *casquete esférico* (Fig. 7); por lo tanto, la superficie del casquete se obtiene por la misma fórmula aplicada a la zona esférica: $S = 2\pi Rh$, o por la fórmula $S = \pi(MA)^2$ (Fig. 8).

SEGMENTO ESFERICO

Es la porción de **volumen** de la esfera limitado por dos planos secantes paralelos. Es el volumen cubierto por la zona esférica. El segmento esférico puede ser de dos bases o de una sola (cuando uno de los planos se hace tangente).

1. **Volumen del segmento de dos bases.** Se demuestra que este volumen es equivalente a la suma del volumen de una esfera de diámetro h (Fig. 9) y de la semisuma de los volúmenes de dos cilindros de altura h y cuyas bases respectivas son las bases del segmento:

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi (r_1^2 + r_2^2) h.$$

2. **Volumen del segmento de una sola base o casquete** (Fig. 9).

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi r^2 h \quad \text{o} \quad V = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h).$$

SECTOR ESFERICO

Es el sólido engendrado por la rotación de un sector circular AMB alrededor de un diámetro XY , que no lo atraviesa (Fig. 10); está, pues, limitado por una zona de altura h y por dos superficies cónicas de vértice O .

Su volumen es igual al producto de los números que miden el área de la zona por el tercio del radio:

$$V = 2\pi Rh \times \frac{R}{3} \quad \text{ó} \quad V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

ANILLO ESFERICO

Es el sólido engendrado por un segmento de círculo AMB , girando alrededor de un diámetro XY , que no lo atraviesa (Fig. 11) $V = \frac{1}{6} \pi (AB)^2 \times h$.

HUSO ESFERICO

Es la porción de la *superficie* de la esfera comprendida entre dos semicírculos mayores, que tienen un diámetro común.

$$\text{Superficie PABP'} \text{ (Fig. 12)} = 2Rl \quad \text{ó} \quad S = \frac{\pi R^2 \alpha}{90}$$

CUÑA ESFERICA

Es el *volumen* esférico limitado por un huso y los dos semicírculos mayores (Fig. 12)

$$V = \frac{\pi R^2 \alpha}{90} \times \frac{R}{3}$$

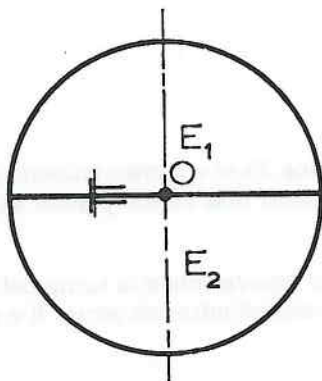


Fig. 13.

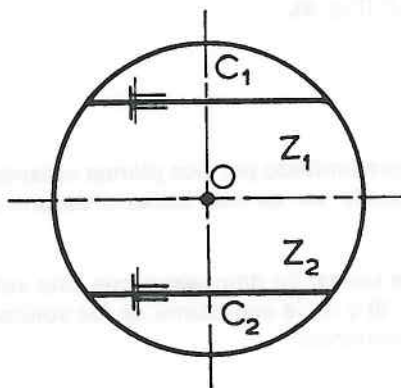


Fig. 14.

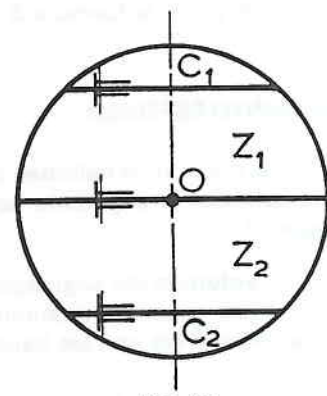


Fig. 15.

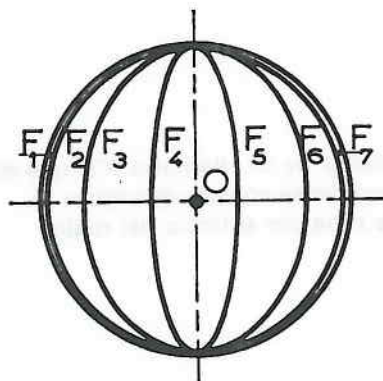


Fig. 16.

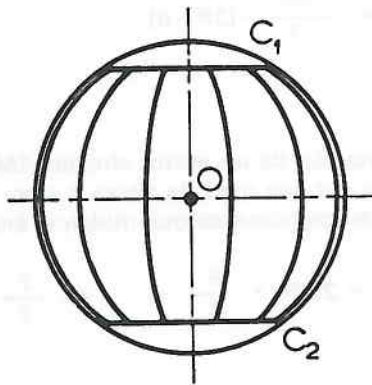


Fig. 17.

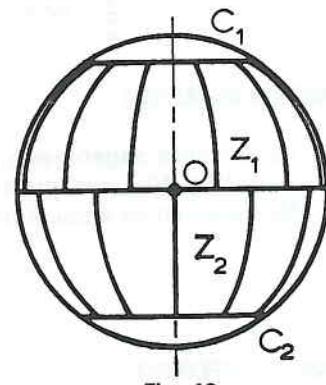


Fig. 18.

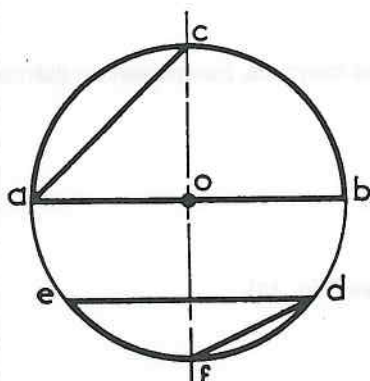


Fig. 19.

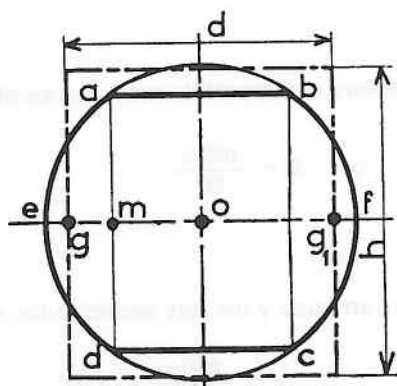


Fig. 20.

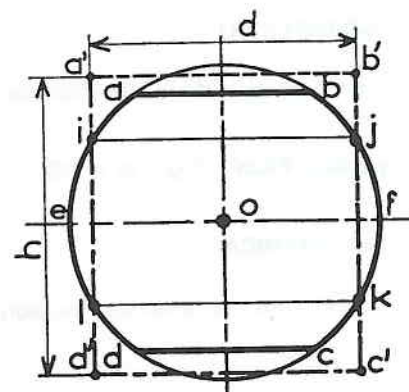


Fig. 21.

II. DESARROLLOS APROXIMADOS DE LA ESFERA

Un plano tangente a una esfera, cualquiera que sea su posición, no es tangente más que en un solo punto de la esfera; *dado que ésta no puede ser engendrada por un plano tangente, no es un sólido desarrollable.*

Según las dimensiones de la esfera y las herramientas de fabricación, este sólido puede realizarse ya por la unión de *dos semiesferas* (Fig. 13), estampadas o forjadas, ya por *zonas* (Fig. 14 y 15), ya por *husos* (Fig. 16) o, más generalmente, por *trozos de husos y dos casquetes* (Fig. 17), ya incluso por *zonas constituidas de trozos de husos y por dos casquetes* (Fig. 18).

Si bien el cálculo permite encontrar con exactitud la superficie de la semiesfera, de la zona y del huso, sin embargo el desarrollo de estos elementos esféricos es solamente aproximado, puesto que cada uno de ellos se realiza por «*formateo*», es decir, por *alargamiento y acortamiento* del metal. **Antes de la unión, es necesario corregir cada elemento.**

1. CALCULO DEL RADIO DE LA PIEZA NECESARIA PARA LA EJECUCION DE UNA SEMIESFERA MEDIANTE ACORTAMIENTO O ESTAMPADO

Superficie de una semiesfera: $S = 2\pi R^2$, si r es el radio de la pieza: $\pi r^2 = 2\pi R^2$ y $r = \sqrt{2R^2} = 1,414 R$.
Gráficamente r = cuerda ac (Fig. 19).

2. ESFERA REALIZADA POR UNA ZONA Y DOS CASQUETES ESFERICOS

a) **desarrollo de un casquete esférico:** puesto que se ejecuta por estampado, se parte de una pieza circular de superficie equivalente: $S = 2\pi Rh$; si r designa el radio de la pieza: $\pi r^2 = 2\pi Rh$, de donde $r = \sqrt{2Rh}$.

Gráficamente r = cuerda df (Fig. 19).

b) **Desarrollo de la zona,** ejecutada por estampado y acortamiento (Fig. 20), partiendo de un *cilindro*.

Mediante el cálculo se puede encontrar la superficie de la zona esférica y deducir de ella la altura de un cilindro, del que se da el diámetro. También se pueden determinar los centros de gravedad g y g_1 de los arcos aed y bfc

($ge \approx \frac{me}{3}$); si la distancia $g-g_1$ se toma como diámetro d del cilindro, la altura h de éste será la longitud del arco

aed (teorema de Guldin).

En la práctica, se determina *arbitrariamente* el diámetro del cilindro con el fin de obtener zonas acortadas y zonas estampadas de ejecución fácil, procurando conservar el espesor inicial de la chapa (Fig. 21).

Sea un cilindro que pasa por los puntos $ijkl$, y que determina dos pequeños círculos neutros de diámetros iguales ij y kl , que separan la zona estampada $ijkl$ de las zonas acortadas $iabj$ y $ldck$. Se lleva la longitud del arco ia en ia' y ld en ld' . $a'd'$ es la altura del cilindro de diámetro d .

OBSERVACION. La superficie cilíndrica $a'b'c'd'$ es ligeramente superior a la superficie esférica $abfcde$, lo que permite el ajuste después del formateo.

3. ESFERA REALIZADA MEDIANTE UNION DE DOS HEMISFERIOS COMPUESTOS CADA UNO DE UNA ZONA Y UN CASQUETE

La zona (Fig. 22) se ejecuta partiendo de un tronco de cono de revolución, determinado de manera semejante a la del cilindro precedente. ef y gi son los diámetros de los círculos neutros; se lleva $ec' = \widehat{ec}$ y $ga' = \widehat{ga}$. El diagrama da los dos diámetros $\varnothing 1$ y $\varnothing 2$, así como la altura h del tronco de cono.

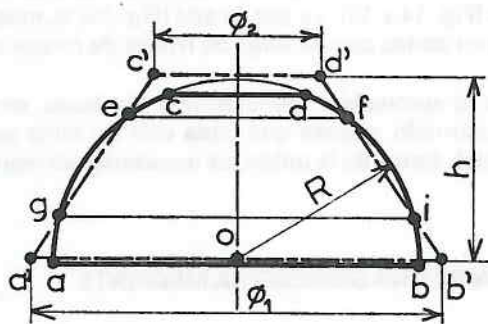


Fig. 22.

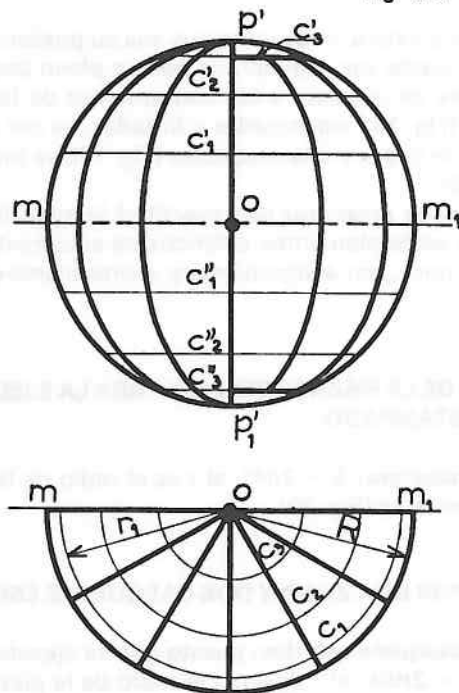


Fig. 23.

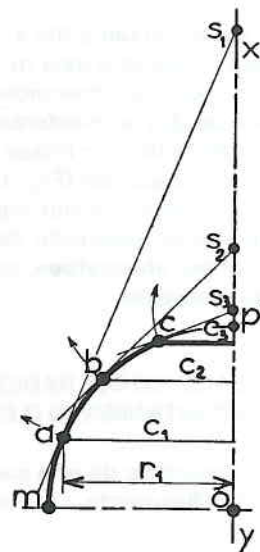


Fig. 24.

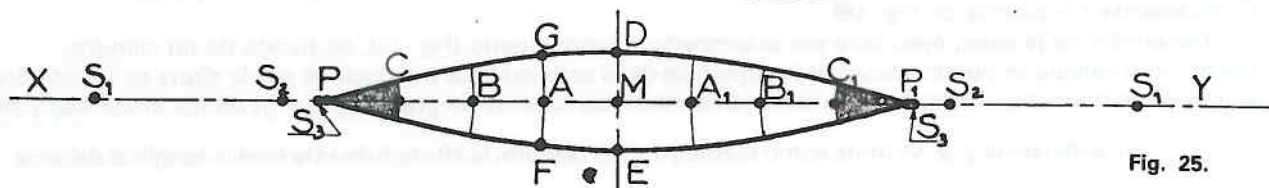


Fig. 25.

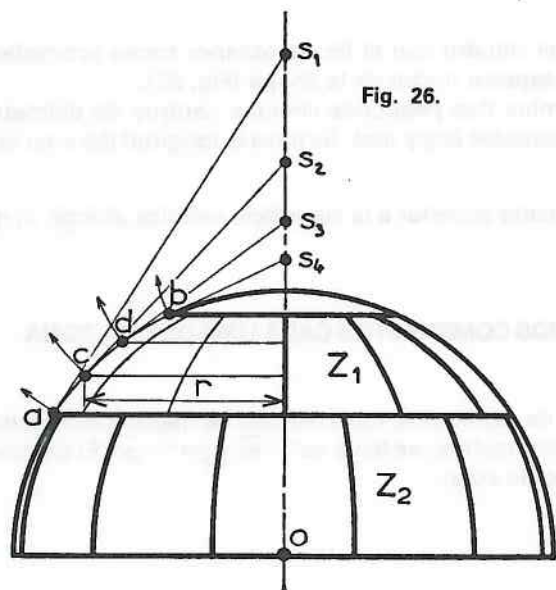


Fig. 26.

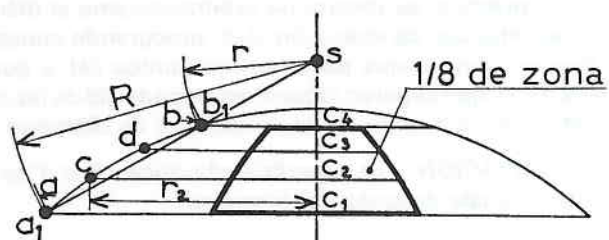


Fig. 28.

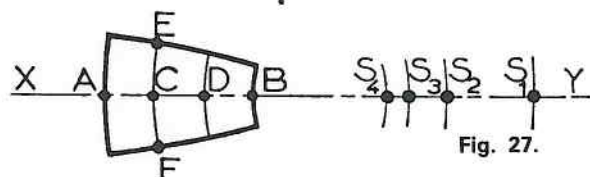


Fig. 27.

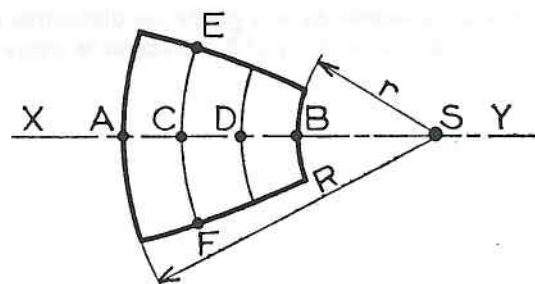


Fig. 29.

4. ESFERA REALIZADA MEDIANTE HUSOS

Diseño. Sea realizar una esfera en doce husos (Fig. 23). Hacer el diseño de un cuarto de círculo mayor que pasa por la fibra neutra (Fig. 24); dividirlo en partes iguales, cuatro por ejemplo; trazar por los puntos abc paralelas a mo ; estas paralelas son las proyecciones de los círculos $C_1 C_2 C_3$, que pasan por $A B C$. Imagínese que los círculos $C_1 C_2 C_3$ (Fig. 23 y 24) son secciones rectas de conos de revolución tangentes a la esfera y que MM_1 es la sección recta de un cilindro de revolución también tangente. Trazando por los puntos abc (Fig. 24) tangentes al círculo, se obtienen sobre el eje xy (línea de los polos) los vértices $s_1 s_2 s_3$ de los conos.

Desarrollo de un huso. Sobre una recta XY (Fig. 25) llevar el desarrollo de un semicírculo mayor en PP_1 . Dividir PP_1 en ocho partes iguales. Los puntos $ABC, A_1 B_1 C_1$, son los puntos de intersección del semimeridiano PMP_1 con los círculos menores $C_1 C_2 C_3$, bases de los conos $S_1 S_2 S_3$. M es la intersección del semimeridiano con el ecuador MM_1 : sección recta del cilindro.

Sobre una perpendicular a XY , llevar $MD = ME = \frac{\pi R}{12}$. Hacer pasar por los puntos $ABC-A_1 B_1 C_1$ arcos de círculo de radio $s_1 a-s_2 b-s_3 c$ (Fig. 24), cuyos centros S_1, S_2, S_3 están situados sobre XY (Fig. 25). Llevar sobre cada uno de estos arcos, simétricamente respecto a XY , la veinticuatroava parte del desarrollo del círculo correspondiente; *ejemplo:* $AF = \widehat{AG} = \frac{\pi r_1}{12}$; r_1 está tomado de la figura 23 o de la figura 24. Unir los puntos obtenidos mediante dos curvas simétricas.

5. ESFERA REALIZADA MEDIANTE TROZOS DE HUSOS Y DOS CASQUETES

Diseño y desarrollo de un huso: Supongase que las proyecciones de las bases de los casquetes son los círculos c'_3 y c''_3 (Fig. 23); el desarrollo de un trozo de huso está limitado por el de los conos que pasan por cada uno de estos círculos; será el de la figura 25, reducido en las partes sombreadas.

6. ESFERA REALIZADA POR ZONAS CONSTITUIDAS DE TROZOS DE HUSOS Y POR CASQUETES

Esta construcción se emplea también para la manufactura de casquetes esféricos de grandes dimensiones (grandes depósitos, gasómetros).

Sea la construcción de una esfera compuesta de dos hemisferios, realizados cada uno mediante dos zonas y un casquete (Fig. 26).

Desarrollo de uno de los doce elementos de la zona z_1 .

a) **Método de los conos tangentes.** Como anteriormente (Fig. 24), dividir el arco ab (Fig. 26) en partes iguales, tres por ejemplo; trazar las tangentes $as_1-cs_2-ds_3-bs_4$, que determinan los vértices $s_1-s_2-s_3-s_4$ de los conos. Sobre una recta XY (Fig. 27), llevar el arco ab rectificado en AB , dividirlo en tres partes iguales; trazar las transformadas de las bases de cada cono; llevar simétricamente respecto a XY , por mitad, la doceava parte del perímetro de cada base; *ejemplo:* $CE = CF = \frac{\pi r}{12}$.

b) **Método del vértice común a cada cono.** Si a la cuerda ab (Fig. 28) corresponde una flecha mínima, se puede prolongar la cuerda hasta la línea de los polos para determinar el vértice s de los troncos de cono.

Dividir el arco ab en partes iguales (tres en la figura 28) y trazar las proyecciones de los círculos que pasan por estos puntos; medir el arco ab y llevar la diferencia con la cuerda, en dos mitades, en aa_1 y en bb_1 .

Desarrollo. Sobre una recta XY (Fig. 29) llevar $AB = a_1 b_1$ y $AS = a_1 s$; dividir AB en tres partes iguales y hacer pasar por los puntos $ACDB$ arcos de centro S ; llevar sobre cada arco, y simétricamente respecto a XY , la mitad a cada lado, la octava parte del desarrollo (en el ejemplo elegido) de cada círculo correspondiente;

ejemplo: $\widehat{CE} = \widehat{CF} = \frac{\pi r_2}{8}$. Unir los puntos mediante dos curvas simétricas.

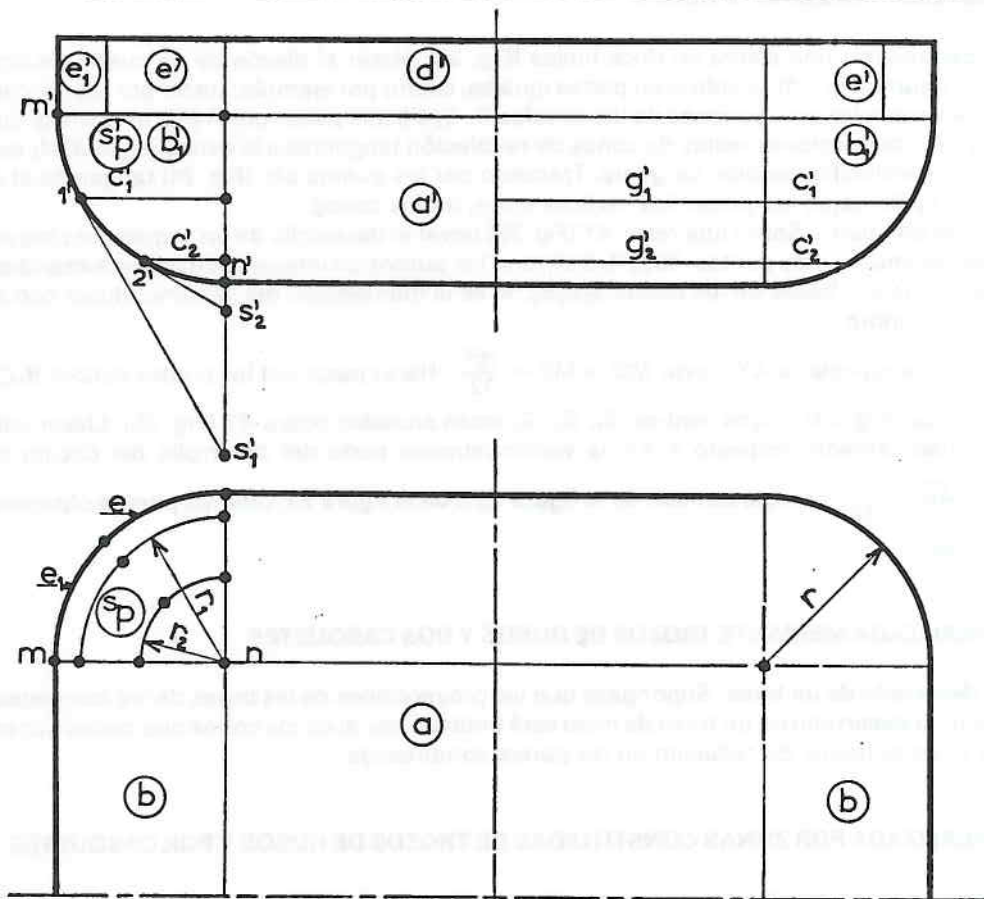


Fig. 31.

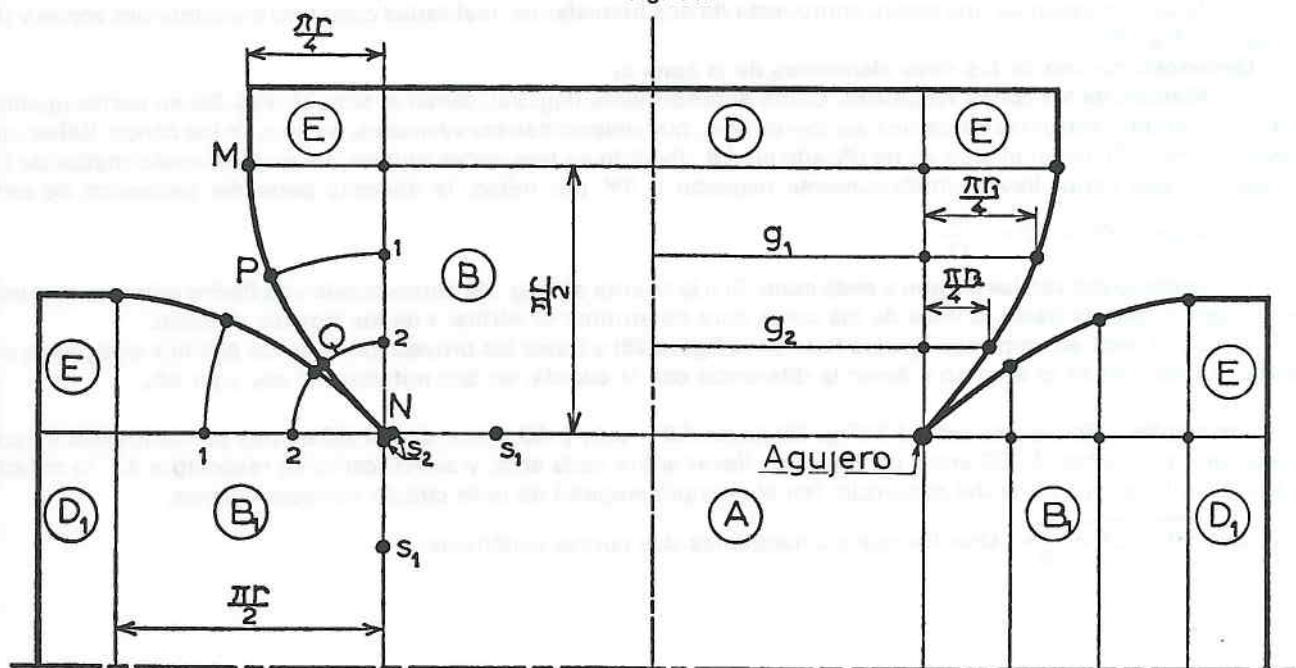


Fig. 32.

III. LAS ESQUINAS ESFERICAS

Las «**esquinas esféricas**» se encuentran con frecuencia, principalmente en la construcción de cubetas rectangulares, llamadas de *esquinas redondas* o mejor de *esquinas esféricas*. Son octavos de esferas que unen tres cuartos de cilindro del mismo radio.

La cubeta o, más generalmente, el fondo de la cubeta (Fig. 30, de al lado), soldada sobre el cuerpo paralelepípedo de ángulos redondeados, está constituida de un rectángulo *A*, de cuatro cuartos de cilindro *B*, de cuatro octavos de esfera *Sp*, de cuatro rectángulos *D* y de cuatro cuartos de cilindro *E*.

Este fondo se ejecuta generalmente de una sola pieza, cuando las dimensiones lo permiten; lleva cuatro soldaduras situadas en el plano de simetría de cada esquina esférica.

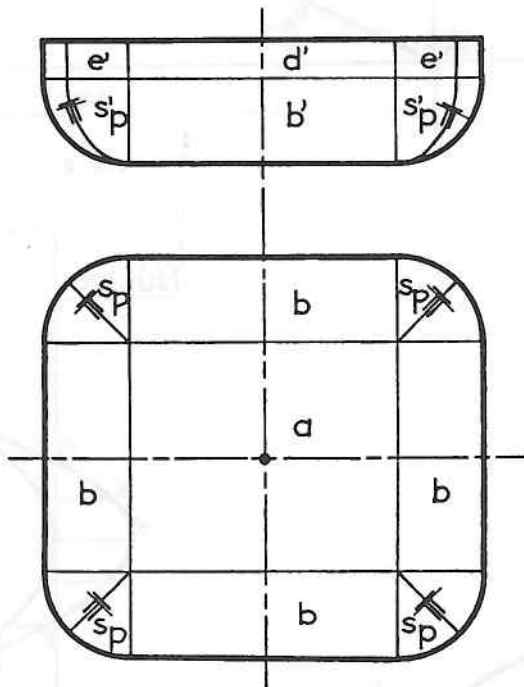


Fig. 30.

DESARROLLO

1. **Desarrollar todas las superficies desarrollables:** el rectángulo *A*, los cuartos de cilindro *B* (por sus fibras neutras) y los rectángulos *D*, a los que se añade el desarrollo de los cuartos de cilindro *E*, una mitad con *D* y la otra mitad con *D*₁ (Fig. 32).

2. **Desarrollo de una esquina esférica:** es el de dos trozos de semihuso.

Como para el desarrollo de la esfera por husos, se emplea el método de los conos tangentes (Fig. 23 a 27).

Diseño (Fig. 31): dividir el arco *m'n'* en partes iguales, tres por ejemplo; determinar los vértices *s'*₁ y *s'*₂ de los conos tangentes. El cono de vértice *S*₁ tiene por base el círculo *C*₁ de radio *R*₁; el cono de vértice *S*₂ tiene por base el círculo *C*₂ de radio *R*₂.

Desarrollo (Fig. 32 izquierda): dividir la transformada del arco *m'n'* en tres partes iguales; los puntos 1-2 son las transformadas de los puntos 1'-2' del diseño. Determinar los vértices *S*₁ y *S*₂, llevando, sobre los lados del rectángulo: desde el punto 1, la generatriz 1's'₁, tomada del diseño; desde el punto 2, la generatriz 2's'₂. Con centro en *S*₁ y *S*₂, trazar los arcos de las transformadas de las bases *C*₁ y *C*₂; llevar sobre estos arcos los desarrollos correspondientes, o sea $\frac{\pi r_1}{4}$ y $\frac{\pi r_2}{4}$. Unir los puntos *MPQN*. Hacer la misma construcción para la otra mitad de la esquina.

OBSERVACION. Si el radio de la esfera es pequeño (≤ 30 a 40 mm), se pueden llevar los desarrollos de los arcos de círculo *C*₁*C*₂, etc. sobre la prolongación de las generatrices de los cilindros, situadas en los planos de los círculos *C*₁, *C*₂, etc. (Fig. 32, derecha). La superficie obtenida así es ligeramente menor que por el primer procedimiento, lo que presenta a veces cierta ventaja para el formateo y la soldadura.

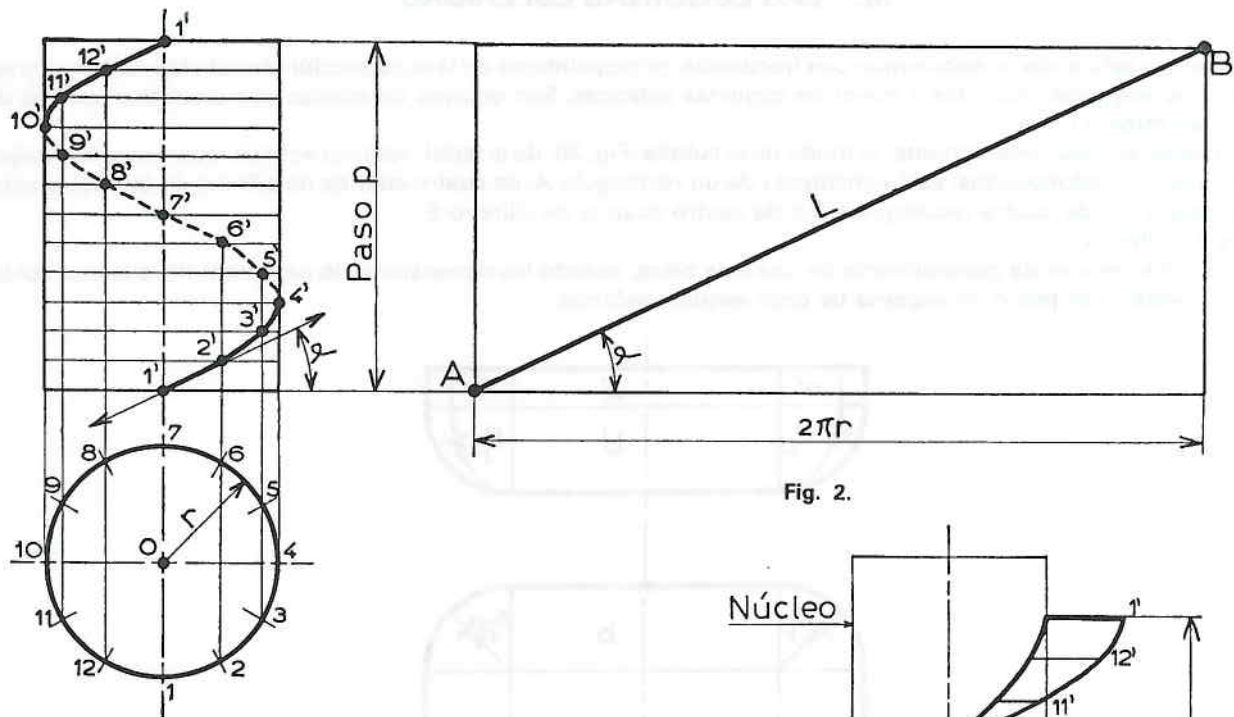


Fig. 2.

Fig. 1.

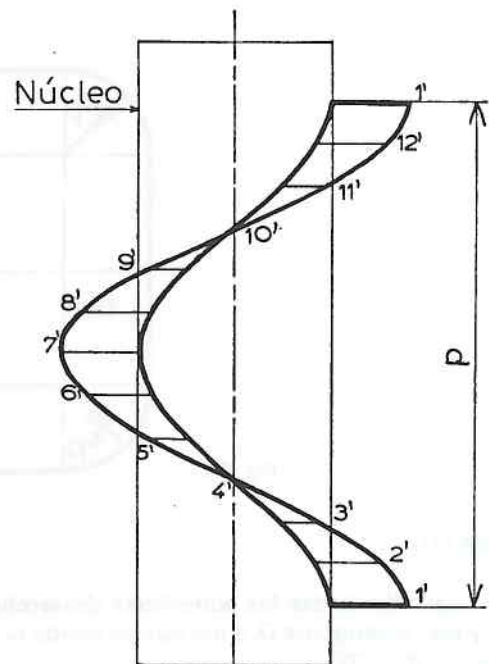


Fig. 3.

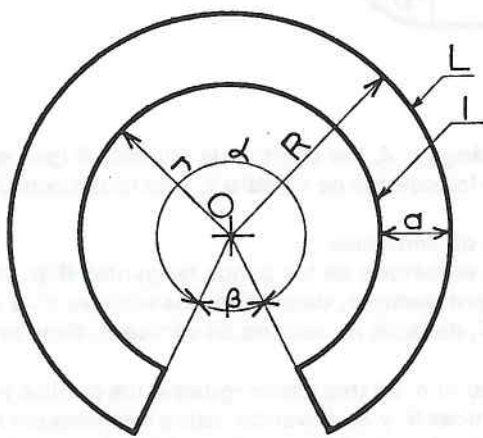
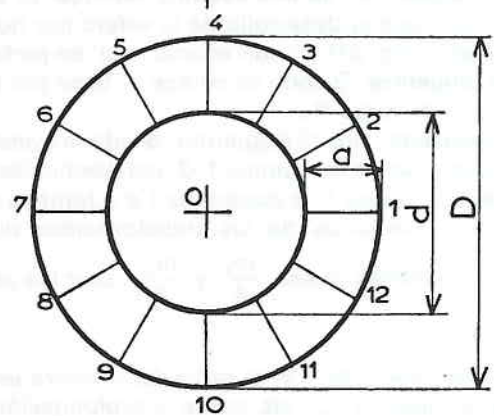


Fig. 4.



Los helicoides

RECORDATORIO DE LA DEFINICION DE LA HELICE CILINDRICA

La hélice cilíndrica es la *curva alabeada* engendrada por un punto que gira a la vez que avanza sobre un cilindro de revolución, de manera que el arco descrito por el punto alrededor del eje del cilindro es proporcional al desplazamiento de este punto en la dirección paralela al eje del cilindro. La hélice corta a las generatrices del cilindro bajo un ángulo constante (Fig. 1). Por ello, el desarrollo de la hélice cilíndrica es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por lados del ángulo recto: uno, el perímetro de la sección recta del cilindro ($2\pi r$), y el otro, el paso p de la hélice.

La longitud AB (Fig. 2) de una espira (1 vuelta), pues, viene dada por la fórmula

$$L = \sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2} \quad \text{o} \quad L = \frac{2\pi r}{\cos \alpha} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2\pi r}$$

La hélice se llama *a derechas*, cuando se eleva girando hacia la derecha de un observador colocado frente al cilindro puesto vertical. Se llama *a izquierdas* en caso contrario.

DEFINICION DE LAS SUPERFICIES HELICOIDALES

Considérese una recta D y un eje XY . Si D está animada de un movimiento compuesto de la yuxtaposición de dos movimientos simples:

- 1.º Rotación alrededor de XY ;
- 2.º Traslación paralela a XY ;

y si, en cada instante, la amplitud del movimiento de rotación es proporcional al espacio recorrido en la traslación, la recta engendra una superficie helicoidal.

Se distinguen, en la práctica, tres tipos de helicoides:

- Cuando la recta corta al eje en ángulo recto, se obtiene un **helicoides recto**.
- Cuando la recta corta al eje en ángulo agudo, se obtiene un **helicoides agudo**.
- Cuando la recta no corta al eje, sino que permanece tangente a una hélice situada sobre un cilindro que tenga a XY por eje, se obtiene un **helicoides desarrollable**.

NOTA. Únicamente es desarrollable el último helicoides; los otros dos, aunque constituidos por *superficies regladas*, no son desarrollables y, por esta razón, se realizan por *formateo*.

I. El helicoides normal o de generatriz radiante

Es el *tornillo de Arquímedes* que, en los transportadores, se emplea como elevador. Se realiza por espiras o trozos de espira, a las que se da forma mediante alargamiento, rectificadas y unidas (Fig. 3).

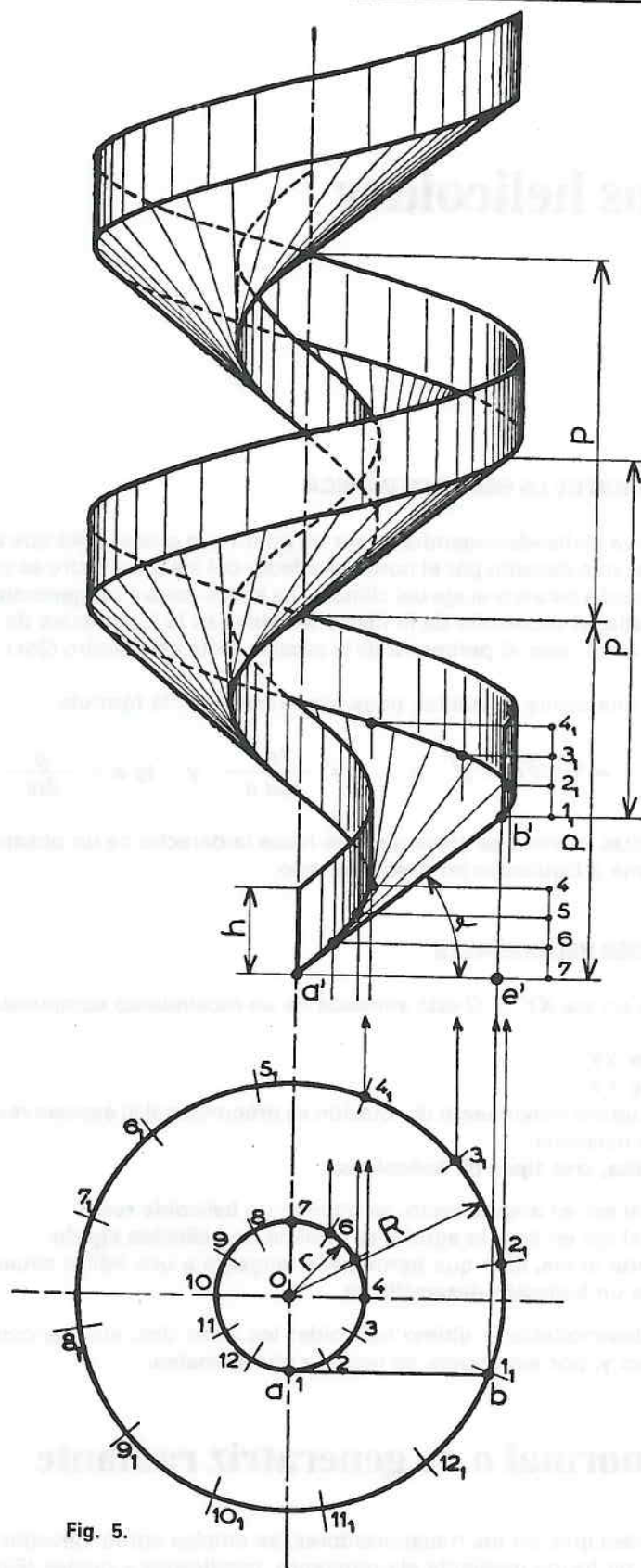


Fig. 5.

DESARROLLO APROXIMADO DE UNA ESPIRA

Es un trozo de corona, cuyos arcos son iguales a las longitudes L de una hélice exterior y l de una hélice interior (Fig. 4).

1. **Cálculo de las longitudes L y l :** $L = \sqrt{\pi^2 D^2 + P^2}$ $l = \sqrt{\pi^2 d^2 + P^2}$

2. **Cálculo de los radios r y R :** Se puede escribir: $\frac{L}{l} = \frac{R}{r}$ pero $R = r + a$ de donde: $\frac{L}{l} = \frac{r + a}{r}$

En toda proporción se puede reemplazar, en la primera razón, el numerador por la diferencia de los dos términos, si se hace lo mismo en la segunda razón; así:

$$\frac{L - l}{l} = \frac{r + a - r}{r} = \frac{a}{r}$$

Haciendo el producto de los extremos y de los medios: $r(L - l) = al$ de donde:

$$r = \frac{al}{L - l} \quad \text{y} \quad R = r + a$$

3. **Cálculo del ángulo en el centro α :** se obtiene como el del cono de revolución:

$$\alpha = \frac{360^\circ \times l}{2\pi r} \quad \text{y} \quad \beta = 360^\circ - \alpha$$

II. El helicoide de generatriz tangente a la hélice directriz

En calderería, estos helicoides se utilizan en la construcción de «**toboganes**» para el encauzamiento de mercancías de arriba a abajo. Constituyen el fondo del tobogán. Las paredes verticales o **zancas** son dos trozos de superficie cilíndrica, limitadas cada una de ellas por dos hélices iguales.

NOTA. Los toboganes se construyen también partiendo de un helicoide *normal* o de un helicoide *agudo*.

CONSTRUCCION DE LA PROYECCION FRONTAL

DATOS. r = radio del núcleo; R = radio de la hélice exterior; p = paso; h = altura de las zancas.

1. **Búsqueda del ángulo α :** ángulo formado por la generatriz y un plano perpendicular al eje:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2\pi r}$$

Conociendo su tangente, es fácil construir el ángulo α , que, en el caso de la figura 5, es frontal; por lo tanto, se proyecta en magnitud real en proyección frontal, y según una tangente al núcleo en proyección horizontal. Referir el punto b en b' ; $a'b'$ es la proyección frontal de la generatriz.

Si no se da el paso, sino el ángulo α , se tiene): $\text{Paso} = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$.

2. **Construir la hélice de radio r y de paso P ,** partiendo de 1 y de a' .

3. **Construir la hélice de radio R y de paso P ,** partiendo de 1₁ y de b' .

Se obtiene así la proyección frontal del helicoide que constituye el fondo del tobogán.

4. **Construir las proyecciones frontales de las zancas,** trazando hélices iguales a las anteriores, a una distancia vertical igual a h .

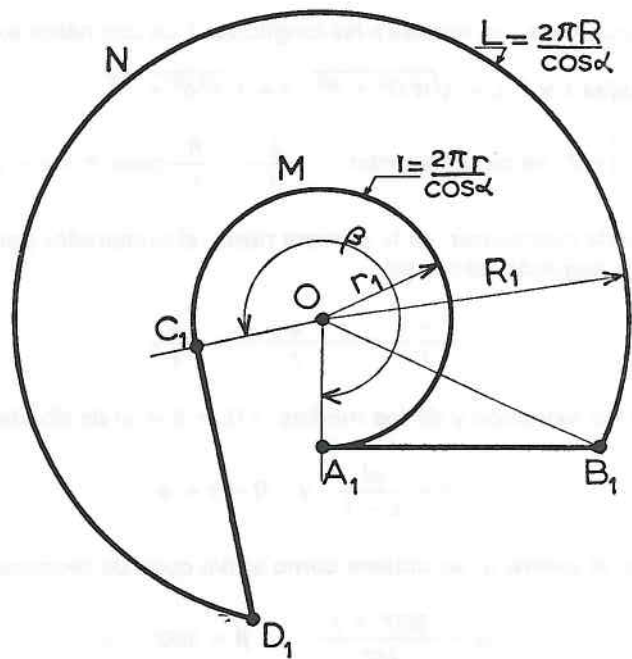


Fig. 6.

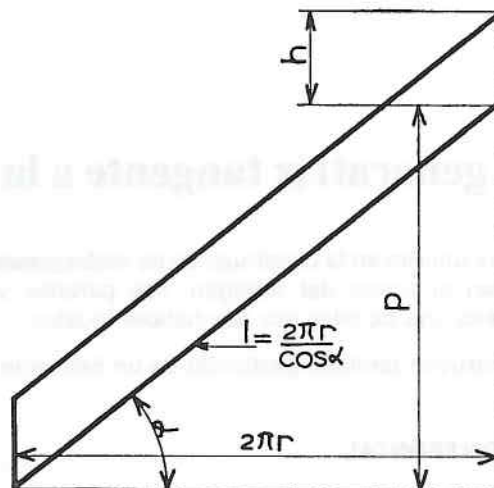


Fig. 7. Desarrollo de la zanca interior.

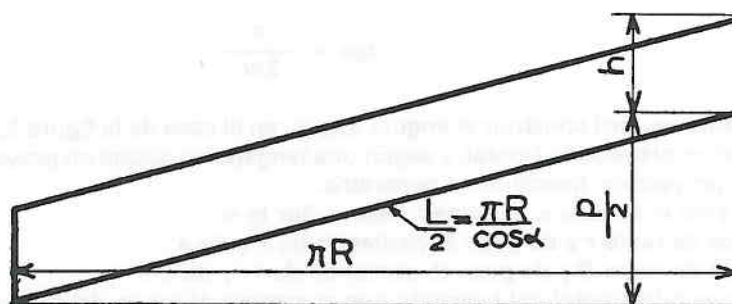


Fig. 8. Semidesarrollo de la zanca exterior.

DESARROLLO DE UNA ESPIRA

Es un trozo de corona de radios r_1 y R_1 .

1. Se demuestra que el radio r_1 (Fig. 6) viene dado por la relación:

$$r_1 = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

2. **Búsqueda del ángulo en el centro α :** el arco A_1MC_1 (Fig. 6) debe ser igual a la longitud l de la hélice interior, o sea:

$$\frac{2\pi r}{\cos \alpha}$$

Longitud del arco $A_1MC_1 = 2\pi r_1 \times \frac{\beta}{360^\circ}$ o, reemplazando r_1 por su valor $\frac{r}{\cos^2 \alpha}$:

$$\widehat{A_1MC_1} = \frac{2\pi r}{\cos^2 \alpha} \times \frac{\beta}{360^\circ} \text{ y, puesto que } \widehat{A_1MC_1} = l = \frac{2\pi r}{\cos \alpha} \text{ se tiene:}$$

$$\frac{2\pi r}{\cos^2 \alpha} \times \frac{\beta}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{\cos \alpha} \text{ de donde se deduce } \cos \alpha = \frac{\beta}{360^\circ} \text{ y } \boxed{\beta = 360^\circ \times \cos \alpha}$$

Construyendo a partir de A_1 el ángulo β o llevando a partir de A_1 la longitud l sobre el arco de radio r_1 , se obtiene el arco A_1MC_1 .

Las transformadas de las generatrices AB y CD son dos segmentos A_1B_1 y C_1D_1 (Fig. 6), tangentes al arco A_1MC_1 , que tienen por longitud $a'b'$ (Fig. 5).

3. **Cálculo de la longitud de la generatriz AB .**

En el triángulo rectángulo $a'b'e'$ (Fig. 5) se tiene: $a'e' = a'b' \cos \alpha$ de donde:

generatriz

$$\boxed{AB = a'b' = \frac{a'e'}{\cos \alpha}}$$

4. El radio R_1 de la corona es el segmento $OB_1 = OD_1$.

Comprobación: el arco B_1ND_1 debe ser igual a la longitud de la hélice exterior, o sea: $\frac{2\pi R}{\cos \alpha}$

DESARROLLO DE LAS ZANCAS

Cada zanca es un paralelogramo, cuyos lados mayores son las transformadas de las hélices, interior para la zanca interior (Fig. 7) y exterior para la zanca exterior (Fig. 8); los lados menores tienen por longitud h .

MANERA DE DAR LA FORMA

Puesto que las zancas son superficies cilíndricas, se *curva* según generatrices paralelas a los lados menores del paralelogramo de desarrollo.

El fondo también se obtiene mediante el *curvado* según una sucesión de generatrices tangentes al círculo de la corona de desarrollo.

1. Las superficies compuestas	
Generalidades	5
Teoría de los planos tangentes	5
Tipos de superficies compuestas	7
Las bases a unir están situadas en planos paralelos	7
Estudio de los problemas elementales	7
Unión de un orificio circular con un orificio compuesto de rectas y de arcos de círculo	9
Determinación de los elementos que constituyen la superficie	9
2. Desarrollo de algunas superficies compuestas que unen dos orificios situados en planos paralelos	
Unión de un orificio circular con un orificio de cuatro lados que tiene dos ángulos redondeados	11
Unión de un orificio circular con un orificio de cuatro lados que tiene ángulos redondeados mediante arcos de radio igual al del círculo	15
Unión de un orificio circular con un orificio triangular que tiene dos ángulos redondeados mediante arcos de radio igual al del círculo	17
Unión de dos bases cuyo contorno se compone de segmentos de recta y de arcos de círculo	19
Unión de un orificio circular con otro orificio limitado mediante segmentos de recta y arcos de círculo	21
Unión de una base oval con un orificio circular	23
Unión de dos orificios ovals concéntricos	25
Unión de dos orificios semiplanos iguales, que forman entre sí un ángulo de 60 grados	27
Uniones de orificios diversos	29
Unión de orificios, uno de los cuales tiene una parte cóncava	31
3. Las superficies compuestas. Las bases a unir están situadas en planos concurrentes	
Determinación de los elementos que componen la superficie	33
Unión de un rectángulo horizontal con un círculo de canto	36
Unión de un polígono con un círculo, situados en planos perpendiculares entre sí	39
Caso particular: unión de un polígono con una elipse que se proyecta en un círculo	43
4. Las superficies desarrollables cualesquiera	
Las dos bases a unir están situadas en planos paralelos	47
Unión de un orificio elíptico con un orificio circular	47
Las dos bases a unir están situadas en planos concurrentes	49
Unión de dos orificios circulares	49
Unión de un orificio rectangular de ángulos redondeados con un orificio circular	51
Construcción para determinar el punto de tangencia al círculo abatido cuando el punto de origen de la tangente está situado fuera del diseño	53
Superficies regladas y superficies desarrollables	55

5. Las intersecciones	
Generalidades	57
Determinación de las intersecciones	57
6. Intersecciones sencillas de cilindros de revolución	
Caso particular: los ejes de los cilindros son concurrentes	61
Intersección de dos cilindros de diámetros diferentes, cuyos ejes son perpendiculares y concurrentes	63
Intersección de dos cilindros de diámetros diferentes, cuyos ejes son oblicuos entre sí	65
7. Intersecciones sencillas de conos y de cilindros de revolución	
Generalidades	67
El cilindro penetra el cono	69
El cono penetra el cilindro	75
8. Intersecciones de conos oblicuos y de cilindros	
Los cilindros penetran el cono; uno, de revolución tiene su eje vertical; el otro, de sección elíptica, tiene su eje horizontal	77
El cono penetra un cilindro recto de base elíptica, los ejes de los dos sólidos son oblicuos entre sí	77
9. Principales disposiciones empleadas en chapistería y calderería para unir los elementos de una «intersección»	
Las principales uniones de tubos cilíndricos	79
10. Búsqueda de las intersecciones por el método de las esferas secantes	
Generalidades	85
Empleo de las esferas secantes para determinar las secciones circulares de los cilindros y de los conos, rectos u oblicuos, de base elíptica	87
Empleo de las esferas secantes	89
Caso de dos sólidos de revolución	89
Intersección de un sólido de revolución A con un sólido B que presenta secciones circulares	93
11. Intersecciones de esferas y de cilindros	
Intersección de una esfera con un cilindro recto de base elíptica, cuyo eje es vertical	97
Intersección de una esfera con un cilindro de revolución, cuyo eje es frontal	97
Intersección de una esfera con un cilindro oblicuo de base circular, cuyo eje es frontal	99
Intersección de una esfera con un cilindro de revolución, cuyo eje es oblicuo a todos los planos de proyección	99
Intersecciones de esferas y de conos	101
12. Intersecciones de toros, de cilindros y de conos de revolución	
Intersección de un toro y de un cilindro, cuyo eje es paralelo al plano medio del toro	103
Intersección de un toro y de un cilindro, cuyo eje es paralelo al eje de rotación del toro	103
Intersecciones de toros y de conos de revolución	103
13. Intersecciones de conos y de cilindros, cuyos ejes son oblicuos entre sí y no concurrentes	
Intersección de un cono y de un cilindro de revolución, cuyos ejes son frontales	105
Intersección de un cono oblicuo con un cilindro de revolución, cuyo eje es oblicuo a todos los planos de proyección	111
	175

intersección de dos conos de revolución, cuyos ejes son oblicuos entre sí y no concurrentes	115
Búsqueda de la intersección mediante abatimiento del plano de canto, que contiene la sección recta del sólido penetrante	117
Intersección de un cono oblicuo de base circular y de un cono de revolución	119
Intersección de dos cilindros de ejes cualesquiera y no concurrentes	121
Intersección de un cilindro oblicuo de bases elípticas y de un cilindro de revolución	123
Intersección de un cilindro oblicuo de bases circulares y de generatrices oblicuas respecto a los planos de proyección con un cilindro de revolución de eje frontal	127
Otro método para determinar la intersección de un cono de revolución y de un cilindro, cuyos ejes no son concurrentes	129
14. Intersecciones de poliedros	
Generalidades	133
Intersección de dos prismas	133
Intersección de un prisma y de una pirámide	135
15. Intersecciones de cilindros y de conos circunscritos al mismo sólido de revolución	
Cono y cilindro circunscritos a la misma esfera	137
Cono y cilindro circunscritos al mismo elipsoide de revolución	139
16. Intersecciones de cilindros y de conos que tienen una base común	
Generalidades	143
Pantalones cuyos elementos cónicos son trozos de conos oblicuos	145
17. El sistema regular de generatrices en el cilindro de revolución	
El eje del cilindro es paralelo a un plano de proyección	147
El cilindro es oblicuo a todos los planos de proyección	147
Construcción de las generatrices por abatimiento de la sección recta sobre las dos vistas	149
Unión de dos paredes ortogonales mediante un tubo cilíndrico	151
Unión de un prisma recto y de un cilindro de revolución mediante un tubo cilíndrico	153
Unión de dos cilindros de revolución mediante un tubo cilíndrico	155
18. Resolución de intersecciones por el método de rotación llamado «del ángulo de desfase»	
Método del ángulo de desfase	157
19. La esfera	
Generalidades	159
Desarrollos aproximados de la esfera	163
Las esquinas esféricas	167
20. Los helicoides	
El helicoide normal o de generatriz radiante	169
El helicoide de generatriz tangente a la hélice directriz	171

BIBLIOTECA DE MECANICA

- **Trazado de desarrollos de piezas de plancha**
- **La medición en el taller mecánico**
- **Formulario de Mecánica**
- **Tecnología de los procesos de soldadura**
- **Trazado de desarrollos en calderería**
- **Tecnología de los trabajos de plancha**
- **Atlas de máquinas**
- **Prácticas de taller mecánico I y II**
- **Trazado de planchistería y calderería I y II**